



انتقال هدفمند انرژی از تیر دوسرگیردار تحت تحریک هارمونیک خارجی به چاه غیرخطی انرژی

علی ابراهیمی ممغانی^۱ و هدی سرپرست^{۱*}

^۱ باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۱/۲۱، تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۱/۱۹، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۹/۰۹

چکیده

در این مقاله به بررسی رفتار ارتعاشی یک تیر دوسرگیردار متصل به یک جاذب غیرخطی ارتعاشاتی پرداخته شده است که تحت بار نوسانی با دامنه‌های تحریک مختلف قرار دارد. این سیستم در واقع یک مدل ساده و محلی از سازه‌های دریایی تحت تحریک سیال خارجی را ارائه می‌دهد. برای مدل‌سازی تیر از تئوری اویلر-برنولی و برای مدل‌سازی جاذب (چاه غیرخطی انرژی)، از فنر غیرخطی و میراگر خطی استفاده شده است. پاسخ سیستم به دو روش تحلیلی (روش متوسط‌گیری مختلط شونده) و عددی (روش رانگ-کوتای مرتبه چهارم)، به دست آمده است و بر این اساس محدوده مناسب پارامترهای سیستم و جاذب، برای کاهش بهینه ارتعاشات استخراج شده است. علاوه بر این اثرات میرایی سیستم، تأثیر مودهای بالاتر، محدوده‌های رخداد پاسخ شبه‌تناوبی و شرایط رخداد ناپایداری در پاسخ حالت ماندگار سیستم بررسی شده است. نتایج نشان دادند که آستانه‌های نیرویی برای پدیده‌هایی نظیر، ناحیه منفصل فرکانسی و محدوده‌های انشعابات و پرش در سیستم با تغییر محل نصب جاذب به شدت تغییر خواهد کرد.

کلمات کلیدی: تیر دوسرگیردار؛ جاذب غیرفعال؛ ارتعاشات غیرخطی؛ انشعابات؛ پرش.

Target Energy Transfer from a Doubly Clamped Beam Subjected to the Harmonic External Load using Nonlinear Energy Sink

A. Ebrahimi Mamaghani¹, H. Sarparast^{1,*}

¹ Young Researchers and Elite Club, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

Abstract

In this paper, we investigate the vibrational behavior of a double-beam doubly clamped beam subjected to the harmonic external load with different amplitudes using a passive absorber. This system actually provides a simple and localized model of marine structures stimulated by external fluid. For modeling of the beam, the Euler-Bernoulli theory and for modeling of nonlinear energy sink, nonlinear springs and linear dampers have been used. The system response is obtained by two analytical methods (complexification averaging method) and numerical (fourth order Rang-Kuta method) and accordingly, the proper range of system and absorber's parameters are extracted to optimally reduce vibrations. In addition, the effects of system damping, the effect of higher modes, quasi-periodic response regions and instability conditions on the relative displacement and center of mass of the system response are investigated. The results showed that the load thresholds for the occurrence of various phenomena such as the detached resonance frequency region and the Hopf and saddle node bifurcations, the probability of occurrence of the jump phenomenon in the system and the nonlinear adsorbent efficiency will change with the change of the adsorbent location.

Keywords: Doubly Clamped Beam; Passive Absorber; Nonlinear Vibration; Bifurcations; Jump.

۱- مقدمه

سوی دیگر، تأثیر این جاذب غیرخطی روی سیستم‌های پیوسته گوناگون نیز تحلیل شده‌اند. ممقانی و خادم [۵] به تحلیل دینامیکی یک تیر اوپلر-برنولی^۹ همراه با چاه غیرخطی انرژی^{۱۰} تحت تحریک هارمونیک پرداخته‌اند. برای مدل کردن جاذب غیرخطی، از فنریت و میرایی غیرخطی محض استفاده کردند و برای تحلیل‌های عددی خود تنها از مود اول سیستم اصلی استفاده کردند. آن‌ها برای تحلیل شرایط پایداری، شرایط لازم برای رخداد انشعابات هاپف عام^{۱۱} و زین اسیبی^{۱۲} را مورد مطالعه قرار دادند و تأثیر پارامترهای مختلف سیستم را روی پاسخ فرکانسی^{۱۳}، دامنه حالت ماندگار و نواحی منفصل فرکانسی^{۱۴}، مورد بررسی قرار دادند. شاکری و سامانی [۶] با هدف کاهش ارتعاشات خودتحریک فرآیند میکروفرزکاری، از جاذب‌های ارتعاشی غیرخطی استفاده کردند و تأثیر آن‌ها را بر پاسخ زمانی و پایداری سازه بررسی کردند. رضایی و عرب ملکی [۷]، تأثیر جاذب ارتعاشی یک درجه آزادی را بر کاهش دامنه ارتعاشات لوله‌های حامل سیال با روش نیمه تحلیلی مطالعه کردند. آنها نشان دادند که جاذب ارتعاشی در شرایط بهینه می‌تواند ارتعاشات ناشی از افزایش سرعت سیال درونی را به میزان قابل توجهی کاهش دهد. ابراهیمی و حسینی [۸]، پایداری نوسان‌کننده‌های برخوردی را مطالعه کردند و اثر استفاده از این جاذب را در افزایش دامنه ارتعاشات سازه‌های گوناگون بررسی کردند. تومکار و همکاران [۹]، ارتعاشات یک تیر ناشی گردابه‌های سیال خارجی را با کمک جاذب غیرخطی درونی کاهش دادند. آن‌ها معادلات ناوییر-استوکس را با کمک روش المان محدود حل کردند. ممقانی و همکاران [۱۰ و ۱۱]، کنترل ارتعاش سازه‌های دریایی با کمک جاذب‌های غیرخطی را مطالعه کردند و نشان دادند که جاذب‌های غیرخطی، کارایی بیشتری نسبت به جاذب‌های خطی در کاهش ارتعاشات مزاحم امواج دریایی برای سکوه‌های نفتی را دارند. گوئو و همکاران [۱۲]، به بررسی کارایی چاه غیرخطی انرژی روی کاهش ارتعاشات جانبی روتور، به ویژه زمانی پرداخته‌اند که از

حذف ارتعاشات نامطلوب از سیستم‌های مکانیکی، یکی از نیازهای طراحان است که سال‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. از همین رو، کنترل‌گرهای غیرفعال^۱ با هدف از بین بردن ارتعاشات ناخواسته، جایگاه ویژه‌ای از نظر مهندسان داشته‌اند. با در نظر گرفتن خاصیت پایداری ذاتی این کنترلرها، می‌توان آن‌ها را به عنوان جایگزین مناسبی برای جاذب‌های فعال در نظر گرفت که پیچیده و نیازمند تأمین انرژی خارجی هستند. شناخته‌شده‌ترین جاذب غیرفعال، جاذب میراگر جرمی تنظیم شده^۲ است که بزرگ‌ترین نقص آن، کوچک بودن پهنای باند^۳ محدوده بهینه کاری این جاذب خطی است [۱]. اخیراً به منظور رفع این محدودیت‌ها، مهندسين و طراحان، جاذب‌های غیرخطی^۴ را پیشنهاد کرده‌اند و تحقیقات گسترده‌ای روی چاه غیرخطی انرژی به عنوان جایگزین مناسبی برای جاذب‌های خطی و غیرخطی ضعیف انجام داده‌اند. پژوهشگران تاکنون پاسخ‌های گذرا و حالت پایدار را برای سیستم‌های یک یا چند درجه آزادی متصل به چاه غیرخطی انرژی، به صورت تحلیلی و عددی بررسی کرده‌اند. به طور مثال لونگو و زولی [۲] کارایی یک چاه غیرخطی انرژی روی کاهش ارتعاشات یک سیستم چند درجه آزادی را مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها برای این کار، از روش ترکیبی مرتبه چندگانه^۵ و توازن هارمونیک^۶ استفاده کرده‌اند. سیگالو و همکاران [۳] به بررسی کارایی چاه غیرخطی انرژی دوار پرداخته‌اند که با یک سیستم یک درجه آزادی کوپل است و شرایط رخداد پدیده انتقال هدفمند انرژی^۷ را در این سیستم، مورد بررسی قرار داده‌اند. الشودیفیت و همکاران [۴] به بررسی کارایی چاه غیرخطی انرژی ضربه‌ای^۸ یک و دوطرفه روی کاهش ارتعاشات یک بدنه ساختمان دو درجه آزادی پرداخته‌اند. آن‌ها معادلات سیستم را به صورت عددی حل کرده و با انجام آزمون‌های آزمایشگاهی کارایی جاذب‌ها را مورد تأیید قرار داده‌اند. از

¹ Passive² Tuend Mass Damper (TMD)³ Narrow-Band⁴ Nonlinear Absorber⁵ Multiple Scale⁶ Harmonic Balance⁷ Targeted Energy Transfer (TET)⁸ Vibro-Impact⁹ Euler-Bernoulli¹⁰ Nonlinear Energy Sink (NES)¹¹ Generic Hopf Bifurcation¹² Saddle-Node Bifurcation¹³ Frequency Response¹⁴ Detached Resonance Curve

حل عددی مطالعه می‌شود که تا حد ممکن به شبیه‌سازی واقعی و کاربردی نزدیک‌تر باشد و اثرات مکان نصب و پارمترهای فیزیکی چاه غیرخطی انرژی نیز، برای اولین بار در این مقاله روی یک سیستم پیوسته گزارش شده است. برای مدل کردن چاه غیرخطی انرژی نیز، از سختی غیرخطی و میرایی خطی استفاده شده است؛ همچنین در این پژوهش، با استفاده از روش تحلیلی (متوسط‌گیری مختلط شونده^۵) و حل عددی (رانگ-کوتای^۶ مرتبه چهارم)، به تحلیل شرایط پایداری (محدوده‌های دقیق رخداد انشعابات هاپف عام و زین اسبی) و تأثیرات انشعابات بر پاسخ فرکانسی و نواحی منفصل فرکانسی، پرداخته می‌شود که تأثیر دقیق و عملی چاه غیرخطی انرژی را در تحریک نوسانی خارجی به خوبی روشن می‌سازد. برای شبیه‌سازی نیروی سیال خارجی، یک نیروی هارمونیک خارجی با دامنه‌های مختلف در طول کل تیر اعمال خواهد شد. برای تحلیل دقیق‌تر اثرات افزودن این جاذب خاص به سیستم موردنظر، نمودارهای کاربردی مانند، پاسخ زمانی (با چند مود ارتعاشاتی)، نمودار پوانکاره و طیف فرکانسی رسم می‌شوند.

۲- مدل‌سازی ریاضی

در شکل ۱ یک شماتیک کلی از سیستم مورد نظر نشان داده شده است که به صورت یک تیر دوسرگیردار به طول L و متصل به جاذب غیرخطی است. معادلات دینامیکی سیستم نیز در رابطه (۱) بیان شده‌اند [۱۶ و ۱۷]:

$$E_b I_b w_{xxxx}(x,t) + c_b w_t(x,t) + m_b w_{tt}(x,t) + \{C[w_t(d,t) - v_t(t)] + K[w(d,t) - v(t)]^3\} \delta(x-d) = F \sin(\Omega t) \quad (1)$$

$$m_{nes} v_{tt}(t) + C[v_t(t) - w_t(d,t)] + K[v(t) - w(d,t)]^3 = 0 \quad (2)$$

پارامتر E_b مدول الاستیسیته تیر؛ I_b ممان اینرسی سطح مقطع تیر، x مشخصه راستای طولی تیر، t زمان، $w(x,t)$ جابجایی تیر، m_b و c_b نیز به ترتیب چگالی جرمی و میرایی خارجی در واحد طول تیر هستند. چاه غیرخطی انرژی با جرم m_{nes} سختی K با توان سوم و میرایی خطی با ثابت C در فاصله d از تکیه‌گاه سمت چپ با جابجایی مطلق v به تیر

سرعت‌های بحرانی می‌گذرد. آن‌ها چاه غیرخطی انرژی را در داخل بدنه روتور که به صورت شعاعی نوسان می‌کند، در نظر گرفته‌اند و به مقایسه کارایی چاه غیرخطی انرژی و جاذب خطی بهینه در کاهش بهینه ارتعاشات روتور با بررسی اثر پارامترهایی مانند، نامیزانی و میرایی چاه پرداخته‌اند و به این نتیجه رسیدند که چاه غیرخطی انرژی در مقایسه با جاذب خطی بدون نیاز به دانستن اطلاعات اولیه از نابالانسی و زاویه آن کارآمدتر است. سامانی و پلیکانو [۱۳]، دینامیک یک تیر اویلر-برنولی تحت بار متحرک و کوپل شده با چاه غیرخطی انرژی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. هدف آن‌ها به‌دست آوردن پارامترهای بهینه چاه (یعنی مکان، سختی و میرایی جاذب) بوده است. جورجیادز و واکاکیس [۱۴]، یک ورق متصل به جاذب غیرخطی را که روی یک بستر الاستیک قرار دارد، مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ورق نازک را با استفاده از روش اجزای محدود^۱ حل کرده‌اند و ماتریس ساختار سیستم را به‌دست آورده‌اند. سپس انواع مختلف چاه غیرخطی انرژی را به آن اضافه کرده و پاسخ دینامیکی سیستم را مورد ارزیابی قرار داده‌اند. گئوردیاس و همکاران [۱۵]، به بررسی رفتار و کارایی چاه غیرخطی انرژی متصل به یک تیر محوری خطی دارای میرایی، تحت نیروی ضربه‌ای پرداخته‌اند و با استفاده از دو روش موجک^۲ و ترکیبی از روش‌های تجزیه مودهای تجربی^۳ و تبدیل هیلبرت^۴، مودهای سیستم را استخراج کرده‌اند و نشان داده‌اند که با کاهش سختی کوپلینگ و افزایش انرژی شوک وارد شده به سیستم، درصد جذب انرژی توسط چاه غیرخطی افزایش می‌یابد.

مسئله یکی از جایگاه‌های کاربردی و اساسی جاذب‌های دینامیکی غیرفعال، سازه‌های دریایی هستند که تا به حال این کاربرد در آن‌ها به خوبی مورد بررسی قرار نگرفته است و مطالعات گذشته، تنها در محدوده خاصی از سرعت سیال خارجی تمرکز داشتند. در این مقاله برای اولین بار یک مدل از سازه‌های دریایی با در نظر گرفتن میرایی (استهلاک) برای سیستم اصلی و تأثیر استفاده از مودهای بالاتر برای تیر در

¹ Finite Element Method

² Wavelet

³ Empirical Mode Decomposition (EMD)

⁴ Hilbert Transform

⁵ Complexification-Averaging Method

⁶ Runge-Kutta Method

$$\bar{w} = \frac{w}{L}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{v} = \frac{v}{L}, \bar{t} = \frac{t}{\tau},$$

$$\bar{d} = \frac{d}{L}, \bar{\Omega} = \Omega \tau, \varepsilon = \frac{m_{NES}}{m_b L} \quad (۴)$$

در روابط بالا متغیر τ به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود:

$$\tau = \frac{L^2}{\lambda_1^2} \sqrt{\frac{m_b}{E_b I_b}} \quad (۵)$$

با قرار دادن روابط (۴) و (۵) در روابط (۱) و (۲) و حذف علامت بار برای سادگی، روابط (۶) و (۷) به دست خواهند آمد:

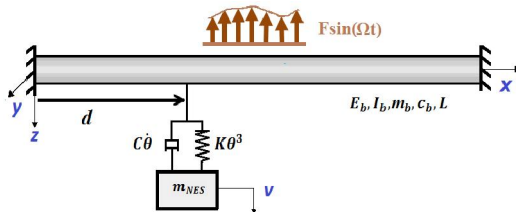
$$w_{xxx}(x,t) + \varepsilon c_p w_t(x,t) + w_{tt}(x,t) + \varepsilon \{ \alpha [w_t(d,t) - v_t(t)] + \beta [w(d,t) - v(t)]^3 \} \delta(x-d) = \varepsilon A \cos(\Omega t) \quad (۶)$$

$$\varepsilon v_{tt}(t) + \varepsilon \alpha [v_t(t) - w_t(d,t)] + \varepsilon \beta [v(t) - w(d,t)]^3 = 0 \quad (۷)$$

که پارامترهای ظاهر شده بدون بعد در روابط (۶) و (۷) با رابطه (۸) معرفی می‌شوند:

$$c_p = \frac{2m_b \xi_b \omega_b L^3 \sqrt{m_b}}{m_{NES} \lambda_1^2 \sqrt{E_b I_b}}, \quad \alpha = \frac{CL^2 \sqrt{m_b}}{\lambda_1^2 m_{NES} \sqrt{E_b I_b}},$$

$$\beta = \frac{KL^6 m_b}{\lambda_1^4 m_{NES} E_b I_b}, \quad A = \frac{FL^4 m_b}{\lambda_1^4 m_{NES} E_b I_b} \quad (۸)$$



شکل ۱- یک تیر دوسرگیردار تحت تحریک بار هارمونیک خارجی متصل به چاه غیرخطی انرژی

با استفاده از روش گالرکین می‌توان معادلات سیستم را که به صورت معادلات مشتق جزئی هستند، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد. از همین رو جابجایی عرضی تیر را می‌توان به صورت رابطه (۹) در نظر گرفت [۱۹]:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \times q_i(t) \quad (۹)$$

که در رابطه (۹)، $q_i(t)$ و $\psi_j(x)$ به ترتیب j -امین مختصات عمومی وابسته به زمان (نرمالایز شده) و مود j -ام مربوط به تیر دوسرگیردار (رابطه (۳)) هستند که دارای خاصیت تعامد

متصل است. در رابطه (۱) عبارت‌های اول، دوم و سوم به ترتیب سختی، میرایی و اینرسی سیستم اصلی را نشان می‌دهند و عبارت‌های سوم و چهارم نیز به ترتیب، نشان‌دهنده نیروی میرایی و سختی متمرکز از طرف جاذب غیرخطی بر سیستم اصلی است که با کمک تابع دلتای دیراک نمایش داده شده‌اند. سمت راست رابطه (۱) نیز، بیانگر نیروی هارمونیک خارجی است که در تمام طول تیر اعمال می‌شود. در روابط (۱) و (۲) اندیس x و t نیز به ترتیب، نشان‌دهنده مشتق مکانی و زمانی است. به کمک روش گالرکین^۱ و با شکل مود تیر دوسرگیردار، می‌توان معادلات زمان و مکان را از هم جدا کرد [۱۴]:

$$\psi_i(x) = \cosh(\lambda_i x) - \cos(\lambda_i x)$$

$$-\frac{\sin(\lambda_i l') + \sinh(\lambda_i l')}{\cos(\lambda_i l') + \cosh(\lambda_i l')} \{ \sinh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x) \} \quad (۳)$$

رابطه (۳) بیانگر شکل مدهای تیر دوسرگیردار است [۱۸] که برای مدهای مختلف، به ترتیب مقادیر $\lambda_1 l' = 4.73$ ، $\lambda_2 l' = 7.53$ و ... به عنوان مقادیر ویژه فرکانسی در نظر گرفته می‌شوند که این مقادیر نیز، از رابطه فرکانسی شناخته شده $\cosh(x) \cos(x) = 1$ استخراج می‌شوند. لازم به ذکر است که در مرجع [۱۸]، کارایی یک چاه غیرخطی انرژی بررسی شده است و به این نتیجه رسیده‌اند که اگر فرکانس‌های طبیعی سیستم به‌طور کافی مجزا و از هم دور باشند، سیستم را کلاً به صورت دو درجه آزادی می‌توان در نظر گرفت که شامل چاه غیرخطی انرژی و سیستم اصلی یک درجه آزادی منطبق بر فرکانس مورد نظر است. در این حالت با محاسبات انجام شده که در رابطه (۳) نشان داده شده است، سه فرکانس اول سیستم به‌اندازه کافی از یکدیگر جدا هستند. در محل رزونانس مود اول، فرکانس طبیعی اول برابر با $4/73$ است، فرکانس طبیعی دوم و سوم به ترتیب برابر با $7/53$ و $10/99$ هستند و به‌اندازه کافی از مود اول جدا هستند. بر این اساس برای تیر، مود اول که مهم‌ترین مود است، مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه پارامترهای بدون بعد زیر تعریف می‌شوند [۷]:

^۱ Galerkin Method

مختصات کنونی به مختصات مرکز جرم (یعنی $u(t) = q_1(t) + \varepsilon v(t)$) و جابه‌جائی نسبی (یعنی $w(t) = q_1(t) - v(t)$) انتقال داده خواهند شد. دلیل اصلی این تبدیل مختصات این است که برای بررسی کارایی جاذب، جابه‌جائی نسبی دارای اهمیت است و هر چه بیشتر باشد، نشان‌دهنده انتقال بهتر انرژی از سیستم اصلی به جاذب و نهایتاً از بین رفتن انرژی است. در روش متوسط‌گیری مختلط شونده، پاسخ سیستم به صورت مجموع چند پاسخ به‌دست می‌آید که فرکانس‌های غالب سیستم را شامل می‌شود. در اینجا برای هر دو جابه‌جایی تیر و جاذب، یک حرکت غالب که شامل حرکت با فرکانس تحریک خارجی است $(u(t) = u_1(t), w(t) = w_1(t))$ در نظر گرفته می‌شود. طبق این روش، پارامترهای مختلط رابطه (۱۴) تعریف خواهند شد:

$$\begin{aligned} \phi_1(t) e^{i\Omega t} &= \dot{u}_1(t) + i\Omega u_1(t) \\ \phi_2(t) e^{i\Omega t} &= \dot{w}_1(t) + i\Omega w_1(t) \end{aligned} \quad (14)$$

در این رابطه $e^{i\Omega t}$ مربوط به بخش سریع حرکت و فرکانس طبیعی سیستم است. $\phi(t)$ دامنه مختلط حرکت مرکز جرم سیستم و $\phi_2(t)$ دامنه حرکت نسبی سیستم را نشان می‌دهند. با قرار دادن رابطه (۱۴) در روابط (۱۲) و (۱۳)، رابطه حاکم بر رفتار قسمت کند حرکت، به‌دست می‌آید (روابط (۱۵) و (۱۶)) [۱۹]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi(t) + \{4\phi_2(t) \varepsilon \xi \Omega^3 \phi_{1d} - 4i\phi_2(t) \varepsilon \sigma \Omega^2 \\ + 4\phi_1(t) \xi \Omega^3 \phi_{1d} - 4A\varepsilon \phi_{1d} \Omega^3 - 4\phi_2(t) \alpha \varepsilon \Omega^3 \\ + 3i\phi_2(t) |\phi_2(t)|^2 \beta \varepsilon + 4\phi_2(t) \alpha \varepsilon \phi_{1d}^2 \Omega^3 - 4\phi_2(t) \alpha \Omega^3 \\ - 4A\Omega^3 \phi_{1d} + 4\phi_2(t) \alpha \Omega^3 \phi_{1d}^2 - 3i\phi_2(t) |\phi_2(t)|^2 \beta \phi_{1d}^2 \\ - 3i\phi_2(t) |\phi_2(t)|^2 \beta \varepsilon \phi_{1d}^2 - 4i\phi_1(t) \sigma \Omega^2 - 4i\phi_2(t) \Omega^4 \\ + 3i\phi_2(t) |\phi_2(t)|^2 \beta - 4i\phi_2(t) \varepsilon \sigma \Omega^2 - 4i\phi_2(t) \Omega^4 \\ + 3i\phi_2(t) |\phi_2(t)|^2 \beta + 4i\phi_1(t) \Omega^4\} / 8(1+\varepsilon) \Omega^3 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_2(t) + \{4\phi_2(t) \varepsilon^2 \xi \phi_{1d} \Omega^3 + 4\phi_2(t) \alpha \Omega^3 \\ + 4\phi_1(t) \varepsilon \xi \phi_{1d} \Omega^3 - 4\varepsilon^2 A \phi_{1d} \Omega^3 - 4i\phi_1(t) \Omega^4 \\ + 4\phi_2(t) \alpha \varepsilon^2 \phi_{1d}^2 \Omega^3 - 4A\varepsilon \phi_{1d} \Omega^3 + 4i\phi_2(t) \Omega^4 \\ + 4\phi_2(t) \alpha \varepsilon \phi_{1d}^2 \Omega^3 - 3i\phi_2(t) |\phi_2(t)|^2 \beta \\ - 4i\phi_2(t) \varepsilon^2 \sigma \Omega^2 - 3i\phi_2(t) |\phi_2(t)|^2 \beta \varepsilon \\ - 3i\phi_2(t) |\phi_2(t)|^2 \beta \varepsilon \phi_{1d}^2 - 3i\phi_2(t) |\phi_2(t)|^2 \beta \varepsilon^2 \phi_{1d}^2 \\ + 4\phi_2(t) \alpha \varepsilon \Omega^3 - 4i\phi_1(t) \varepsilon \sigma \Omega^2\} / 8(1+\varepsilon) \Omega^3 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

نیز می‌باشند (به‌عبارت دیگر $\int \psi_i \psi_j = \delta_{ij}$). با قرار دادن رابطه تقریبی (۹) در روابط (۶) و (۷) و انتگرال‌گیری روی کل طول تیر و در نظر گرفتن مود اول برای سیستم پیوسته اصلی و اعمال خواص تابع دلتای دیراک، روابط (۱۰) و (۱۱) به‌دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} m_{11}(q_1(t))_{ii} + k_{11}q_1(t) + \varepsilon \xi(q_1(t))_i \\ + \varepsilon \alpha \phi_1(d) \{\phi_1(d) \times (q_1(t))_i - v_i\} \\ + \varepsilon \beta \phi_1(d) \{\phi_1(d) \times q_1(t) - v\}^3 = \varepsilon A_i \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon v_{ii}(t) + \varepsilon \alpha [v_i(t) - \phi_1(d) \times (q_1(t))_i] \\ + \varepsilon \beta [v(t) - \phi_1(d) \times q_1(t)]^3 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ضرایب رابطه بالا در پیوست (الف) آورده شده‌اند. در روابط بالا عدم تقارن روابط کوپل شده، باعث پیچیده شدن روابط تحلیلی می‌شود. به همین دلیل و به منظور استخراج روابط متقارن، با در نظر گرفتن روابط $q'_1(t) = \phi_1(d) \times q_1(t)$ ، $\phi_1(d) = \phi_{1d}$ ، $m'_{11} = m_{11}/\phi_{1d}^2$ و $k'_{11} = k_{11}/\phi_{1d}^2$ می‌توان نوشت:

$$m'_{11}(q'_1(t))_{ii} + k'_{11}q'_1(t) + \frac{\varepsilon \xi}{\phi_{1d}}(q'_1(t))_i + \varepsilon \alpha \{(q'_1(t))_i - v_i\} + \varepsilon \beta \{q'_1(t) - v\}^3 = \varepsilon \frac{A}{\phi_{1d}} \cos(\Omega t) \quad (12)$$

$$\varepsilon v_{ii} + \varepsilon \alpha [v_i - (q'_1(t))_i] + \varepsilon \beta [v - q'_1(t)]^3 = 0 \quad (13)$$

که در روابط (۱۲) و (۱۳)، $q'_1(t)$ نشان‌دهنده اولین مختصه عمومی وابسته به زمان (نرمالایز شده) است، پارامتر ξ میرایی بدون بعد تیر و پارامترهای α و β به ترتیب، نشان‌دهنده میرایی و سختی بی‌بعد چاه غیرخطی انرژی هستند.

۳- روش متوسط‌گیری مختلط شونده

برای به‌دست آوردن رفتار پاسخ حالت پایدار سیستم کوپل شده جاذب و تیر، از روش متوسط‌گیری مختلط شونده استفاده شده است [۲۰]. با استفاده از این روش، دو بخش کند و تند حرکت از یکدیگر جدا می‌شوند. بخش تند مربوط به فرکانس طبیعی سیستم و بخش کند، مربوط به دامنه ارتعاشات تیر و جاذب است. با در نظر گرفتن نسبت جرمی کوچک جاذب به سیستم اصلی مطابق ادبیات فنی ($\varepsilon \ll 1$) و با توجه به این‌که رفتار سیستم حول فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار می‌گیرد ($k_{11} = m_{11}(\Omega^2 + \varepsilon \sigma)$)، روابط از

۴- تحلیل انشعابات

برای به دست آوردن نقاط سکون مشتقات زمانی را برابر صفر قرار داده و از رابطه (۱۶) استخراج و در رابطه (۱۷) قرار داده می‌شود. رابطه جبری حاکم بر تغییرات نقطه سکون جابجایی نسبی سیستم $(Z = |\phi_{2f}|^2)$ به دست می‌آید:

$$[9\beta^2(\phi_d^4\Omega^4 + \phi_d^2\epsilon^2\Omega^2 - 2\phi_d^2\sigma\Omega^2 + \sigma^2)Z^3 - 16\phi_d^2A^2\Omega^0 + [24\beta\Omega^4(-\phi_d^2\epsilon^2\Omega^2 + \phi_d^2\sigma\Omega^2 - \sigma^2)Z^2 + [16\Omega^4(\phi_d^4\alpha^2\Omega^4 + 2\phi_d^2\alpha\epsilon\Omega^4 + \phi_d^2\alpha^2\epsilon^2\Omega^2 + \phi_d^2\alpha^2\epsilon^2\Omega^2 - 2\phi_d^2\alpha^2\sigma\Omega^2 + \alpha^2\sigma^2 + \sigma^2\Omega^2)Z - 0]Z=0 \quad (17)$$

رابطه (۱۷) می‌تواند یک تا سه ریشه و بنا به پیوستگی معادلات درجه سوم، یک سری نقاط انشعاب زین اسبی و هاپف عام داشته باشد. انشعابات زین اسبی زمانی در سیستم رخ خواهند داد که علاوه بر برقرار بودن رابطه (۱۷)، مشتق این عبارت نیز، برابر با صفر شود [۲۰]. دامنه حالت ماندگار مرکز جرم سیستم نیز از رابطه (۱۸) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \phi_f = & [-3\phi_{2f}|\phi_{2f}|^2\alpha\epsilon^2\Omega^4\phi_d^2 - 3\phi_{2f}|\phi_{2f}|^2\alpha\epsilon\Omega^2\phi_d^2 \\ & + 3i\phi_{2f}|\phi_{2f}|^2\beta - 3\phi_{2f}|\phi_{2f}|^2\Omega^3\alpha - 4\phi_{1d}\phi_{2f}\epsilon^2\Omega^2 \\ & + 3i\phi_{2f}|\phi_{2f}|^2\beta\epsilon^2\phi_d^2 - 3\phi_{2f}|\phi_{2f}|^2\Omega^3\alpha\epsilon + 4\phi_{1d}A\epsilon^2\Omega^2 \\ & + 3i\phi_{2f}|\phi_{2f}|^2\beta\epsilon\phi_d^2 + 3i\phi_{2f}|\phi_{2f}|^2\beta\epsilon + 4i\phi_{2f}\epsilon^2\sigma\Omega^2 \\ & - 4i\phi_{2f}\Omega^4 + 4\phi_{1d}A\epsilon\Omega^3] / \{4\epsilon^2(\epsilon\phi_d\Omega - i\epsilon\sigma - i\Omega^2)\} \quad (18) \end{aligned}$$

با تعریف مقادیر اغتشاشی مختلط بسیار کوچک $\delta_1(t)$ و $\delta_2(t)$ حول نقاط سکون، رابطه (۱۹) به دست می‌آید [۱۹]:

$$\phi_1(t) = \phi_{10} + \delta_1(t), \quad \phi_2(t) = \phi_{20} + \delta_2(t) \quad (19)$$

با قرار دادن رابطه (۱۹) در روابط (۱۵) و (۱۶) و صرف نظر کردن از عبارات غیرخطی و نگه داشتن عبارات خطی نسبت به δ_i ، پایداری نقاط سکون بر اساس معادله مشخصه سیستم کوپل شده استخراج می‌شود (رابطه (۲۰)):

$$\mu^4 + \eta_1\mu^3 + \eta_2\mu^2 + \eta_3\mu + \eta_4 = 0 \quad (20)$$

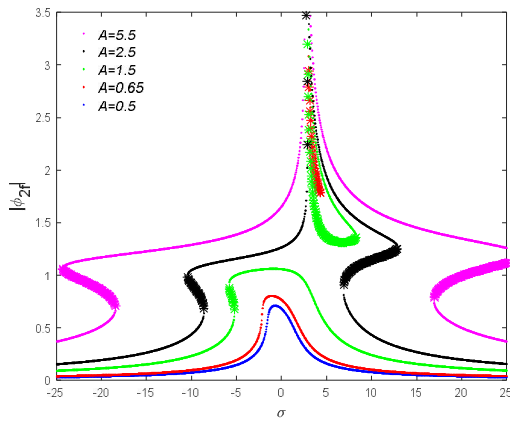
ضرایب رابطه (۲۰) در پیوست (ب) آورده شده‌اند. علاوه بر رابطه (۲۰)، دامنه نوسانات باید در رابطه (۱۷) صدق کند [۱۹]. برای انشعاب هاپف با جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی، شرط لازم برای رخداد انشعاب هاپف به دست خواهد آمد [۹]:

$$\eta_3^2 - \eta_2\eta_3\eta_1 + \eta_4\eta_1^2 = 0 \quad (21)$$

۵- بحث و نتایج

یک تیر دوسرگیردار با سطح مقطع دایروی با مشخصات هندسی و مادی $m_b=200\text{Kg/m}$, $L=10\text{m}$, $D=0.5\text{m}$ و $E_b=207\text{Gpa}$ و $C_b=30\text{N.s.m}^{-2}$ در نظر گرفته می‌شود. مقدار فنریته غیرخطی جاذب $\beta=1$ ، میرایی بی‌بعد تیر $\xi=0.02$ و مقدار فرکانس رزونانس مود اول نیز بر اساس رابطه (۱۲)، $\alpha_1 = \sqrt{k_{11}/m_{11}} = 1$ به دست خواهد آمد. به دلیل تقارن در شرایط تکیه‌گاهی، در مقاطع مختلف تیر از تکیه‌گاه تا وسط تیر، به بررسی شرایط کاری سیستم پرداخته می‌شود. در شکل ۲ براساس روابط (۱۷ و ۲۰)، نواحی رخداد زین اسبی و هاپف در صفحه نیرو-فرکانس به ازای موقعیت محل نصب جاذب در دو مکان مختلف نمایش داده شده است. برای مقادیر میرایی جاذب همان‌طور که در ادبیات فنی [۱۹] اشاره شده است، مقدار کمی در نظر گرفته می‌شود.

در این نمودارها با افزایش دامنه نیروی خارجی از مقدار صفر، به ازای دامنه آستانه A_{1SN} اولین نواحی باریک انشعابات زین اسبی در محدوده پارامتر میزان منفی رخ می‌دهد و به ازای حد آستانه A_{1H} ، اولین نواحی انشعاب هاپف رخ می‌دهد. از سوی دیگر به ازای مقدار نیروی A_{1DRC} ، اولین نواحی انشعاب زین اسبی در محدوده مثبت پارامتر میزان رخ می‌دهد که به ازای این دامنه تحریک خارجی، ناحیه منفصل فرکانسی نیز پدیدار می‌شود. لازم به ذکر است که بین این دو حد آستانه نیرویی (یعنی A_{1SN} و A_{1DRC}) که در نمودار با ناحیه آبی رنگ مشخص شده است، به‌عنوان محدوده بهینه کاری چاه غیرخطی انرژی شناخته شده است و همان‌طور که مشخص است، با نزدیک شدن محل نصب جاذب به تکیه‌گاه، این ناحیه کوچک‌تر می‌شود که نشان‌دهنده کاهش کارایی چاه غیرخطی انرژی است. در ادامه با افزایش دامنه نیروی تحریک خارجی، به ازای دامنه A_{2H} نواحی انشعاب هاپف به دو قسمت تقسیم می‌شود. در مجموع با افزایش نیرو ناحیه انشعابات رشد می‌کنند و به قسمت‌های مجزا تقسیم می‌شوند. با افزایش بیشتر دامنه نیروی خارجی و رسیدن به آستانه A_{2DRC} و A_{2SN} ، نواحی انشعاب زین اسبی ابتدا سه قسمت و سپس دو قسمت می‌شوند که حذف یک ناحیه انشعاب زین اسبی ناشی از اتصال ناحیه منفصل فرکانسی به نواحی پایدار با دامنه پایین است. در شکل ۲، امکان رخداد



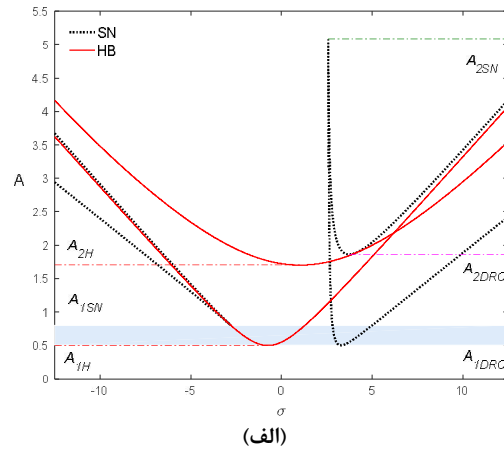
شکل ۳- پاسخ فرکانسی دامنه حرکت نسبی، $d=0.5$
 $\alpha=0.3$ (*: انشعاب زین اسبی)

مرکز جرم سیستم به ازای پارامترهای میزان مختلف، همراه با محدوده‌های رخداد انشعابات در شکل ۴ رسم شده است.

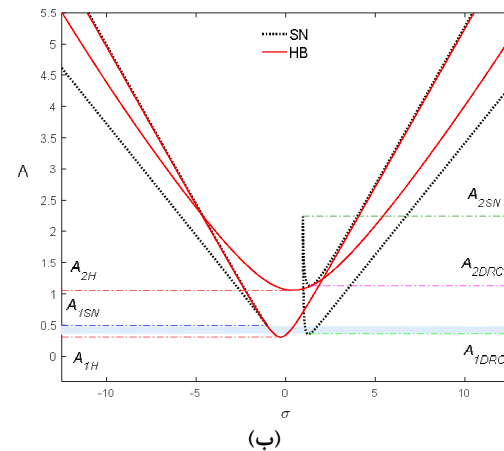
با افزایش نیروی خارجی محدوده انشعابات زین اسبی شروع به رشد می‌کنند و تقسیم به محدوده‌های کوچک‌تر می‌شوند که از هم دور می‌شوند؛ همچنین با بزرگ‌تر شدن $|\phi_{2f}|$ و کوچک‌تر شدن $|\phi_{1f}|$ به طور هم‌زمان، کارایی جاذب غیرخطی افزایش می‌یابد. مطابق شکل ۲، با نزدیک شدن موقعیت محل نصب جاذب به تکیه‌گاه‌ها، در دیاگرام‌های فرکانسی سیستم، محدوده نواحی انشعاب و نواحی نوسانی دامنه بالا کاهش می‌یابد. حل عددی نشان می‌دهد که با نزدیک شدن موقعیت محل نصب جاذب به تکیه‌گاه‌های تیر، در پاسخ زمانی، سیستم شاهد طولانی‌تر شدن مدت زمان پاسخ گذرا خواهد بود. برای توجیه فیزیکی این موضوع می‌توان گفت، زمانی که جاذب در تکیه‌گاه تیر قرار گرفته است و محدوده نوسانات تیر کوچک است، جاذب زمان طولانی‌تری نیاز دارد تا بتواند سیستم را به سمت رژیم حرکتی مطلوب ببرد. در تمام طول تیر با افزایش دامنه نیروی تحریک خارجی، مقدار دامنه ماندگار سیستم افزایش یافته، سپس ناحیه منفصل فرکانسی پدید می‌آید و به ناحیه نوسانی دامنه پایین متصل می‌شود. با نزدیک شدن موقعیت محل نصب جاذب به تکیه‌گاه‌ها، محدوده نواحی انشعابات و نواحی نوسانی دامنه بالا کاهش می‌یابد. به منظور اطمینان از صحت

ناحیه منفصل فرکانسی (زمانی که مشتق مقدار دامنه نسبت به فرکانس صفر شود) مشخص است.

با نزدیک شدن موقعیت محل نصب جاذب به تکیه‌گاه تیر، محدوده منفصل فرکانسی کوچک‌تر می‌شود. علاوه بر این محدوده‌های انشعاب هاپف و زین اسبی کوچک‌تر می‌شوند. براساس روابط (۱۷ و ۲۰)، شکل ۳ دامنه ماندگار حرکت نسبی سیستم را به ازای فرکانس‌های مختلف نیروی خارجی نشان می‌دهد. مطابق این شکل، با افزایش دامنه نیروی تحریک خارجی مقدار دامنه ماندگار سیستم افزایش می‌یابد و ناحیه منفصل فرکانسی پدید می‌آید و به ناحیه نوسانی دامنه پایین متصل می‌شود. برای بررسی دقیق‌تر رفتار سیستم و محدوده‌های پایداری آن، براساس رابطه (۱۷)، دامنه ماندگار

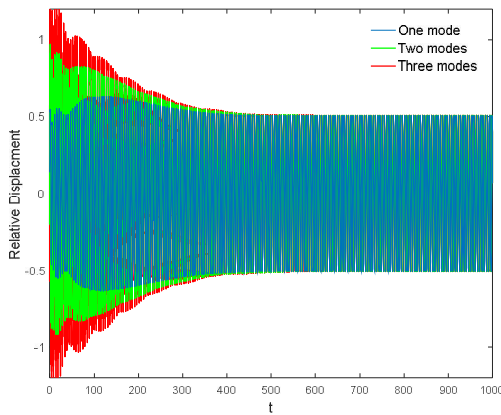


(الف)

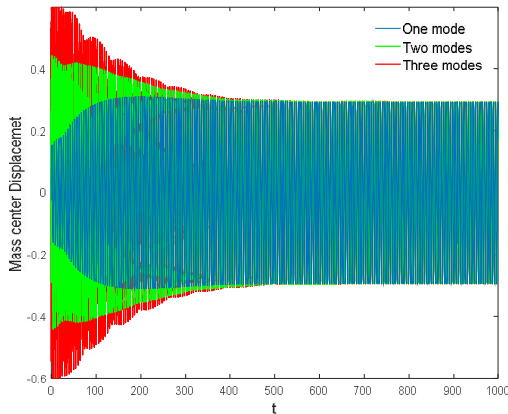


(ب)

شکل ۲- انشعابات هاپف و زین اسبی در محدوده A و σ به ازای الف) $d=0.5$ و ب) $d=0.27$



(الف)



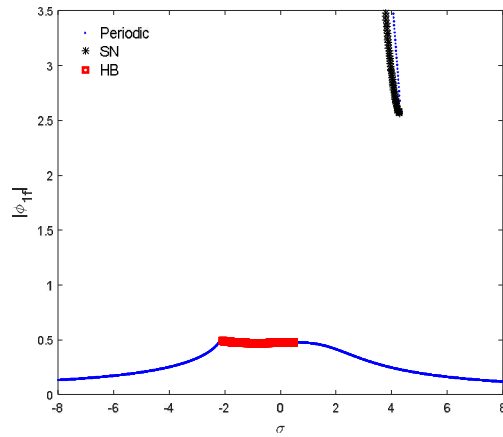
(ب)

شکل ۵- پاسخ نوسانی پایدار $A=0.65$, $\sigma=3$, $d=0.5$

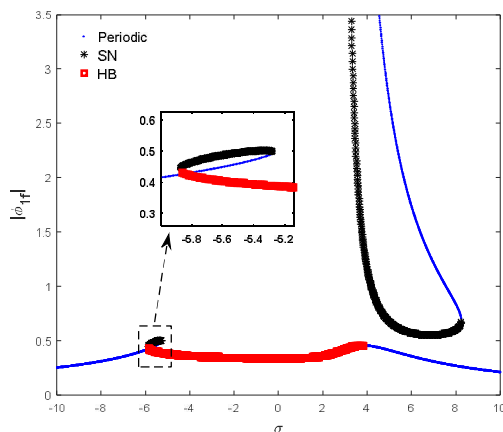
(الف) جابجایی نسبی و (ب) مرکز جرم

حل تحلیلی، پاسخ زمانی سیستم در دو نقطه کاری متفاوت، به ازای دو نوع پاسخ پایدار و ناپایدار، یعنی نوسانی ساده و پاسخ مدوله ضعیف (ناشی از انشعابات هاپف)، در شکل‌های ۵ و ۶ نمایش داده شده است که تطابق خوب حل تحلیلی و عددی را نشان می‌دهد (براساس روابط (۱) و (۲)).

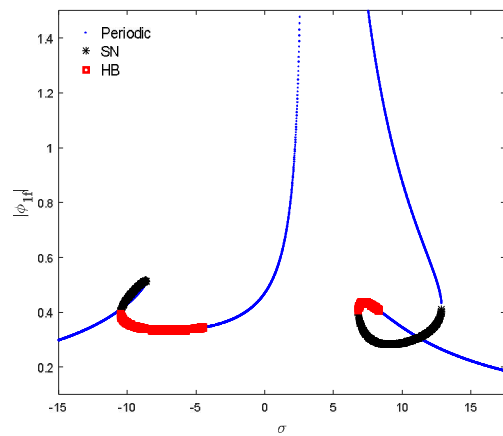
برای حالت پاسخ مدوله ضعیف، تشکیل یک حلقه بسته در نمودار پوانکاره نشان‌دهنده شبه‌متناوب بودن پاسخ سیستم است؛ همچنین طیف فرکانسی سیستم در این حالت نشان می‌دهد که سه قله اصلی در محدوده ضرایب فرد فرکانس تحریک خارجی وجود دارند. در ادبیات فنی نیز، این موضوع نشان داده شده است که اتصال چاه غیرخطی انرژی به سیستم‌های مختلف باعث پدید آمدن قله‌های فرکانسی در



(الف)



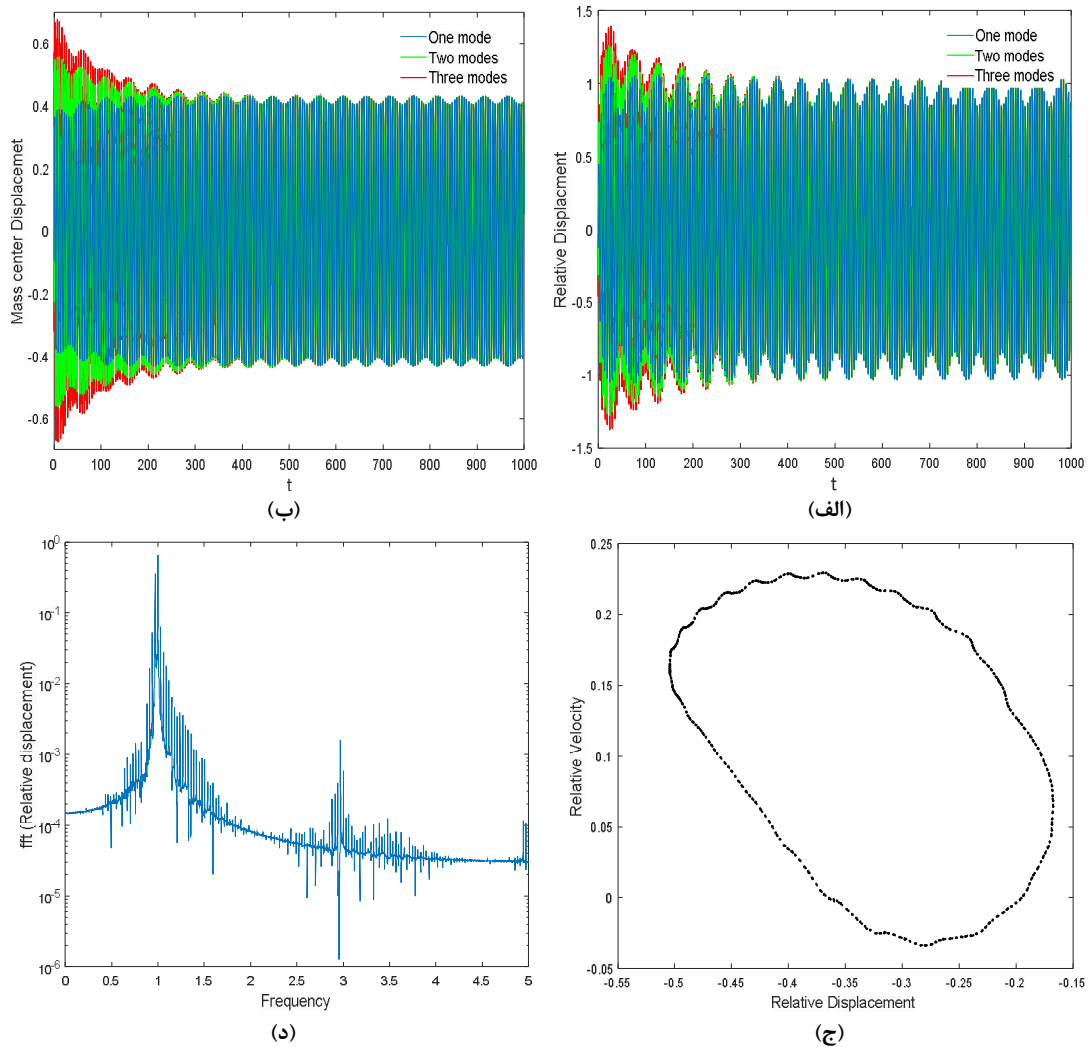
(ب)



(ج)

شکل ۴- پاسخ فرکانسی دامنه مرکز جرم سیستم $d=0.5$

$\alpha=0.3$ (الف) $A=0.65$ (ب) $A=1.5$ (ج) $A=2.5$

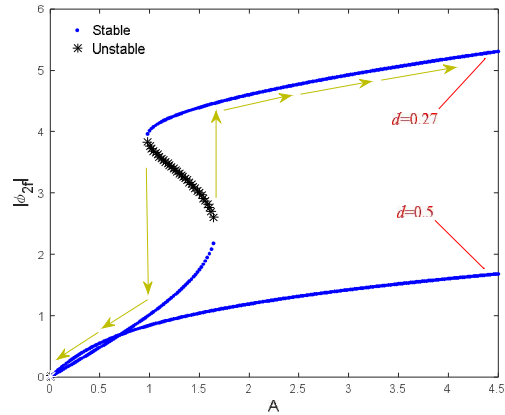


شکل ۶- پاسخ مدوله ضعیف $A=2.5$ ، $\sigma=-10$ ، $\delta=0.5$ ، (الف) جابجایی نسبی، (ب) مرکز جرم، (ج) پوانکاره و (د) FFT

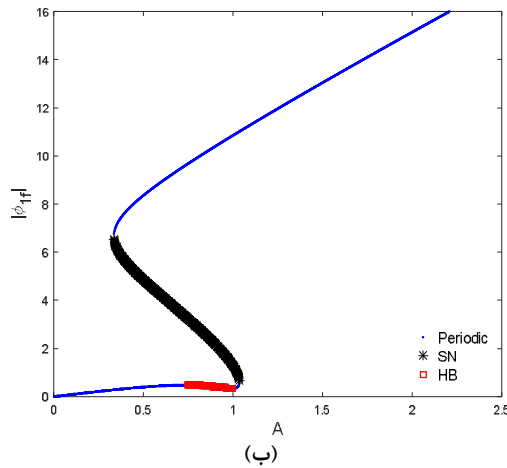
ماندگار جابجایی نسبی سیستم در شکل ۷ نمایش داده شده است (براساس رابطه (۱۷) و (۲۰)). در حالت نصب جاذب در وسط تیر، دامنه سیستم به آرامی و به صورت یکنواخت، با افزایش نیروی تحریک خارجی افزایش می‌یابد و به ازای هر مقدار دامنه نیروی تحریک خارجی، برای دامنه ماندگار سیستم، فقط یک مقدار مشخص وجود خواهد داشت و به ازای تغییرات نیروی خارجی در پاسخ سیستم پرش مشاهده نمی‌شود (انشعابات زین اسبی در این حالت رخ نمی‌دهد).

محدوده‌های مورد نظر می‌شود که بزرگ‌ترین قله مربوط به فرکانس اصلی سیستم خواهد بود [۲۰، ۲۱]. پاسخ‌های زمانی ارائه شده با یک، دو و سه مود گالرکین ترسیم شده‌اند و همان‌طور که مشخص است، در حالت ماندگار پاسخ سیستم با یک، دو یا سه مود یکسان است و فقط در پاسخ گذرا تفاوت وجود دارد. از آنجایی که در این پژوهش بررسی کارایی چاه غیرخطی انرژی در حالت ماندگار مدنظر است، مدل‌سازی سیستم با یک مود کافی و دقیق است. در ادامه برای بررسی رفتار سیستم، در دو مقطع متفاوت سیستم اثرات تغییرات نیروی خارجی بر دامنه

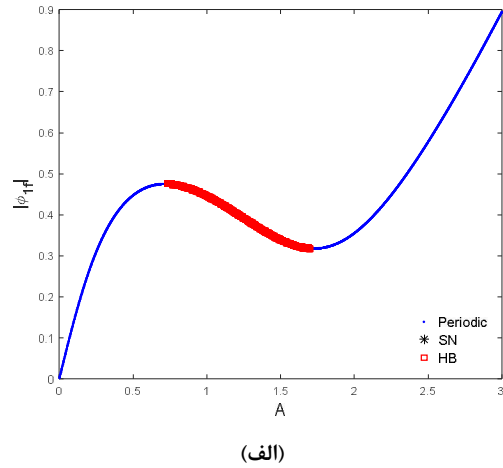
اما در حالتی که جاذب در نزدیکی تکیه‌گاه تیر نصب شود ($d=0.27$)، می‌توان استنباط کرد که مقادیر مختلف نیروهای خارجی، منجر به جواب‌های مختلف می‌شود و به ازای نیروهای مختلف که در آنها انشعابات زین اسبی رخ می‌دهد، سه جواب وجود دارد، اما سیستم در خارج از این منطقه تنها یک جواب پایدار با تغییرات یکنواخت دارد و در سیستم پرشی مشاهده نمی‌شود. در محدوده‌های رخداد انشعابات زین اسبی، جواب اول و سوم (پاسخ‌های دامنه بالا و پایین)، حرکت تناوبی پایدار دارند، اما جواب دوم سیستم در این ناحیه، بی‌ثبات و ناپایدار است. در مجموع با افزایش نیروی خارجی در امتداد شاخه پایین‌تر به انشعاب زین اسبی پایین‌تر، دامنه حالت ماندگار یک افزایش ناگهانی می‌یابد، یا



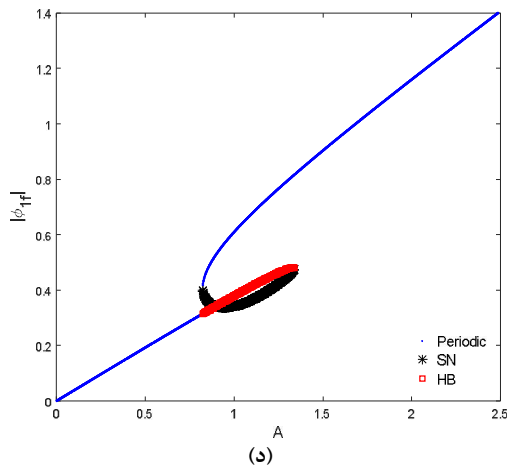
شکل ۷- دامنه حرکت نسبی تیر و جاذب برحسب نیروی خارجی $d=0.5$ و $\sigma=1$ (*: انشعاب زین اسبی)



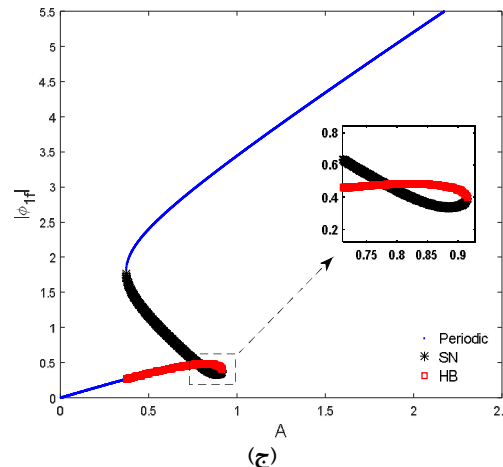
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۸- دامنه مرکز جرم سیستم برحسب نیروی خارجی $\sigma=1$ (الف $d=0.5$ (ب $d=0.25$ (ج $d=0.22$ (د $d=0.15$

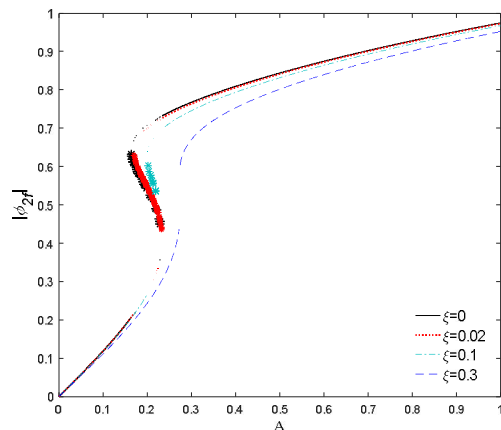
۷- نتیجه گیری

در این پژوهش اثر چاه غیرخطی انرژی روی کاهش ارتعاشات یک تیر دوسرگیردار که مدل ساده‌ای از سازه‌های دریایی است، تحت بررسی قرار گرفت. رفتار سیستم با نصب جاذب در محل‌های متفاوت در طول تیر بررسی شده است. برای بررسی رفتار سیستم ابتدا در نمودار نیرو برحسب فرکانس تحریک خارجی، محدوده‌های رخداد انشعابات هاپف، زین اسبی و آستانه‌های نیروها مورد بررسی قرار گرفته است و نقاط مناسب در این نواحی انتخاب شده است. نمودارهای جابجایی نسبی و مرکز جرم سیستم برحسب فرکانس تحریک خارجی رسم شده و محدوده‌های پایداری مشخص شده‌اند. سپس با رسم نمودارهای پاسخ زمانی، طیف فرکانسی و نمودار پوانکاره به بررسی نتایج روش عددی پرداخته شده است که نتایج نشان دهنده تطابق مناسب روش‌های تحلیلی و عددی بودند.

- با تنظیم صحیح پارامترها، جاذب قادر به حذف رژیم‌های تناوبی خطرناک در همسایگی مود تحریک می‌شود.
- افزایش نواحی منفصل فرکانسی منجر به افزایش کارایی جاذب می‌شود. چون با نزدیک شدن محل نصب جاذب به تکیه‌گاه، این نواحی کوچک‌تر می‌شوند، لذا کارایی جاذب نیز کاهش می‌یابد. این ویژگی یکی از فواید استفاده از چاه غیرخطی انرژی است که می‌توان با جابه‌جا کردن آن در طول تیر برای شرایط متفاوت استفاده کرد.
- با جابجا کردن محل نصب می‌توان در رفتار سیستم پدیده پرش را مشاهده کرد. هر چه جاذب به سمت ریشه تیر نزدیک شود، پاسخ گذرا طولانی‌تر می‌شود. از نظر مفهومی می‌توان گفت چون در ریشه تیر، دامنه ارتعاشات تیر کمتر است، جاذب فرصت بیشتری می‌خواهد تا با اثر متقابل، آن را به رژیم حرکتی نهایی برساند.
- اثر دقیق میرایی بر دامنه حالت ماندگار و محدوده‌های ناپایداری سیستم مورد مطالعه قرار گرفت و مشخص شد که میرایی باعث کاهش دامنه و حذف پرش‌ها خواهد شد.

به بیان ساده‌تر، هنگامی که نیرو افزایش بیشتری خواهد داشت، پرش ناگهانی از شاخه پایدار پایینی به شاخه پایدار فوقانی رخ می‌دهد و با حرکت بالعکس، دامنه جابجایی نسبی سیستم در امتداد شاخه پایدار فوقانی به آرامی کاهش می‌یابد تا به انشعاب زین اسبی بالایی می‌رسد که در آن پرش به شاخه پایدار کوچک‌تر را تجربه می‌کند؛ در نتیجه جارو کردن نیروی تحریک منجر به پدیده پرش و هیستریزس در پاسخ می‌شود. می‌توان گفت که این سیستم سه پاسخ نوسانی در منطقه زین اسبی دارد که تنها رسیدن به دو جواب آن ممکن است. دامنه حالت ماندگار مرکز جرم سیستم برحسب نیروی خارجی در مقاطع مختلف اتصال به تیر در شکل ۸ نمایش داده شده است. با نزدیک شدن جاذب به تکیه‌گاه‌های تیر احتمال رخداد پدیده پرش به‌واسطه افزایش نیروی خارجی افزایش می‌یابد (براساس روابط (۱۷) و (۲۰)).

در نهایت برای بررسی اثرات میرایی، دامنه حالت ماندگار سیستم اصلی به ازای افزایش نیروی تحریک خارجی در شکل ۹ رسم شده است (براساس روابط (۱۷) و (۲۰)). همان‌طور که مشخص است، با افزایش نیروی تحریک خارجی دامنه نوسانات سیستم افزایش می‌یابد. به ازای ضرایب بزرگ‌تر میرایی سیستم، دامنه مقدار کمتری دارد و حتی با افزایش این ضریب، محدوده ناپایداری‌های ناشی از انشعابات زین اسبی که با علامت ستاره نشان داده شده‌اند، کوچک‌تر خواهند شد که این نتیجه با ادبیات فنی مطابقت دارد [۱۸].



شکل ۹- دامنه حرکت نسبی برحسب نیروی خارجی
 $\sigma=1, d=0.15$ (*: انشعاب زین اسبی)

absorbers, Journal of Modeling in Engineering, 15(6): 5-25. (In Persian)

- [7] Rezaee M, Arab Maleki V (2018) Passive vibration control of fluid conveying pipes using dynamic vibration absorber. Amirkabir Journal of Mechanical Engineering. (In Persian)
- [8] Ebrahimi Mamaghani A, Hosseini R (2018) Mathematical modelling and Resonance analysis in impact oscillators. Amirkabir Journal of Mechanical Engineering. (In Persian)
- [9] Tumkur R, Domany E, Gendelman OV, Masud A, Bergman LA, Vakakis AF (2013) Reduced-order model for laminar vortex-induced vibration of a rigid circular cylinder with an internal nonlinear absorber. Commun Nonlinear Sci 18(3): 1916-1930.
- [10] Mamaghani AE, Khadem S, Bab S (2016) Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. Nonlinear Dynam 86(3):1761-1795.
- [11] Mamaghani AE, Khadem SE, Bab S, Pourkiaee SM (2018) Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment. Int J Mech Sci 138(2):427-447.
- [12] Guo C, M AL-Shudeifat, A, Vakakis AF, L Bergman A, McFarland DM, Yan J (2015). Vibration reduction in unbalanced hollow rotor systems with nonlinear energy sinks. Nonlinear Dynam 79(1): 527-538.
- [13] Samani FS, Pellicano F (2009) Vibration reduction on beams subjected to moving loads using linear and nonlinear dynamic absorbers. J Sound Vib 325(4): 742-754.
- [14] Georgiades F, A Vakakis F (2009) Passive targeted energy transfers and strong modal interactions in the dynamics of a plate with strongly nonlinear attachments. Int J Solids Struct 46(11): 2330-2353.
- [15] Georgiades F, A Vakakis F, Kerschen G (2007) Broadband passive targeted energy pumping from a linear dispersive rod to a lightweight essentially non-linear end attachment. Int J Nonlin Mech 42(5): 773-788.
- [16] Esfahani S, Khadem SE, Mamaghani AE (2019) Nonlinear vibration analysis of an electrostatic functionally graded nano-resonator with surface effects based on nonlocal strain gradient theory. Int J Mech Sci 151(5): 508-522.
- [17] Esfahani S, Khadem SE, Mamaghani AE (2018) Size-dependent nonlinear vibration of an electrostatic nanobeam actuator considering surface effects and inter-molecular interactions. Int J Mech Mater Des 1(10).
- [18] Hosseini R, Ebrahimi Mamaghani A, Nouri M (2017) An experimental investigation into width reduction effect on the efficiency of piezopolymer vibration energy harvester. Journal of Solid and Fluid Mechanics 7(3): 41-51. (In Persian)

بیوست (الف)

$$m_{11} = \int_0^1 \phi_1^2(x) dx, k_{11} = \int_0^1 \phi_1(x)(\phi_1(x))_{xxxx} dx,$$

$$\xi = \int_0^1 c_p \phi_1^2(x) dx, A = \int_0^1 A \phi_1(x) dx$$

بیوست (ب)

$$\eta_1 = \phi_{1d}^2 \alpha \varepsilon + \phi_{1d} \varepsilon \xi + \alpha$$

$$\eta_2 = \frac{1}{64\Omega^6} (16\phi_{1d}^4 \alpha^2 \varepsilon^2 \Omega^6 + 32\phi_{1d}^3 \alpha \varepsilon^2 \xi \Omega^6 + 16\phi_{1d}^2 \varepsilon^2 \xi^2 \Omega^6 + 32\phi_{1d}^2 \alpha^2 \varepsilon \Omega^6 + 16\Omega^8 + 16\alpha^2 \Omega^6 + 16\varepsilon^2 \sigma^2 \Omega^4 + 48\phi_{1d}^2 \beta \varepsilon^2 \sigma \Omega^2 \phi_{2f}^2 + 27\phi_{1d}^4 \beta^2 \varepsilon^2 \phi_{2f}^4 + 64\phi_{1d} \alpha \varepsilon \xi \Omega^6 + 54\phi_{1d}^2 \beta^2 \varepsilon \phi_{2f}^4 - 48\beta \Omega^4 \phi_{2f}^2 + 27\beta^2 \phi_{2f}^4)$$

$$\eta_3 = \frac{\varepsilon}{64\Omega^6} (16\phi_{1d}^3 \alpha^2 \varepsilon \xi \Omega^6 + 16\phi_{1d}^2 \alpha \varepsilon \xi^2 \Omega^6 + 27\phi_{1d}^3 \beta^2 \varepsilon \xi \phi_{2f}^4 + 16\phi_{1d}^2 \alpha \Omega^8 + 16\phi_{1d} \alpha^2 \xi \Omega^6 + 16\phi_{1d} \xi \Omega^8 - 48\phi_{1d} \beta \xi \Omega^4 \phi_{2f}^2 + 27\phi_{1d} \beta^2 \xi \phi_{2f}^4 + 16\alpha \varepsilon \sigma^2 \Omega^4)$$

$$\eta_4 = \frac{\varepsilon^2}{256\Omega^8} (16\phi_{1d}^4 \alpha^2 \Omega^{10} + 32\phi_{1d}^3 \alpha \xi \Omega^{10} + 27\phi_{1d}^4 \beta^2 \Omega^4 \phi_{2f}^4 + 16\phi_{1d}^2 \alpha^2 \xi^2 \Omega^8 + 16\sigma^2 \Omega^8 - 48\phi_{1d}^2 \beta \xi^2 \Omega^6 \phi_{2f}^2 + 48\phi_{1d}^2 \beta \sigma \Omega^4 \phi_{2f}^2 + 16\phi_{1d}^2 \xi^2 \Omega^6 - 32\phi_{1d}^2 \alpha^2 \sigma \Omega^8 + 27\phi_{1d}^2 \beta^2 \xi^2 \Omega^2 \phi_{2f}^4 + 16\alpha^2 \sigma^2 \Omega^6 - 54\phi_{1d}^2 \beta^2 \sigma \Omega^2 \phi_{2f}^4 - 48\beta \sigma^2 \Omega^4 \phi_{2f}^2 + 27\beta^2 \sigma^2 \phi_{2f}^4)$$

۸- مراجع

- [1] Mamaghani AE, Sarparast H (2018) Lateral vibration control of a beam subjected to the harmonic external load using a nonlinear energy sink. Journal of Modeling in Engineering 16(55): 31-31. (In Persian)
- [2] Luongo A, Zulli D (2012) Dynamic analysis of externally excited NES-controlled systems mixed Multiple Scale/Harmonic Balance algorithm. Nonlinear Dynam 70(3): 2049-2061.
- [3] Sigalov G, Gendelman O, Al-Shudeifat M (2012) Resonance captures and targeted energy transfers in an inertially-coupled rotational nonlinear energy sink. Nonlinear Dynam 69(4): 1693-1704.
- [4] Al-Shudeifat MA, Wierschem N, Quinn D, Vakakis AF (2013) Numerical and experimental investigation of a highly effective single-sided vibro-impact non-linear energy sink for shock mitigation. Int J Nonlin Mech 52(4): 96-109.
- [5] Ebrahimi Mamaghani A, Esameilzadeh Khadem S (2016) Vibration analysis of a beam under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. Modares Mechanical Engineering 16(9): 186-194. (In Persian)
- [6] Shakeri S, Sheykh Samani F (2017) Micro-milling self-excited vibrations reduction using vibration

- [20] Mamaghani AE, Zohoor H, Firoozbakhsh K, Hosseini R (2013) Dynamics of a running belowknee prosthesis compared to those of a normal subject. *Int J Solids Struct* 5(2): 152-160.
- [19] Mamaghani AE, Hosseini R, Shahgholi M, Sarparast H (2018) Free lateral vibration analysis of inhomogeneous beams under various boundary conditions, *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 8(3): 123-135. (In Persian)