



## بررسی تحلیلی و عددی ناپایداری جریان سیال در محیط متخلخل همراه با ملاحظه ترم فرشهیمیر

محمد رضا شاه نظری<sup>۱\*</sup> و ایمان ملکاء آشتیانی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دکترای مهندسی مکانیک، دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
<sup>۲</sup> دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
 مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۷/۱۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۰۹/۰۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱۴

### چکیده

جریان توسعه یافته سیال در کانال پر شده از محیط متخلخل، به عنوان یکی از مسائل کلاسیک در زمینه مکانیک سیالات شناخته می‌شود. مدل دارسی، برینکمن و برینکمن فورشهیمیر، از مدل‌های شناخته شده توصیف چنین جریان‌هایی است. معادله دارسی به عنوان پرکاربردترین معادله بر اساس تشریح نیروی اصطکاکی بین سیال و شبکه جامد متخلخل شکل گرفته است. در معادله برینکمن ترم ویسکوزیته، مشابه ترم لاپلاسیان در معادله ناویر استوکس به معادله دارسی اضافه می‌شود و در نهایت ترم فورشهیمیر، یک ترم دراج درجه دوم ناشی از تاثیر جامد بر سیال را بیان می‌کند.

در این مقاله ضمن ارائه یک تحلیل مجانبی برای ناپایداری خطی سیال در اعداد موج کوچک، با معرفی مجموعه توابع متعامد ویژه مسأله، مقادیر رینولدز و سرعت موج بحرانی به ازاء مقادیر مختلف عدد دارسی، همچنین تاثیر ضریب فورشهیمیر بر این مقادیر ارائه شده‌اند. مقایسه نتایج با نتایج سایر متخصصان، بیانگر دقت مناسب و کارایی روش ارائه شده است.

**کلمات کلیدی:** محیط متخلخل؛ برینکمن- فرشهیمیر؛ جریان توسعه یافته؛ ناپایداری جریان سیال.

## Analytical and Numerical Investigation of Fluid Flow Instability in Porous Media with the Forchheimer Coefficient Impact

M.R. Shahnazari<sup>1,\*</sup>, I. Maleka Ashtiani<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ph.D. Associate Professor, Mech. Eng., K.N. Toosi Univ. of Tech., Tehran, Iran

<sup>2</sup> Ph.D candidate., Mech. Eng., K.N. Toosi Univ. of Tech., Tehran, Iran

### Abstract

Analysis of developed fluid flow in a porous channel is one of the classical problems of fluid mechanics. The Darcy model, Brinkman and Brinkman Forchheimer are the most well-known models for describing such flows. Among those, Darcy equation is the most simple model which widely is used to describe the relation of frictional force between fluid and porous solid network. In Brinkman equation, the viscosity term -same to Laplacian term in the Navier Stokes equation- is added to the Darcy equation. Eventually, according to the solid effect on the fluid, Forschimmer term expresses a quadrature drag term.

This paper, presents an asymptotic analysis for linear fluid instability for small wave numbers by introducing set of orthogonal eigenfunctions and resulted critical Reynolds Numbers and critical wave velocities for different values of the Darcy number. Likewise the current paper, presents the effect of the Forchheimer coefficient on these values. Compared to results of other researchers, accuracy and efficiency of the proposed method is depicted.

**Keywords:** Porous Medium; Brinkman Forchheimer; Developed Flow; Fluid Instability.

## ۱- مقدمه

معادله داری پرکاربردترین معادله جهت بیان جریان سیال در محیط متخلخل است [۱]. با توجه به محدودیت‌های این روش به ویژه به منظور تصحیح تاثیر نیروی اصطکاک سیال با شبکه جامد محیط متخلخل، فورشهیمر معادله داری را بهبود بخشید. می‌توان گفت، عبارت افزوده شده در معادله فورشهیمر، سبب غیرخطی شدن معادله برینکمن می‌شود [۱].

مونات و همکاران [۲]، نشان دادند که تاثیر ترم اینرسی در جریان سیال در محیط متخلخل تحت شرایطی مهم خواهد بود. در مسائلی از قبیل، بازیابی چاه نفت که جریان نفت توسط بخار پرفشار هدایت می‌شود، هنگامی که گرادیان فشار بسیار زیاد باشد یا در حالت جریان سیال چگال، ترم اینرسی موثر خواهد بود.

سابرا مانیامو و رجا گوپال [۳]، جریان سیال پر فشار همراه با گرادیان فشار بالا را با در نظر گرفتن ویسکوزیته وابسته به فشار، مدل‌سازی و بررسی کردند. کانان و رجا گوپال [۴]، همچنین جریان سیال پر فشار روی یک صفحه شیب‌دار با گرادیان فشار زیاد ناشی از جاذبه را بررسی کردند و نتایج این بررسی، نشان‌گر گسترش لایه مرزی بود که در آن چرخش تمرکز یافته است. در هر دو بررسی، جریان پایا و به واسطه فرم ویژه فرض شده از ترم اینرسی صرف نظر شده است.

وفائی و کیم یک حل تحلیلی برای جریان آرام سیال درون یک کانال حاوی محیط متخلخل ارائه کردند [۵]. در این مدل فرض شده بود که لایه مرزی تا مرکز کانال گسترش نمی‌یابد. مقایسه این حل با حل عددی، نشان‌گر تطابق خوب نتایج است، البته در صورتی که عدد داری کوچکتر از یک باشد [۶]. دلیل این موضوع، افزایش ضخامت لایه‌مرزی مومنتومی به دلیل افزایش عدد داری است [۷].

نیلد و همکاران [۸]، یک پاسخ تحلیلی دیگر برای همان مسأله بدون بهره‌گیری از تقریب لایه‌مرزی ارائه نمودند. برخلاف پاسخ ارائه شده توسط کیم و وفائی، این پاسخ برای جریان با عدد داری بزرگ‌تر از یک کاربردی است و برای جریان‌های با عدد داری کوچکتر از یک به دلیل افزایش خطا در محاسبه انتگرال‌های عددی که مبنای

این پاسخ را تشکیل می‌دهد، از دقت مناسبی برخوردار نیست.

بررسی جریان آشفته در محیط‌های متخلخل نیز، از موضوعات مهم مورد بررسی توسط محققان در این حوزه شناخته می‌شود. اورامنکو و کوزنتسوف [۹]، با استفاده از روش RGM، یک مدل ماکروسکوپی آشفته برای سیال غیرقابل تراکم در محیط متخلخل پیشنهاد دادند.

اغلب مدل‌های ارائه شده، به صورت یک مدل  $k-\epsilon$  توسعه داده شده‌اند که جهت شبیه‌سازی ماکروسکوپی جریان آشفته در محیط متخلخل قابل استفاده خواهد بود. علیرغم مدل‌سازی ماکروسکوپی جریان آشفته، بررسی شرایط اتصالی از آرام به آشفته، کمتر مورد توجه قرار گرفته است [۱۰].

بررسی ناپایداری سیال در یک کانال با صفحات موازی توسط نیلد [۱۱] ارائه شد. وی با استفاده از تشابه بین جریان درون کانال و جریان در محیط متخلخل، این بررسی را ارائه نمود و معادله به کار رفته برای جریان سیال در کانال پر شده با محیط متخلخل، معادله برینکمن و جریان به صورت جریان ساخته شده MHD-هارتمن فلو-منظور شده بود.

آوارتانی و حمدان [۱۲]، پایداری جریان توسعه یافته سیال در محیط متخلخل و تاثیر شبکه متخلخل و اینرسی میکروسکوپی بر آن را مورد مطالعه قرار دادند. ماکینده [۱۳]، ناپایداری گذرا ناشی از اغتشاش کوچک در جریان سیال در یک کانال پر شده با محیط متخلخل را مورد بررسی قرار داد و برای پارامترهای بحرانی، پایداری برای محدوده وسیعی از پارامترهای شکلی محیط متخلخل به دست آورد.

در زمینه ناپایداری انگشتی جریان ویسکوز در محیط متخلخل ناشی از جایگزینی سیال ویسکوز با سیال دارای ویسکوزیته کمتر نیز، مطالعات زیادی صورت گرفته است که طیف وسیعی از آن‌ها معادله داری را به عنوان معادله اصلی برای شبیه‌سازی یا بررسی جابجایی سیال در نظر گرفته‌اند، از جمله آنها می‌توان به مقاله شاه نظری و همکاران [۱۴]، درمورد ناپایداری جریان سیال نیوتونی در محیط متخلخل همگن، پژوهش نورووی و شوقی [۱۵] شبیه‌سازی جابجایی جریان سیال غیرنیوتونی در محیط

که در آن:

$$x = \frac{x^*}{H}, v = \frac{v^*}{U}, t^* = \frac{U}{h}t, p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

و  $U$  سرعت مشخصه سیستم تعریف شده است.

همچنین  $Re = \rho UH/\mu$  و  $Da = \mu/\alpha H^2$  به ترتیب، عدد رینولدز و دارسی جریان هستند.

به منظور به دست آوردن معادله پایداری سیستم، مقادیر کوچک اغتشاشی به سرعت و فشار حل پایه جریان اضافه می‌شود:

$$u = \bar{u} + \hat{u}$$

$$p = \bar{p} + \hat{p} \quad (4)$$

با جایگذاری کمیات فوق در معادلات (۳) و با توجه به اینکه  $\bar{p}$  و  $\bar{u}$  حل پایه معادله (۳) می‌باشند، معادله کلی اغتشاشی را می‌توان به شکل رابطه (۵) نوشت:

$$DaRe \left[ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + (\hat{u} \cdot \nabla) \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \hat{u} + (\hat{u} \cdot \nabla) \hat{u} \right] = -DaRe \nabla \hat{u} + Da \nabla^2 \hat{u} - \hat{u} \quad \text{in } \Omega$$

$$\nabla \cdot \hat{u} = 0 \quad (5)$$

همراه با شرط مرزی:

$$\hat{u} = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (6)$$

که در اینجا  $\Gamma$  مرز سیستم است و شرط مرزی با توجه به شرط عدم لغزش بیان شده است. با در نظر گرفتن جریان یک بعدی در کانال پر شده از محیط متخلخل همگن معادله (۵) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$DaRe \left[ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + v' \frac{dU}{dy} + U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right] = -DaRe \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + Da \nabla^2 \hat{u} - \hat{u} \quad (1-7)$$

$$DaRe \left[ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right] = -DaRe \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + Da \nabla^2 \hat{v} - \hat{v} \quad (2-7)$$

در اینجا با توجه به قضیه اسکویرز، معادله اغتشاشی در دو بعد نوشته شده است و  $U(y)$  پروفایل سرعت توسعه یافته یک بعدی است. با در نظر گرفتن تنها مولفه ورتیسیته در راستای  $z$  که حاصل ضرب خارجی عملگر  $\nabla$  بر بردار اغتشاش سرعت  $\hat{u}$  حاصل می‌شود:

$$\hat{\omega} = \zeta \hat{k} = \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (8)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۱-۷) برحسب  $y$  و معادله

$$(2-7) \text{ برحسب } x \text{ و جایگذاری } \zeta \text{ به جای } \hat{v}_x - \hat{u}_y \text{ در}$$

ناهمسانگرد و همچنین کار کیهانی و همکاران [۱۶] که با استفاده از معادله دارسی به بررسی غیرخطی ناپایداری در یک سیال ویسکوالاستیک پرداخته‌اند.

رجاگوپال و همکاران [۱۶]، یک بررسی کلی در زمینه ناپایداری سیال در محیط متخلخل بر اساس معادله کلی برینکمن همراه با ملاحظه ترم اینرسی انجام دادند.

در این مقاله در تکمیل پژوهش اشاره شده رجاگوپال و همکاران، یک فرم بهبود یافته از معادله اور-سامرفلد<sup>۱</sup> بدست آمده و از آن برای بررسی ناپایداری سیال در محیط متخلخل، مورد استفاده قرار گرفته است. در معادله حاصل هر دو ترم، درآگ خطی (دارسی) و درجه دوم (فورشهیمر) در نظر گرفته شده است. در گام اول با استفاده از روش تحلیل اغتشاشی با پارامتر کوچک، ناپایداری خطی سیال در طول موج‌های بلند، بررسی و نتایج ارائه شده است. در ادامه ضمن معرفی یک روش تلفیقی مبتنی بر توابع متعامد بر حسب تابع وزنی حاصل از پاسخ معادله خطی، تاثیر هر دو ترم دارسی و فورشهیمر بر پارامترهای بحرانی پایداری سیال، بررسی و بصورت تحلیلی، مورد بحث قرار گرفته است.

## ۲- مدل سازی و فرمولاسیون

با در نظر گرفتن سیال ویسکوز غیرقابل تراکم در یک دامنه  $\Omega$  به ضخامت  $H$  از محیط متخلخل، معادله حاکم بر جریان را می‌توان به شکل معادلات (۱) و (۲) نمایش داد:

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + (u^* \cdot \nabla) u^* \right] = -\nabla p^* + \mu \nabla^2 u^* - \alpha u^* \quad (2)$$

$\alpha$  در اینجا برابر است با  $\mu/k$  و  $u^*$  بردار سرعت است و معادلات (۱) و (۲) به ترتیب، پیوستگی و معادله کلی جریان سیال در محیط متخلخل است که با فرض پایستار بودن نیروی حجمی ( $f = -\nabla \phi$ ) و  $P = p + \rho \phi$ ؛ بدین شکل ارائه شده است.

معادلات حاکم (۱) و (۲) را با معرفی متغیرهای بدون بعد می‌توان به شکل رابطه (۳) بازنویسی کرد:

$$DaRe \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] = -DaRe \nabla p + Da \nabla^2 u - u$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3)$$

<sup>۱</sup> Orr-Sommerfeld

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_0 + k\hat{\psi}_1 + k^2\hat{\psi}_2 + \dots$$

$$c^* = c_0 + kc_1 + k^2c_2 + \dots \quad (15)$$

همچنین با جایگذاری رابطه (۱۵) در معادله (۱۳) و مرتب کردن معادلات حاصل برحسب توان‌های  $k$  برای درجه  $k^0$  و  $k^1$  و  $k^2$  روابط (۱۶-۱۸) حاصل می‌شود:

$$(iDaRe c_0 + DaD^2 - 1)D^2\hat{\psi}_0 = 0 \quad (16)$$

$$(DaD^2 - 1 + iDaRe c_0)D^2\hat{\psi}_1 = iDaRe(UD^2\hat{\psi}_0 - \hat{U}\hat{\psi}_0) \quad (17)$$

$$(DaD^2 - 1 + iDaRe c_0)D^2\hat{\psi}_2 = iDaRe(-c_2D^2\hat{\psi}_0' - c_1D^2\hat{\psi}_1' + UD^2\hat{\psi}_1 - \hat{U}\hat{\psi}_1') \quad (18)$$

شرایط مرزی نیز برای هر سه معادله (۱۶) تا (۱۸) همچنان برابر رابطه (۱۹) است:

$$\hat{\psi}' = D\hat{\psi}' = 0 \quad \text{at } y = 0, 1 \quad (19)$$

حل معادله دیفرانسیل خطی (۱۶) به شکل رابطه (۲۰) قابل نمایش است:

$$\hat{\psi}(y) = a_0 + a_1y + a_2c^{\gamma y} + a_3e^{-\gamma y} \quad (20)$$

که در آن  $\gamma = \sqrt{(1 - iDaRe c_0)/Da}$  است. اعمال شرایط مرزی (۱۹)، منجر به یک دستگاه معادله همگن برحسب بردار مجهول  $\{a_i\}$  می‌شود.

از حل معادله مشخصه می‌توان نتیجه گرفت:

$$2\gamma(e^\gamma - 1)(e^{-\gamma} - 1) = 0 \quad (21)$$

و یا  $\gamma = 0$  که منجر به  $\hat{\psi}_0 = 0$  می‌گردد و همچنین:

$$c_0 = \frac{-i}{ReDa} \quad (22)$$

با اعمال  $\hat{\psi}_0 = 0$  و  $\gamma = 0$  در معادله (۱۷)، رابطه به صورت خود به خودی صادق خواهد بود. همچنین از معادله (۱۸) می‌توان نوشت:

$$(U - C_1)D^2\psi - \hat{U}\psi_1 = 0 \quad (23)$$

نیمرخ سرعت جریان برابر با رابطه (۲۴) است:

$$U(y) = \frac{\cosh\left(\frac{\tau}{2}\right) - \cosh\left(\tau\left(1 - \frac{y}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\frac{\tau}{2}\right)} \quad (24)$$

در آن  $\tau = Da\left(\frac{-1}{2}\right)$ . با قرار دادن (۲۴) در (۲۳) و حل این معادله،  $\hat{\psi}_1(y)$  را می‌توان با رابطه (۲۵) نمایش داد:

$$\hat{\psi}_1(y) = D \text{Airy}A_i\left[\frac{-a}{b^{\frac{2}{3}}}\right] + E \text{Airy}B_i\left[\frac{-a}{b^{\frac{2}{3}}}\right] \quad (25)$$

که در آن

$$a = \frac{\tau^2}{C_1}$$

$$b = \frac{(c-1)\tanh\left(\frac{\tau}{2}\right)\tau^3}{C_1} \quad (26)$$

معادله حاصل از تفاضل این دو رابطه و توجه به پیوستگی می‌توان معادله اغتشاشی را بر حسب  $\zeta$  به دست آورد:

$$DaRe \left[ \frac{\partial}{\partial t} \zeta + U(y) \frac{\partial}{\partial x} \zeta - \frac{d^2 U}{dy^2} \zeta \right] = -\zeta + Da \nabla^2 \zeta \quad (1-8)$$

$$DaRe \left[ \frac{\partial}{\partial t} \zeta + U(y) \frac{\partial}{\partial x} \zeta - \frac{d^2 U}{dy^2} \hat{v} \right] = -\zeta + Da \nabla^2 \zeta \quad (2-8)$$

از سوی دیگر با معرفی  $\hat{\psi}$  (تابع جریان اغتشاشی) و اینکه:

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} = -\hat{u}$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = -\hat{v} \quad (9)$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$\zeta = \nabla^2 \hat{\psi} \quad (10)$$

با جایگذاری لاپلاسین پاسخ جریان اغتشاشی به جای ورتیسیتی اغتشاش در معادله (۸)، می‌توان معادله (۱۱) را نتیجه گرفت:

$$DaRe \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \hat{\psi}) + U(y) \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \hat{\psi}) - \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right] = -\Delta \hat{\psi} + Da (\Delta \Delta \hat{\psi}) \quad (11)$$

و در نهایت با قرار دادن فرم موجی برای پاسخ جریان اغتشاشی  $\hat{\psi} = \hat{\psi} e^{i(kx - ct)}$  در معادله (۱۱) و صرف‌نظر کردن از درجات بالاتر اغتشاش، معادله‌ای برای بررسی پایداری خطی به شکل رابطه (۱۲) حاصل می‌شود:

$$DaRe \left[ (kU - c)(D^2 - k^2) - k \frac{d^2 U}{dy^2} \right] \hat{\psi} = [Da(D^2 - k^2) - 1](D^2 - k^2) \hat{\psi} \quad (12)$$

و با معرفی  $c = k\alpha$  و  $R = kRe$  داریم:

$$DaR \left[ (U - \alpha)(D^2 - k^2) - k \frac{d^2 U}{dy^2} \right] \hat{\psi} = [Da(D^2 - k^2) - 1](D^2 - k^2) \hat{\psi} \quad (13)$$

که همراه با شرایط مرزی زیر یک مسأله مقدار مرزی تشکیل خواهد داد:

$$\hat{\psi} = D\hat{\psi} = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (14)$$

### ۳- تحلیل و ارائه نتایج

#### ۳-۱- ناپایداری به ازای طول موج‌های بلند

در این بخش یک تحلیل پایداری برای شرایط خاص طول موج بلند یا عدد موج کوچک ( $\alpha$ ) انجام می‌گیرد. با در نظر گرفتن بسط تیلور  $\hat{\psi}$  و  $c^*$  برحسب عدد موج می‌توان نوشت:

مجموعه را نشان می‌دهد. ضابطه محاسبه این توابع به شکل رابطه (۲۷) است:

$$\int e^{-2kx} p_i(x) p_j(x) dx = \delta_{ij} \|p_i\|^2 \quad (27)$$

با در نظر گرفتن پاسخ معادله (۱۳) به فرم زیر:

$$\hat{\psi}(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i p_i(y) \quad (28)$$

و جایگذاری آن در معادله (۱۳) و قراردادن مانده برابر صفر به ازای  $N$  پاسخ  $p_N(y) = 0$  همراه با چهار شرط مرزی، دستگاه معادله همگن خطی زیر برحسب بردار مجهول  $X$  شامل  $N + 4$   $(a_0, a_1, a_2, a_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots)$  تشکیل می‌شود:

$$AX = 0 \quad (29)$$

در اینجا  $A$  یک ماتریس  $(N + 4) \times (N + 4)$  است. از حل  $|A| = 0$  می‌توان سرعت‌های موج بحرانی و در نتیجه مقادیر رینولدز بحرانی را به دست آورد.

معادله (۲۹) را می‌توان بفرم  $AX = cBX$  بازنویسی کرد. برای مقادیر ثابت عدد داری و رینولدز و حاصل ضرب ثابت فرشهیمر در عدد رینولدز، مقادیر سرعت موج به عنوان پاسخ‌های غیر بدیهی معادله همگن، از طریق محاسبه مقادیر مشخصه ماتریس  $A - B^{-1}A$  محاسبه می‌شود. از مجموع  $N+4$  مقادیر ویژه ماتریس، مقدار ویژه با بزرگ‌ترین بخش موهومی انتخاب شده است؛ همچنین از الگوریتم شناخته‌شده  $QZ$  به این منظور استفاده شده است و در نخستین گام ماتریس  $A$  به فرم هیسنبرگ و  $B$  به فرم بالا مثلثی تبدیل می‌شود.

جدول ۱ مقادیر رینولدز بحرانی را برحسب مقادیر مختلف عدد داری در مقایسه با نتایج تاکاشیما [۱۸] و آورانکو و همکاران [۱۹] نشان می‌دهد. نتایج نشانگر همخوانی مناسب با مقادیر رینولدز بحرانی ارائه شده توسط سایر محققان است.

### ۳-۳- تأثیر ترم فرشهیمر

افزودن ترم فرشهیمر به معادله بقای مومنتم (۲)، معادله برینکمن-فرشهیمر را برای جریان سیال نتیجه می‌دهد.

$$\rho[u_t^* + (u^* \cdot \nabla)u^*] = -\nabla p^* + \mu \nabla^2 u^* - \alpha u^* - \beta |u^*| u^* \quad (30)$$

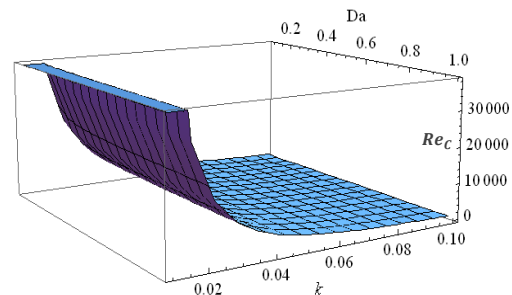
با اعمال شرایط مرزی و از حل معادله مشخصه می‌توان رابطه زیر را برای  $c_1$  به دست آورد:

$$c_1 = \frac{1}{120} (5\tau^2 + \tau^4 + \tau^2 \sqrt{-215 + 10\tau^2 + \tau^4}) + O(\tau^{10})$$

و در نتیجه با در نظر گرفتن  $c = c_r + ic_i$  داریم:

$$c_i = \left( \frac{-1}{DaRe} + k^2 \left( \frac{0.122}{Da} + \frac{.00284}{Da^2} \right) \right) + O(k^3)$$

به عبارت دیگر، برای عدد موج کوچک ناپایداری به ازاء اعداد رینولدز بزرگتر از  $\frac{10.25}{k^2 Da(1.252-0.029)}$  رخ خواهد داد. شکل ۱ مقادیر عدد رینولدز بحرانی را به ازاء مقادیر مختلف عدد داری و عدد موج نشان می‌دهد.



شکل ۱- مقادیر عدد رینولدز بحرانی به ازای مقادیر مختلف عدد داری و عدد موج برای شرایط خاص طول موج بلند

### ۳-۲- حل عمومی معادله ناپایداری خطی

به منظور حل معادله ناپایداری خطی (معادله (۱۳))، از روش WRM همراه با مجموعه جدید توابع متعامد استفاده شده است. می‌توان نشان داد که برای یک سیستم اپراتور دیفرانسیل خطی، استفاده از صفرهای چند جمله‌ای درجه بالاتر در روش کلوکیشن<sup>۱</sup>، این روش را هم ارز روش گالرکین<sup>۲</sup> می‌نماید.

مجموعه توابع متعامد به کار رفته در این مقاله با توجه به اپراتور دیفرانسیل به صورت کلی  $e^{-kx} p_i(x)$  که در آن  $i = 0, 1, \dots$  درجه چند جمله‌ای را نشان می‌دهد، محاسبه و انتخاب شده‌اند.

از روش گرام-اشمیت برای محاسبه این توابع متعامد استفاده شده است. جدول ۱ چند جمله‌ای اول این

<sup>۱</sup> Collocation Method

<sup>۲</sup> Galerkin Method

همچنین برای مقادیر مختلف عدد دارسی، رینولدز بحرانی با توجه به تاثیر ترم فرشهیمر در جدول ۲ ارائه شده است.

چنانچه از شکل ۱ مشهود است، تغییرات رینولدز بحرانی به ازای مقادیر کم عدد دارسی ناچیز است، تنها با افزایش مقادیر  $Re \times Cf$  به مقادیر بالاتر از ۱۰۰۰ با افزایش عدد دارسی، رینولدز بحرانی کاهش می‌یابد.

مقادیر عدد رینولدز بحرانی نشان می‌دهد که کاهش عدد دارسی و ضریب فرشهیمر، سبب افزایش آن می‌شود، به عبارت دیگر، جریان با اعداد دارسی کوچک‌تر و ضریب فرشهیمر بیشتر تا اعداد رینولدز بالاتری پایدار می‌ماند.

جدول ۲- مقادیر رینولدز بحرانی با توجه به تأثیر ضریب فرشهیمر در مقادیر دارسی مختلف

عدد رینولدز بحرانی				عدد دارسی
$Re \times Cf = 1000$	$Re \times Cf = 100$	$Re \times Cf = 10$	$Re \times Cf = 1$	
۱۳۷۷۵۶	۶۷۷۸۰	۵۸۴۹۰	۵۷۵۰۲	۰/۰۵
۱۱۹۷۵۰	۶۴۴۱۰	۵۷۳۴۰	۵۶۵۹۱	۰/۱
۱۰۰۶۹۵	۶۱۲۹۰	۵۶۴۳۵	۳۵۴۹۶	۰/۲۵
۷۹۹۷۰	۵۸۲۶۰	۵۵۷۸۰	۱۶۶۴۶	۱
۶۸۴۵	۵۶۷۹۷	۳۷۲۲۶	۵۸۵۲	۴

از سوی دیگر آهنگ تغییر رینولدزهای بحرانی به ازای اعداد دارسی بزرگ‌تر از یک در مقادیر خاصی از ضریب فرشهیمر کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، به ازای ضرایب فرشهیمر میانی، تاثیر عدد دارسی بر رینولدز بحرانی کاهش می‌یابد. این در حالی است که برای مقادیر ضریب فرشهیمر بسیار کوچک یا بسیار بزرگ، افزایش عدد دارسی باعث کاهش فوق‌العاده رینولدز بحرانی می‌شود.

با توجه به نتایج، کاهش عدد دارسی و یا افزایش ضریب فرشهیمر، سبب افزایش عدد رینولدز بحرانی می‌شود. بایستی توجه کرد که هر دو این پارامترها وابسته به میزان تخلخل هستند؛ ولی تاثیر عدد دارسی بر رینولدز بحرانی قوی‌تر است.

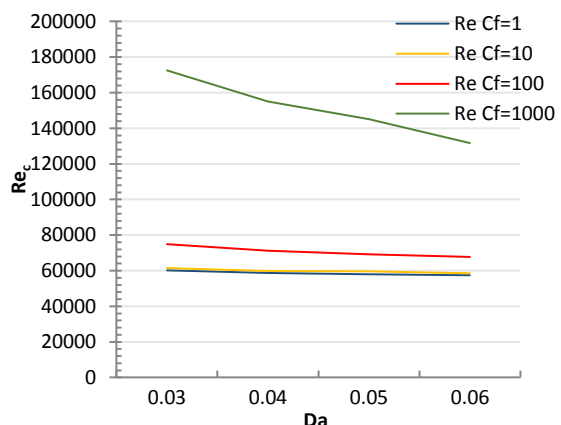
جدول ۱- مقادیر  $Re_c$  بر حسب مقادیر مختلف عدد دارسی

عدد دارسی	عدد رینولدز بحرانی		
	تاکاشیما [۱۸]	اورامکو [۱۹]	این مقاله
$4 \times 10^{-4}$	۲۴۱۵۵۵۰	۲۴۲۰۱۸۸	۲۴۱۵۶۵۰
$2/5 \times 10^{-3}$	۹۶۱۷۶۷	۹۶۲۱۲۷	۹۶۱۸۵۰
۰/۰۱	۴۳۰۸۱۸	۴۴۰۰۴۰	۴۳۱۷۸۹
۰/۰۴	۱۶۴۰۸۹	۱۶۴۰۹۵	۱۶۴۰۹۰
۰/۲۵	۲۸۶۰۳	۳۰۰۰۰	۲۸۵۹۶
۱	۱۰۰۱۶	۱۰۰۱۶	۱۰۰۱۷
۲	۶۷۰۶	۶۷۰۶	۶۷۰۵
$\infty$	۵۷۷۲	۵۷۷۴	۵۷۷۵

که در اینجا  $\beta$  برابر است با  $c_F/\sqrt{k}$  و  $c_F$  ضریب فرشهیمر است. در نهایت با جایگذاری  $\hat{\psi} = \hat{\psi} e^{i(kx - kat)}$  معادله ناپایداری خطی به شکل رابطه (۳۱) حاصل می‌شود.

$$ikRe \left[ (U - \alpha)(D^2 - k^2) - \frac{d^2 U}{dy^2} \right] \hat{\psi} = [D^2 - (2k^2 + \tau^2 + 2c_F Re \tau U)] D^2 \hat{\psi} + k^2 (k^2 + \tau^2 + c_F Re \tau U) \hat{\psi} - 2c_F Re \tau \frac{dU}{dy} D \hat{\psi} \quad (31)$$

با کاربرد مجدد پاسخ (۲۸) و جایگذاری آن در معادله (۳۱) همراه با شرط مرزی، می‌توان مقادیر جدید سرعت‌های بحرانی در نتیجه مقادیر رینولدز بحرانی را به دست آورد. شکل ۲ مقادیر رینولدز بحرانی را با توجه به تأثیر ضریب فرشهیمر در اعداد دارسی کوچک ارائه می‌کند.



شکل ۲- مقادیر رینولدز بحرانی با توجه به تأثیر ضریب فرشهیمر در مقادیر دارسی کوچک‌تر از یک

- law and the continuum theory of mixtures. Appl Math Model 3: 231-248.
- [3] Subramaniam SC, Rajagopal KR (2007) A note on the flow through porous solids at high pressures. Comput Math Appl 53: 260-275.
- [4] Kannan K, Rajagopal KR (2008) Flow through porous media due to high pressure gradients. Appl Math Comput 199: 748-759.
- [5] Vafai K, Kim SJ (1989) Forced convection in a channel with a porous medium: An exact solution. ASME J Heat Trans 111: 1103.
- [6] Vafai K, SJ Kim (1989) Forced convection in a channel with a porous medium: An exact solution. ASME J Heat Trans 111: 1103.
- [7] Vafai K, Kim SJ (1995) Forced convection in a porous channel with localized heat sources. ASME J Heat Trans 117: 1097.
- [8] Nield DA, Junqueira SLM, Lage JL (1996) Forced convection in a fluid-saturated porous-medium channel with isothermal or iso flux boundaries. J Fluid Mech 322: 201
- [9] Avramenko AA, Kuznetsov AV (2006) Renormalization group model of large-scale turbulence in porous media. Transp Porous Media 63(1): 175-193.
- [10] Masuka T, Takatsu Y (1996) Turbulence model for flow in porous media. Int J Heat Mass Trans 39: 2803.
- [11] Nield DA (2003) The stability of flow in a channel or duct occupied by a porous medium. Int J Heat Mass Trans 46: 4351.
- [12] Awartani MM, Hamdan MH (2005) Fully developed flow through a porous channel bounded by flat plates[J]. Appl Math Comput 169(2): 749-757.
- [13] Makinde OD (2009) On the Chebyshev collocation spectral approach to stability of fluid flow in a porous medium[J]. Int J Numer Methods Fluids 59(7): 791-799.
- [14] Shahnazari MR (2012) Instability analysis of miscible displacements in homogeneous porous media. Iranian Journal of Chemical Engineering 9(4).
- [15] Norouzi M, Shoghi MR (2015) Nonlinear simulation of non-Newtonian viscous fingering instability in anisotropic porous media. Modares Mechanical Engineering 15(7): 415-425. (In Persian)
- [16] Keyhani MH, Shokri H, Norouzi M (2016) Nonlinear simulation of viscoelastic fingering instability. Modares Mechanical Engineering 16(8): 47-54. (In Persian)
- [17] Hill AA, Rajagopal KR, Vergori L (2016) On the stability and uniqueness of the flow of a fluid through a porous medium. Math Phys (2016) 67.

جدول ۲ تاثیر شکل نیمرخ سرعت را بر پارامترهای بحرانی سیال نشان می‌دهد. برای پارامتر  $Re \times Cf$  برابر ۱ نیمرخ سرعت جریان پایه برای مقادیر عدد دارسی بین ۰/۱ تا ۴ به شدت تغییر می‌کند؛ این درحالی است که عدد رینولتز بحرانی به ازای این مقادیر دارسی، به سرعت با کاهش نرخ عدد دارسی افزایش می‌یابد. مشابه همین تاثیر برای پارامتر  $Re \times Cf$  برابر ۱۰ و برای اعداد دارسی بین ۱ تا ۴ رخ می‌دهد. در سایر مجموعه اعداد دارسی و حاصل ضرب ضریب فورشهیمر در عدد رینولتز، افزایش عدد رینولتز بحرانی نسبت به کاهش عدد دارسی، حساسیت کمتری دارد. این اتفاق ناشی از این است که تاثیر نیمرخ سرعت پایه بر عدد رینولتز بحرانی شاخص است. به همین دلیل در سایر محدوده‌ها غیر از محدوده‌های مورد اشاره، از این رو که نیمرخ سرعت پایه تغییرات مشهودی ندارد، نرخ افزایش عدد رینولتز بحرانی نیز کاهش می‌یابد.

#### ۴- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ضمن ارائه یک تحلیل مجانبی برای ناپایداری خطی سیال در اعداد موج کوچک، با معرفی مجموعه توابع متعامد ویژه مسأله، مقادیر رینولتز و سرعت موج بحرانی به ازای مقادیر مختلف عدد دارسی و همچنین تاثیر ضریب فورشهیمر بر این مقادیر ارائه شده‌اند. مقایسه این نتایج با نتایج سایر محققان، بیان‌گر دقت مناسب و کارایی روش ارائه شده است.

در این مقاله نشان داده شد که با وجود اینکه به ازای اعداد دارسی کوچک‌تر جریان پایدارتر می‌ماند، ولی به ازای ضرایب فورشهیمر بسیار بزرگ می‌تواند با رینولتزهای بحرانی کوچک‌تری ناپایدار گردد؛ همچنین برای اعداد دارسی بزرگتر از یک، تنها در مقادیر میانی ضریب فورشهیمر جریان به ازای محدوده وسیعی از اعداد رینولتز پایدار است.

#### ۵- مراجع

- [1] Brinkman HC (1947) On the permeability of the media consisting of closely packed porous particles. Appl Scientific Research A1 81-86.
- [2] Munaf D, Lee D, Wineman AS, Rajagopal KR (1993) A boundary value problem in groundwater motion analysis-comparisons based on Darcy's

[19] Avramenko AA, Kuznetsov AV, Basok BI, Blinov DG (2005) Investigation of stability of a laminar flow in a parallel-plate channel filled with a fluid saturated porous medium. *Phys Fluids* 17(9): 094102.

[18] Takashima M (1996) The stability of the modified plane Poiseuille flow in the presence of a transverse magnetic field. *Fluid Dyn Res* 17: 293.