مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۶/ دوره ۷/ شماره ۴/ صفحه ۳۵-۴۸

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2018.5409.2322

دانشگاه صنعتی شاهرود

# استخراج پاسخ دینامیکی غیرخطی اتصالات فلنجی تحت بارگذاری خمشی

**فرهاد میثمی[۱]، مجید معاونیان[۲،*] و عارف افشارفرد[۳]**

[۱] دانشجوی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد

[۲] دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد

[۳] استادیار، دانشگاه فردوسی مشهد

**مقاله مستقل،** تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۱/۲۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۰۶/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۰۵

## چکیده

اتصالات فلنجی از پرکاربرد ترین نوع اتصال سازه‌ای هستند. ازاین‌رو مطالعه رفتارهای استاتیکی و دینامیکی آن‌ها، از اهمیت زیادی برخوردار است. در این مقاله مدلی شامل، تیرهای متصل شده بوسیله اتصال فلنجی تک پیچ، مطالعه شده است. سپس مدل معادلی شامل فنرهای غیرخطی برای آن منظور شده است. با نوشتن معادلات تیرها و بکار گیری شرایط مرزی و سازگاری مناسب، معادلات دینامیکی مجموعه به‌دست‌آمده است. با فرض خطی بودن فنرهای معادل، فرکانس‌ها و شکل مودهای خمشی سیستم به ازای مقادیر مختلف سختی اتصال استخراج گردیده است. با به‌کارگیری روش جمع مودها، معادله یک درجه آزادی با سختی غیرخطی بدست می‌آید. به کمک روش برازش منحنی سختی غیرخطی با چندجمله‌ای معادل جایگزین شده است. با استفاده از روش‌های اغتشاشات، معادله غیرخطی به‌دست‌آمده حل و پاسخ نوسانات آزاد و اجباری در مجاورت فرکانس طبیعی پایه و رزونانس‌های سوپرهارمونیک و زیرهارمونیک به‌دست‌آمده است. در بخش نتایج حل عددی معادله دوخطی و معادله شامل چندجمله‌ای مفروض با حل تحلیلی-تقریبی روش‌های اغتشاشات، مقایسه شده است. مطابقت مشاهده شده بین نتایج در این مقایسه نشان از صحت تخمین چندجمله‌ای و حل تحلیلی-تقریبی آن دارد. در پایان مقایسه‌ای بین پاسخ فرکانسی به‌دست‌آمده به روش عددی و پاسخ به‌دست آمده از روش چندمقیاسی صورت گرفته است.

**کلمات کلیدی:** اتصال فلنجی؛ مدل تیر؛ سختی دوخطی؛ پاسخ دینامیکی؛ روش اغتشاشات.

# An Investigation for Nonlinear Dynamic Behavior of Flange Joints Under Lateral Loading

**F. Meisami[1], M. Moavenian[2,*], A. Afsharfard[3]**

[1] Ph.D. Student, Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran

[2] Assoc. Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran

[3] Asist. Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran

## Abstract

Flange joints are one of the most widely used industrial and aerospace connection parts. Therefore, investigating the static and dynamic behavior of these joints is important. In this study, a model consisting of two beams connected by a single bolt flange joint is intended. Then a mass-spring model consisting of linear axial and nonlinear torsional springs is considered. Dynamic equations of the system are derived considering the beam equations, boundary conditions and compatibility equations. Assuming equivalent linear springs, bending frequencies and mode shapes for several joint stiffness are obtained. Using mode superposition method and approximating the first mode, the dynamic equation is converted to a 1-DOF nonlinear stiffness equation. Curve approximation method is used to describe the nonlinear stiffness with equivalent polynomial equation. Then perturbation method is used to solve the nonlinear equation of free and forced vibrations, near natural frequencies, subharmonic and super harmonic regions. The numerical solution result of the bilinear and its equivalent polynomial equation is compared with the the perturbation method results. Accuracy of the results obtained by the polynomial approximation and perturbation solution is guaranteed by conformity of numerical and semi-analytical results. Finally, frequency response, which is obtained by the numerical and multiple scale methods is compared.

**Keywords:** Flange Joints; Beam Model; Bilinear Stiffness; Dynamic Response; Perturbation Method.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۵۱۳۸۸۰۸۰۵۵؛ فکس: ۰۵۱۳۸۸۰۷۱۸۵

آدرس پست الکترونیک: Moaven@um.ac.ir

## ۱- مقدمه

اتصالات فلنجی در زمره اتصالات پر کاربرد قرار گرفته و با استفاده از پیچ یا پرچ برای اتصال قطعات مختلف در صنایع یا سازه‌های زمینی، هوایی و دریای بکار می‌روند. این اتصالات عمدتاً در پیکربندی دایروی مشاهده می‌شود؛ اما پیکربندی هایی مانند مستطیلی نیز، کاربرد خاص خود را دارا است [۱]. از جمله مواردی که کاربرد این اتصالات را نشان می‌دهد، می‌توان به اتصال قسمت‌های بدنه هواپیما، برج‌های نیروگاه، مخازن موشک و پوسته موتور جت اشاره کرد [۲-۵].

در بسیاری از پژوهش‌های پیشین، رفتار این اتصال را صلب فرض کرده، سپس نسبت به حل مسئله اقدام شده است [۶]؛ این در حالی است که پژوهش‌های بعدی نشان دادند که این فرضیه تخمینی از انعطاف‌پذیری اتصال ارائه نمی‌دهد [۷]؛ اما یک بررسی دقیق‌تر نشان می‌دهد که بهتر است برای حل مسائل، اتصال را با سختی و میرایی معادل جایگزین کرد [۸]؛ لذا بایستی پیش از اقدام برای استخراج پاسخ‌های استاتیکی و دینامیکی سازه‌های دارای این نوع اتصال، نسبت به شناسایی پارامترهای معادل اقدام کرد. ازجمله اولین پژوهش‌ها در این حوزه، در سال ۱۹۸۵ توسط آگاتونوویچ به‌منظور ارائه مدلی بر پایه المان تیر برای اتصال فلنجی صورت گرفت [۹]. این مدل از یک عدد پیچ و لبه اتصال زیر آن تشکیل شده بود و که به‌وسیله روش اجزای محدود، مورد تحلیل قرار گرفته بود. وی با استفاده از نتایج این مدل، نسبت به بررسی تغییر شکل‌ها در یک فلنج مدور اقدام کرد. شای و همکاران در سال ۱۹۹۶، مدلی برای اتصال صفحه انتهایی[1] ارائه کردند که تغییر شکل آن را تحت گشتاور نشان می‌داد [۱۰]. آن‌ها اتصال با شش پیچ را به تعدادی اتصال تک‌پیچ تبدیل کرده، مدلی بر پایه المان تیر برای تغییر شکل‌های آن‌ها ارائه کردند. با متصل نمودن این اتصالات تک‌پیچ به یکدیگر، مدل مجموعه صفحه انتهایی به‌دست‌آمده است. سمکه و همکاران در سال ۲۰۰۲، پاسخ دینامیکی یک اتصال فلنجی دارای واشر لاستیکی را مورد مطالعه قرار دادند [۱۱و۱۲]. این مؤلفان در سال ۲۰۰۶، پژوهش جامع‌تری انجام داده، پاسخ ارتعاشی سیستم تحت تحریک ضربه را به‌صورت آزمایشگاهی و عددی بررسی کردند و درنهایت نشان داده شد که وجود واشر لاستیکی، تأثیر چندانی بر پاسخ سیستم ندارد [۱۳]. لوان و همکاران در سال ۲۰۱۲، رفتار دینامیکی غیرخطی اتصالات فلنجی را مورد مطالعه قرار دادند [۱۴]. آن‌ها همانند سایر پژوهشگران، اتصال فلنجی مدور را به تعدادی اتصال تک‌پیچ تقسیم کرده، رفتار اتصال ساده شده را بررسی نمودند. برای این منظور با انتخاب قسمتی از فلنج شامل، یک پیچ اتصال به‌صورت فنر غیرخطی ساده با رفتار متفاوت در کشش و فشار، رابطه‌ای تحلیلی بین نیروی کشش و میزان جابجایی در لبهٔ فلنج به دست آوردند. ماتن و پراسد در سال ۲۰۱۲، رفتار دینامیکی سیستم لولهٔ متصل به فلنج واشر دار را به‌صورت عددی و تحت دماهای مختلف بررسی کردند [۱۵]. برای این منظور، تحلیل مودال و هارمونیک روی مدل اجزاء محدود ترمو مکانیکی سیستم اجرا و پارامترهای تأثیرگذار روی نوسانات مورد بررسی قرار گرفت. نشان داده شد که دمای سیال داخلی با تغییر در تنش لوله، تأثیر مشخصی روی فرکانس‌های طبیعی مجموعه دارد. در سال ۲۰۱۳ شوینگزهکل و همکارانش، دینامیک غیرخطی اتصال فلنج و پیچ در موتور هواپیما را بررسی کردند[۱]. آن‌ها نشان دادند که بیشترین اتلاف انرژی در اتصالات فلنجی، در محل تماس پیچ و فلنج صورت می‌گیرد. وو و همکارانش در سال ۲۰۱۴، تغییر شکل یک فلنج تحت بارهای کششی، پیچشی و خمشی را، به کمک تحلیل اجزاء محدود، مطالعه کردند [۱۶]. این پژوهشگران بیان کردند که در یک مجموعه دارای اتصال فلنجی تحت بارگذاری، با وجود تغییر شکل‌های الاستیک و به دلیل تغییر در میزان سطح تماس بین دو لبه، رفتار غیرخطی مشاهده خواهد شد.

استخراج روشی تحلیلی جهت بررسی رفتار اتصالات پیچی، مورد علاقه محققان بوده است. با مطالعه پژوهش‌های مربوط به اتصالات تک‌پیچ مشاهده می‌شود که در اغلب موارد بررسی رفتار دینامیک در حوزه اتصالات لب بر لب[2] بوده، اتصالات فلنجی مورد توجه قرار نگرفته است [۱۷و۱۸]. روش پیشنهادی این مقاله، روندی نو در خصوص مدل‌سازی و استخراج پاسخ دینامیکی اتصال فلنجی ارائه می‌دهد. روند ارائه شده، امکان استخراج تحلیلی رفتار نوسانی عرضی

[1] End Plate

[2] Lap Joints

(فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها) و پاسخ دینامیکی تیرهای متصل به هم توسط اتصال فلنجی را فراهم می‌آورد. در دست داشتن یک حل تحلیلی از این جهت اهمیت دارد که اولاً دقیق‌ترین حل به شمار رفته، ثانیاً امکان مشاهده اثرات تغییر در پارامترهای مختلف را بوجود می‌آورد. جنبه کاربردی حل این سیستم نیز، بسیار با اهمیت بوده، امکان مطالعه رفتار تیرهای دارای فلنج و پیچ را با در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری اتصال فراهم می‌نماید.

در این پژوهش به‌منظور محاسبه پاسخ دینامیکی سیستم تیر و اتصال فلنجی تک‌پیچ، مدل معادلی شامل دو تیر ارائه شده است که توسط فنر طولی خطی و فنر پیچشی غیرخطی به یکدیگر متصل شده‌اند. نشان داده شده است که فنر پیچشی، رفتاری دوخطی از خود نشان می‌دهد. سپس با نوشتن معادلات تیر و قرار دادن شرایط مرزی مناسب، فرکانس‌ها و شکل مودهای خطی مجموعه به‌دست آمده است. با شکستن سیستم غیرخطی به دو سیستم خطی کوپل شده و بکار گیری شکل مودهای خطی به‌دست آمده، معادله دینامیکی غیرخطی مجموعه به شکل دوخطی استخراج شده است. با استفاده از تخمین چندجمله‌ای، معادله دوخطی با معادله سیستم دارای سختی غیرخطی توان دوم، معادل‌سازی شده است. این معادله با استفاده از روش‌های اغتشاشات حل و پاسخ آن با پاسخ عددی سیستم دوخطی مقایسه شده است.

## ۲- استخراج مدل غیرخطی

در اتصالات لب بر لب برخلاف اتصالات فلنجی، راستای پیچ عمود بر راستای تیرها قرارگرفته، به دلیل تقارن اتصال نسبت به راستای تیرها، رفتار اتصال در نوسانات عرضی کاملاً متقارن خواهد بود؛ اما در اتصالات فلنجی پیچ در راستای تیرها و در یک سمت آن‌ها قرارگرفته و اتصال نسبت به راستای تیرها نامتقارن است. این مسئله موجب غیرخطی شدن رفتار اتصال حین نوسانات عرضی خواهد شد. مقایسه تغییر شکل‌ها در اتصالات لب بر لب و فلنجی تحت نوسانات عرضی، در شکل ۱ نشان داده شده است.

### ۲-۱- مدل معادل اتصال

به‌منظور انجام تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی تیرهای متصل با اتصالات پیچی مختلف، اتصال را با سختی و میرایی معادل جایگزین می‌کنند. این مسئله در شکل ۲، برای اتصال فلنجی بین دو تیر نشان داده شده است. نحوه محاسبه سختی معادل اتصال، در پژوهش پیشین ارائه گردید [۱۹]. این مرجع شرح کاملی در خصوص مدل سازی اتصال فلنجی و استخراج سختی معادل ارائه داده و روشی تحلیلی جهت محاسبه سختی اتصال فلنجی برحسب هندسه، جنس و شرایط پیچ معرفی نموده است. مشاهده گردید که سختی اتصال در تغییر شکل‌های مثبت و منفی متفاوت بوده، مدل معادل از یک فنر پیچشی دوخطی به همراه یک فنر طولی خطی تشکیل خواهد شد. شروط مدل سازی اتصال فلنجی با فنرهای معادل طولی و خمشی عبارتند از:

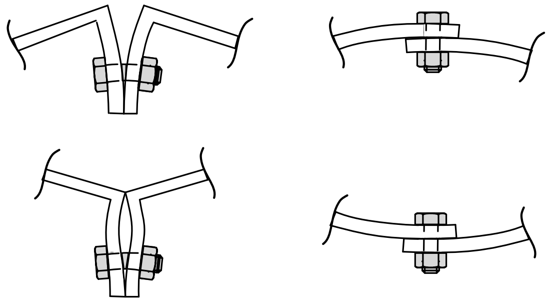
۱- باز و بسته شدن لبه‌های اتصال تحت بارگذاری، فقط به صورت غلتشی بوده و لبه‌های اتصال روی هم لغزش نداشته باشند.

۲- کلیه تغییر شکل‌ها در محدوده الاستیک قرار داشته، لذا فنر معادل و لبه‌های اتصال همگی رفتار خطی دارند. هرچند که رفتار اتصال خطی فرض شده است، اما تغییر در هندسه مسئله در بارگذاری مثبت و منفی، موجب غیرخطی (دوخطی) شدن آن می‌شود.

در این پژوهش هندسه و جنس اتصال همانند مرجع [۱۹] در نظر گرفته شده است؛ لذا مقادیر سختی بدست آمده، برابر با اعداد مرجع مذکور هستند.

همان‌طور که گفته شد، مدل معادل اتصال فلنجی شامل، فنر دوخطی[1] پیچشی و طولی خواهد بود. رفتار غیرخطی از نوع دوخطی، به علت عدم تقارن در تغییر شکل‌های اتصال به وجود می‌آید. در این مقاله از میرایی اتصال صرف‌نظر شده، اتصال تنها با فنرهای طولی و پیچشی معادل‌سازی می‌شود. عدم در نظر گرفتن میرایی برای اتصال برعکس اتصال لب بر لب به دلیل داشتن حرکت غلتش خالص در تغییر شکل‌های باز شدن و بسته شدن حین نوسانات عرضی مجموعه است. نحوه تغییر شکل اتصال برای دو حالت بارگذاری، در شکل ۱ ارائه شده است. در این مقاله به بارگذاری و تغییر شکل‌هایی که منجر به باز شدن و بسته شدن لبه‌های اتصال می‌شود به ترتیب، بارگذاری یا تغییر شکل مثبت و منفی گفته می‌شود. این نام‌گذاری برای راحت‌تر شدن اشاره به بارگذاری و تغییر شکل‌ها صورت گرفته است.

[1] Bilinear



**شکل ۱: مقایسه رفتار تغییر شکلی تحت بارهای خمشی مثبت و منفی در اتصال الف) لب بر لب و ب) فلنجی**

### ۲-۲- شکل مودها

در این بخش معادلات شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی با فرض خطی بودن سختی خمشی ($K_t$) استخراج می‌شود. آنگاه با قرار دادن دو مقدار سختی مثبت و منفی در معادلات، دو فرکانس طبیعی و شکل مود متفاوت استخراج می‌شود. سیستم تیر و اتصال پاسخ دینامیکی خطی قطعه‌ای خواهد داشت که رفتار آن در جابه‌جایی‌های مثبت و منفی به ترتیب از فرکانس‌ها و شکل مودهای مثبت و منفی پیروی می‌کند.

روند استخراج معادلات دینامیکی با نوشتن معادلات جداگانه تیر اولر برنولی به‌صورت رابطه ۱، برای تیرهای ۱ و ۲ شروع می‌شود. سپس شرایط مرزی و شرایط سازگاری مناسب روی آن‌ها اعمال خواهد شد.

$$E_1I_1\frac{\partial^4 y_1}{\partial x}+\rho_1A_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}=0$$
$$E_2I_2\frac{\partial^4 y_2}{\partial x}+\rho_2A_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}=0 \qquad (۱)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها و قرار دادن $y=Ye^{i\omega t}$، در رابطه ۱، ترم‌های وابسته به مکان از ترم‌های زمانی جدا شده، به‌صورت رابطه ۲ نشان داده شده است. پارامتر $\omega$ معرف، فرکانس طبیعی نوسانات عرضی است.

$$Y_1(x)=A_1sin\beta_1x+B_1cos\beta_1x+C_1sinh\beta_1x+D_1cosh\beta_1x$$
$$Y_2(x)=A_2sin\beta_2x+B_2cos\beta_2x+C_2sinh\beta_2x+D_2cosh\beta_2x \qquad (۲)$$

که مقادیر $\beta_1$ و $\beta_2$ در رابطه ۳ ارائه شده‌اند.

$$\beta_1^4=\frac{\rho_1A_1}{E_1I_1}\omega_b^2 \quad \beta_2^4=\frac{\rho_2A_2}{E_2I_2}\omega_b^2 \qquad (۳)$$

شرایط مرزی دو انتهای تیرهای ۱ و۲، به‌صورت آزاد در نظر گرفته شده است. برای حل معادلات نوسانات عرضی به تعداد ۸ شرط مرزی نیاز خواهد بود که در روابط ۴-۱ تا ۴-۸ ارائه شده‌اند. چهار شرط اول، مربوط به انتهای آزاد دو تیر بوده، چهار شرط بعدی مربوط به شرایط سازگاری در نقطه اتصال بین دو تیر است.

$$\langle 1\rangle:\ \frac{d^2Y_1}{dx^2}=0 \ \ at\ \ x=0 \qquad (۱-۴)$$

$$\langle 2\rangle:\ \frac{d^3Y_1}{dx^3}=0 \ \ at\ \ x=0 \qquad (۲-۴)$$

$$\langle 3\rangle:\ \frac{d^2Y_2}{dx^2}=0 \ \ at\ \ x=L_1+L_2 \qquad (۳-۴)$$

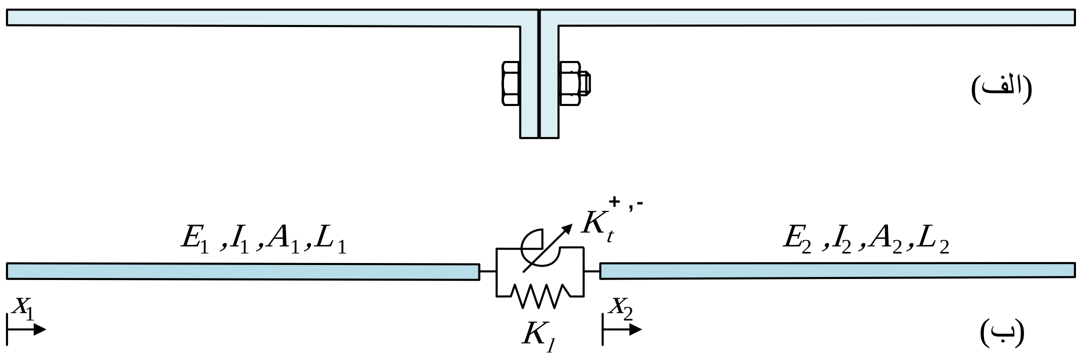
$$\langle 4\rangle:\ \frac{d^3Y_2}{dx^3}=0 \ \ at\ \ x=L_1+L_2 \qquad (۴-۴)$$

$$\langle 5\rangle:\ E_1I_1\left.\frac{d^3Y_1}{dx^3}\right|_{x=L_1}=K_l\left(Y_1|_{x=L_1}-Y_2|_{x=L_1}\right)-\frac{1}{2}M_f\omega_b^2Y_1|_{x=L_1} \qquad (۵-۴)$$

$$\langle 6\rangle:\ E_2I_2\left.\frac{d^3Y_2}{dx^3}\right|_{x=L_1}=K_l\left(Y_1|_{x=L_1}-Y_2|_{x=L_1}\right)+\frac{1}{2}M_f\omega_b^2Y_2|_{x=L_1} \qquad (۶-۴)$$

$$\langle 7\rangle:\ E_1I_1\left.\frac{d^2Y_1}{dx^2}\right|_{x=L_1}=K_t\left\{\left.\frac{d\,Y_2}{dx}\right|_{x=L_1}-\left.\frac{d\,Y_1}{dx}\right|_{x=L_1}\right\} \qquad (۷-۴)$$

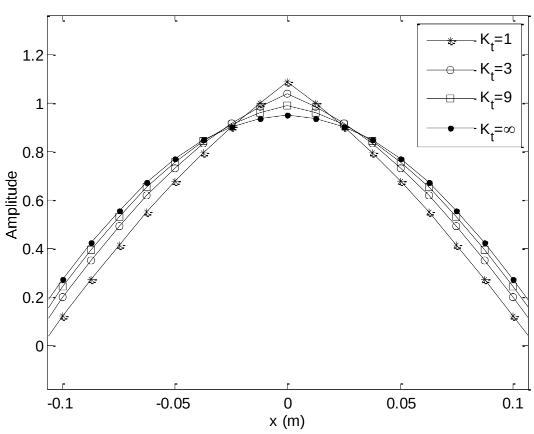
$$\langle 8\rangle:\ E_2I_2\left.\frac{d^2Y_2}{dx^2}\right|_{x=L_1}=K_t\left\{\left.\frac{d\,Y_2}{dx}\right|_{x=L_1}-\left.\frac{d\,Y_1}{dx}\right|_{x=L_1}\right\} \qquad (۸-۴)$$




**شکل ۲- الف) شماتیکی از دو تیر متصل شده توسط اتصال فلنجی تک‌پیچ و ب) مدل معادل**

با قرار دادن شرایط معرفی شده در رابطه ۴ در معادلات تیرها، تعداد ۸ معادله جداگانه به دست خواهد آمد. این معادلات تابع ضرایب مفروض $A_1$، $B_1$، $C_1$، $D_1$ و $A_2$، $B_2$، $C_2$، $D_2$ هستند. معادلات مربوطه پس از ساده‌سازی و مرتب کردن برحسب ضرایب مجهول، به‌صورت ماتریسی در پیوست۱ ارائه شده است.

به‌منظور استخراج فرکانس طبیعی لازم است، دترمینان ماتریس ضرایب برابر با صفر قرار داده شود. برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها، سیستم تیر و فنر معادل با مشخصات ارائه شده در جدول ۱، در نظر گرفته می‌شود. با قرار دادن مقادیر مفروض این جدول در معادله مقدار ویژه و صفر کردن دترمینان، فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم مجموعه به ازای مقادیر مختلف سختی اتصال به‌صورت جدول ۲ به دست می‌آید. سطر اول جدول، فرکانس‌های سیستم صلب را نشان می‌دهد. برای به دست آوردن فرکانس سیستم صلب، سختی اتصال به مقادیر زیاد میل داده شده است. به‌صورت تئوری در صورت میل کردن سختی به بی‌نهایت، شیب تیرها در محل اتصال کاملاً پیوسته شده و در صورت یکسان بودن مقطع و جنس دو تیر، فرکانس و شکل مود مجموعه، معادل تیری پیوسته به طول $L_1+L_2$ خواهد بود. شکل ۳، شکل مود اول خمشی مجموعه را به ازای مقادیر متفاوت در سختی خمشی اتصال ارائه می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با افزایش سختی خمشی، ناپیوستگی شیب در محل اتصال افزایش می‌یابد.




**شکل ۱- شکل مود اول خمشی به ازای مقادیر مختلف سختی خمشی فنر معادل (kN)**

**جدول ۱- مشخصات سیستم تیر و فنر مفروض معادل اتصال فلنجی**

| پارامتر | مقدار | پارامتر | مقدار |
|---|---|---|---|
| $L_1$ و $L_2$ | ۲۵۰ $(mm)$ | $M_f$ | ۰/۳ $(Kg)$ |
| $E_1$ و $E_2$ | ۲×۱۰$^{11}$ | $K_t^+$ | *۲/۵×۱۰$^{۳}$ |
| $I_1$ و $I_2$ | ۴۵۰ $(mm^4)$ | $K_t^-$ | *۳/۵×۱۰$^{۳}$ |
| $\rho_1$ و $\rho_2$ | ۷۸۰۰ $(Kg/m^3)$ | $K_l$ | *۵/۰×۱۰$^{۷}$ |

* مقادیر سختی با استفاده از روش مرجع [۱۹] و برای هندسه مشابه با آن مرجع بدست آمده‌اند.

**جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم عرضی سیستم دارای فلنج برحسب مقادیر مختلف سختی اتصال**

| سختی | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|---|---|---|---|
| $K_t\approx\infty$ | ۱۰۹/۳ | ۳۴۳/۷ | ۵۸۴/۸ |
| $K_t$=۹×۱۰$^{۳}$ | ۱۰۳/۱ | ۳۴۳/۷ | ۵۵۲/۶ |
| $K_t$=۳×۱۰$^{۳}$ | ۹۳/۳ | ۳۴۳/۷ | ۵۱۳/۰ |
| $K_t$=۱×۱۰$^{۳}$ | ۷۴/۸ | ۳۴۳/۷ | ۴۶۳/۵ |

## ۳- استخراج پاسخ دینامیکی

در بخش قبل فرکانس‌ها و شکل مودهای خطی، مجموعه تیر و اتصال تحت شرایط مختلف استخراج گردید. در این بخش با استفاده از شکل مودهای استخراج شده، تخمینی از جابه‌جایی مجموعه در نظر گرفته شده، معادلات دینامیکی مربوط به سیستم به دست می‌آیند. ازآنجایی‌که سختی اتصال در بارهای مثبت و منفی و به‌تبع آن شکل مودها متفاوت هستند، برای هرکدام از جابه‌جایی‌های مثبت و منفی، یک معادله دینامیکی استخراج می‌شود. با به‌کارگیری شرط دنبال کننده علامت جابه‌جایی، معادله نهایی به‌صورت قطعه‌ای خطی[1] به دست خواهد آمد. سپس معادلات به روش عددی دقیق و روش تحلیلی تقریبی اغتشاشات[2] ( با در نظر گرفتن تخمین مناسب) حل شده، پاسخ به دست می‌آید.

### ۳-۱- معادله دینامیکی یک درجه آزادی معادل

برای ساده‌سازی معادلات دینامیکی با بکارگیری روش جمع مودها، معادلات ساده‌تری استخراج می‌شود. برای این منظور، لازم است که جابه‌جایی‌های عرضی تیرهای ۱ و ۲ با

[1] Piecewise Linear
[2] Perturbation Method

جابه‌جایی‌های در نظر گرفته شده در رابطه ۵ جایگزین شود. در این تخمین، اثر مود اول به‌تنهایی در نظر گرفته شده، از اثرات مودهای بالاتر صرف‌نظر شده است. شکل مودهای عرضی تیرهای ۱ و۲ و مختصات عمومی در نظر گرفته شده به ترتیب، با $\Phi_1$، $\Phi_2$ و $q$ نشان داده شده‌اند. با توجه به تفاوت داشتن سختی اتصال در جابه‌جایی‌های مثبت و منفی، شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی خطی مثبت و منفی نیز متفاوت هستند.

$$\begin{aligned} y_1 &= q(t)\Phi_1(x) \\ y_2 &= q(t)\Phi_2(x) \end{aligned} \tag{۵}$$

نیروی تحریک سیستم به‌صورت تناوبی با دامنه $f_0$ و فرکانس $\Omega$، به‌صورت رابطه ۶ در نظر گرفته شده و در انتهای تیر شماره ۲ اعمال می‌شود.

$$f(t) = f_0 cos(\Omega t) \tag{۶}$$

با قرار دادن شکل مودهای مثبت و منفی در رابطه ۵ و جایگذاری آن‌ها در روابط ۷ و ۸، معادله دینامیکی یک درجه آزادی مشابه با رابطه ۹ برای سیستم استخراج می‌شود. پارامترهای $\omega_0^+$ و $\omega_0^-$ به ترتیب، معادل فرکانس‌های طبیعی نوسانات مثبت و منفی معرفی می‌شوند.

$$\begin{aligned} (\omega_0^+)^2 &= \frac{E_1 I_1 \int_0^{L_1} \left(\frac{d^2\Phi_1^+}{dx^2}\right)^2 dx + E_2 I_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left(\frac{d^2\Phi_2^+}{dx^2}\right)^2 dx}{\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} (\Phi_1^+)^2 dx + \rho_2 A_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} (\Phi_2^+)^2 dx} \\ (\omega_0^-)^2 &= \frac{E_1 I_1 \int_0^{L_1} \left(\frac{d^2\Phi_1^-}{dx^2}\right)^2 dx + E_2 I_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left(\frac{d^2\Phi_2^-}{dx^2}\right)^2 dx}{\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} (\Phi_1^-)^2 dx + \rho_2 A_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} (\Phi_1^+)^2 dx} \end{aligned} \tag{۷}$$

$$F_0 = \frac{f_0 \int_{L_1}^{L_1+L_2} \delta(x-L_2)\Phi_2^+ dx}{\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} (\Phi_1^+)^2 dx + \rho_2 A_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} (\Phi_2^+)^2 dx} \tag{۸}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{q} + S(q) = F(t) \\ &S(q) = \begin{cases} (\omega_0^+)^2 & q > 0 \\ (\omega_0^-)^2 & q < 0 \end{cases} \cdot q \end{aligned} \tag{۹}$$

که نیروی مود اول به‌صورت رابطه ۱۰ بازنویسی می‌شود.

$$F(t) = F_0 cos(\Omega t) \tag{۱۰}$$

همان‌طور که در رابطه ۹ مشاهده می‌شود، سیستم تیر و اتصال به سیستم یک درجه آزادی دارای سختی متغیر تبدیل شد. شکل ۴ نمودار تغییرات نیروی بازگرداننده[1] (S(q)) را برحسب مختصات عمومی (q) نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که ترم نیروی بازگرداننده نیز، همانند سختی اتصال ماهیت دوخطی دارد.

با توجه به فیزیک سیستم‌های یک درجه آزادی مشخص است که امکان ارتعاش سیستم با دو فرکانس طبیعی به‌صورت هم‌زمان وجود ندارد. سیستم مورد نظر، یک فرکانس طبیعی داشته که مطابق با رابطه ۱۱ با میانگین‌گیری از دوره تناوب قابل محاسبه است. با میانگین‌گیری، یک دوره تناوب برای سیستم کلی به‌دست آمده، بر اساس آن یک فرکانس طبیعی ($\omega_0$) استخراج می‌شود [۲۰].

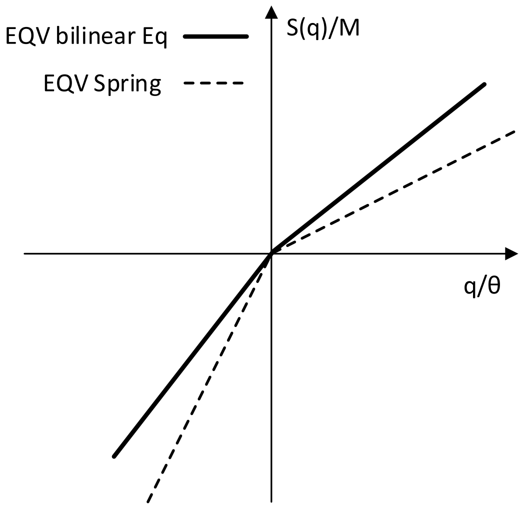
$$\begin{aligned} &T_0 = \frac{T_0^+ + T_0^-}{2} \Rightarrow \\ &2\pi\frac{1}{\omega_0} = 2\pi\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_0^+} + \frac{1}{\omega_0^-}\right) \end{aligned} \tag{۱۱}$$

پس از ساده‌سازی فرکانس طبیعی نوسانات نامیرای سیستم یک درجه آزادی معادل، به‌صورت رابطه ۱۲ استخراج می‌شود.

$$\omega_0 = \frac{2\omega_0^+\omega_0^-}{\omega_0^+ + \omega_0^-} \tag{۱۲}$$

برای سیستمی با مشخصات ارائه شده در جدول ۱، فرکانس‌های $\omega_0^+$، $\omega_0^-$ و فرکانس طبیعی پایه $(\omega_0)$ سیستم تیر-اتصال به ترتیب از روابط ۷ و ۱۲ محاسبه و در رابطه ۱۳ ارائه شده‌اند.

$$\begin{cases} \omega_0^+ = 535.7 \left(\frac{rad}{s}\right) \\ \omega_0^- = 627.7 \left(\frac{rad}{s}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad \omega_0 = 578.1 \left(\frac{rad}{s}\right) \tag{۱۳}$$




**شکل ۴- تغییرات دوخطی نیروی بازگرداننده و ممان خارجی اتصال به ترتیب برحسب تغییر در مختصات عمومی و زاویه دوران اتصال**

[1] Restoring Force

### ۳-۲- تخمین چندجمله‌ای سیستم دوخطی

ازآنجایی‌که S(q) تابعی پیوسته از مختصات عمومی q است، می‌توان چندجمله‌ای به دست آورد که تخمین مناسبی از نیروی بازگرداننده را ارائه دهد؛ لذا می‌توان ترم S(q) موجود در معادله مرتبه اول رابطه ۹ را با چندجمله‌ای P(q) جایگزین کرد (رابطه ۱۴).

تخمین چند جمله‌ای با تبدیل تابع ناپیوسته S(q) به حاصل جمع توان‌ها مختلف q امکان حل معادله توسط روش تحلیلی-تقریبی اغتشاشات را فراهم می‌کند.

$$\ddot{q} + P(q) = F(t) \qquad (۱۴)$$

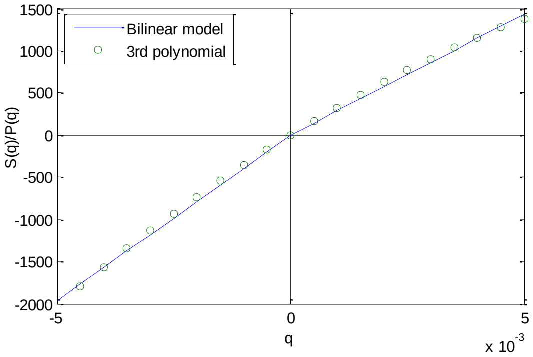
که؛ $P(q) = p_1 q + p_2 q^2 + p_3 q^3 + \cdots$

ترم $p_1$ نشان‌دهنده قسمت خطی و ترم‌های با توان بالاتر، مربوط به قسمت غیرخطی چندجمله‌ای هستند. برای نوسانگر دوخطی ارائه شده در رابطه ۹، مقدار ضرایب چندجمله‌ای معادل با بکارگیری روش برازش منحنی به‌صورت رابطه ۱۶ به دست می‌آید. از اثر ترم‌های با توان‌های بالاتر صرف‌نظر شده است. قابل توجه است که ترم‌های به‌جز $p_1$ یعنی، $p_2$ و $p_3$ به بازه در نظر گرفته شده برای q حین فرایند برازش منحنی وابسته هستند. در مورد معادله ۱۵، این بازه $۱۰^{-۳}$×(۵+،۵-) در نظر گرفته شده است. شکل ۶، مقایسه‌ای از نیروی بازگرداننده سیستم دوخطی و مدل چندجمله‌ای برازش شده را نشان می‌دهد (تخمین ۲۱ نقطه‌ای). همان‌طور که مشاهده می‌شود، مطابقت خوب بین دو منحنی وجود داشته و میانگین مربعات خطا بین آن‌ها کمتر از ۳ درصد باقی‌مانده است.

$$p_1 = 3.405 \times 10^5$$
$$p_2 = -3.29 \times 10^7 \qquad (۱۵)$$
$$p_3 = 0.00$$

قابل توجه است که سیستم‌های دوخطی رفتار غیرخطی غالب خود را به‌صورت توان‌های زوج جابه‌جایی نشان می‌دهند؛ به همین دلیل است که در تخمین چند جمله‌ای مرتبه سوم ضریب ترم توان سوم، تقریباً صفر ($p_3 \approx 0$) شده است [۲۰]. در این پژوهش از اثر مرتبه‌های زوج بالاتر صرف نظر شده، معادلات تا مرتبه دوم در نظر گرفته شده‌اند. ترم $p_1$ بیانگر، توان دوم فرکانس طبیعی سیستم خطی ($\omega_L^2$) است. می‌توان نشان داد که فرکانس طبیعی خطی، تخمین مناسبی از فرکانس طبیعی اصلی سیستم غیرخطی ($\omega_0^2$) را ارائه می‌دهد [۲۰]. از این رو معادله ۱۴ را می‌توان به‌صورت رابطه ۱۶ بازنویسی کرد. پارامتر α در رابطه ۱۶، معرف ضریب ترم غیرخطی بوده، در سیستم‌های دوخطی مورد بررسی در این پژوهش به علت کمتر بودن سختی مثبت از منفی، عددی منفی خواهد بود. برای سیستم مورد بررسی در این بخش با توجه به رابطه ۱۵، پارامتر α برابر با ۹۶/۷- است.

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \alpha\omega_0^2 q^2 = F(t) \qquad (۱۶)$$




**شکل ۵- نمودار نیرو-تغییر شکل برای تابع دوخطی و تابع درجه سوم برازش شده**

### ۳-۳- حل تحلیلی-تقریبی

معادله غیرخطی جابجایی مربوط به تخمین درجه دوم که در رابطه ۱۶ به دست آمد، با اضافه کردن میرایی در رابطه ۱۷ نشان داده شده است. در این بخش با به‌کارگیری روش اغتشاشات حل تحلیلی-تقریبی معادله فوق محاسبه می‌شود. برای استخراج پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری به ترتیب روش‌های لیندشتد پوانکاره[۱] و چند مقیاسی،[۲] مورد استفاده قرار گرفته است.

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q + \alpha\omega_0^2 q^2 = 0 \qquad (۱۷)$$

#### ۳-۳-۱- حل ارتعاشات آزاد

ابتدا با در نظر گرفتن $F(t) = 0$، $q = z\Delta$، و $\tau = \omega t$ معادله یک درجه آزادی ۱۷ به فرم بدون بعد تبدیل می‌شود. پارامتر Δ، به‌عنوان خیز استاتیک در نظر گرفته شده به‌صورت $\Delta = g/\omega_0^2$ تعریف می‌شود. با جایگذاری پارامترها و انجام ساده‌سازی، معادله بی‌بعد به‌صورت رابطه ۱۸ بازنویسی می‌شود.

---
[۱] Lindstedt–Poincaré Method (LPM)
[۲] Method of Multiple Scales (MMS)

$$\omega^2\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2}+2\varepsilon\mu\omega_0\omega\frac{\partial z}{\partial \tau}+\omega_0^2 z+\varepsilon\alpha\omega_0^2 z^2=0 \quad (۱۸)$$

که: $\varepsilon=\Delta$ و $\mu=\xi/\varepsilon$

در تئوری اغتشاشات ε پارامتری کوچک فرض می‌شود. برای سیستم مفروض در رابطه ۱۵ $\varepsilon=۳/۴\times۱۰^{-۴}$ است. در استفاده از روش پوانکاره، فرکانس نوسانات و متغیر مختصات عمومی مطابق با رابطه ۱۹، به‌صورت حاصل جمع ضرایب ε نوشته می‌شود.

$$\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots \quad (۱-۱۹)$$

$$z=z_0+\varepsilon z_1+\ \varepsilon^2 z_2+\cdots \quad (۲-۱۹)$$

پس از جایگذاری از رابطه ۱۹ در رابطه ۱۸ و مرتب‌سازی معادلات برحسب مرتبه ε، روابط ۲۰ به دست می‌آیند. لازم به ذکر است که معادلات تا مرتبه اول ε نوشته شده و از اثر مراتب بالاتر صرف‌نظر شده است.

$$O(\varepsilon^0)\ \rightarrow\ z_0''+z_0=0 \quad (۱-۲۰)$$

$$O(\varepsilon^1)\ \rightarrow\ z_1''+z_1=-2\frac{\omega_1}{\omega_0}z_0''-2\mu z_0'-\alpha z_0^2 \quad (۲-۲۰)$$

حل معادله ۱-۲۰ به‌صورت رابطه ۲۱ به دست می‌آید.

$$z_0=Ae^{i\tau}+\bar{A}e^{-i\tau} \quad (۲۱)$$

معادله ۲۲ با قرار دادن $z_0$ از رابطه ۲۱ در سمت راست معادله ۲-۲۰ به دست می‌آید.

$$z_1''+z_1=\left(2\frac{\omega_1}{\omega_0}A-2i\mu A\right)e^{i\tau}-\alpha A^2e^{2i\tau}-\alpha A\bar{A}+cc \quad (۲۲)$$

در رابطه ۲۲، منظور از ترم cc، مزدوج مختلط ترم‌های ارائه شده است. پارامتر $\omega_1$ با صفر کردن ترم سکولار رابطه ۲۲، به‌صورت رابطه ۲۳ به دست می‌آید. با صفر کردن این ترم مقدار، $z_1$ به‌صورت رابطه ۲۴ استخراج می‌شود.

$$\omega_1=i\mu\omega_0 \quad (۲۳)$$

$$z_1=\frac{\alpha A^2}{3}e^{2i\tau}-\alpha A\bar{A}+cc \quad (۲۴)$$

با جایگذاری پاسخ‌های $z_0$، $z_1$ و $\omega_1$ در رابطه ۲-۱۹، پاسخ کلی با تخمین تا مرتبه دوم به‌صورت رابطه ۲۵ به دست می‌آید.

$$z=Ae^{i\tau}+\varepsilon\left(\frac{\alpha A^2}{3}e^{2i\tau}-\alpha A\bar{A}\right)+cc \quad (۲۵)$$

معادله ۲۶ با قرار دادن $\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1$ و $\tau=\omega t$ در رابطه ۲۵ به دست می‌آید.

$$z=Ae^{i\omega_0(1+i\varepsilon\mu)t}+\varepsilon\left(\frac{\alpha A^2}{3}e^{2i\omega_0(1+i\varepsilon\mu)t}-\alpha A\bar{A}\right)+cc \quad (۲۶)$$

با قرار دادن $A=\frac{1}{2}ae^{i\beta}$ و بازنویسی رابطه ۲۶ به شکل مثلثاتی، پاسخ نهایی ارتعاشات آزاد به‌صورت رابطه ۲۷ استخراج خواهد شد.

$$\begin{aligned}z&=ae^{-\varepsilon\omega_0\mu t}\cos(\omega_0 t+\beta)\\&+\frac{\varepsilon\alpha a^2}{3}e^{-2\varepsilon\omega_0\mu t}cos(2\omega_0 t+2\beta)\\&-2\varepsilon\alpha a^2+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \quad (۲۷)$$

همان‌طور که در رابطه ۲۷ مشاهده می‌شود؛ پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم ترکیبی از فرکانس طبیعی و هارمونیک دو برابر آن خواهد بود. وجود ترم $-2\varepsilon\alpha a^2$ در پاسخ، نشانگر آن است که نوسانات از مبدأ صفر انحراف داشته، سیستم حول نقطه‌ای غیر صفر نوسان می‌کند.

## ۳-۳-۲- حل ارتعاشات اجباری

ابتدا با در نظر گرفتن $q=z\Delta$ و $\tau=\omega_0 t$ معادله یک درجه آزادی ۱۷ به فرم بدون بعد تبدیل می‌شود. پارامتر Δ، به عنوان خیز استاتیک در نظر گرفته شده به‌صورت $\Delta=g/\omega_0^2$ تعریف می‌شود. معادله بی‌بعد ارتعاشات اجباری، به‌صورت رابطه ۲۸ نشان داده شده است. نیروی تحریک سینوسی همانند رابطه ۱۰ و با فرکانس تحریک Ω در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2}+2\varepsilon\mu\frac{\partial z}{\partial \tau}+z+\varepsilon\alpha z^2=F\,cos(r\tau) \quad (۲۸)$$

که $\varepsilon=\Delta,\ F=F_0/g,\ \mu=\xi/\varepsilon$ و $r=\Omega/\omega_0$

در استفاده از روش چند مقیاسی، ترم زمان به‌صورت زنجیره‌ای از توان‌های ε مطابق رابطه ۲۹ در نظر گرفته می‌شود.

$$T_n=\varepsilon^n\tau,\quad n=1,2,3,\ldots \quad (۲۹)$$

با بکارگیری قاعده زنجیره‌ای مشتق، مشتقات نسبت به τ مطابق رابطه ۳۰ به زنجیره‌ای از مشتقات نسبت به $T_n$ تبدیل می‌شود. در روابط ارائه شده مشتق جزئی مرتبه n ام با $D_n=\partial/\partial T_n$ نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}&=D_0+\varepsilon D_1+\varepsilon^2 D_2+\cdots\\\frac{d^2}{d\tau^2}&=D_0^2+2\varepsilon D_0D_1+\varepsilon^2(D_1^2+2D_0D_2)+\cdots\end{aligned} \quad (۳۰)$$

مطابق روش‌های اغتشاشات، پاسخ کلی سیستم به فرم رابطه (۳۱) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}z(\tau,\varepsilon)&=z_0(T_0,T_1,T_2)+\varepsilon z_1(T_0,T_1,T_2)\\&+\varepsilon^2 z_2(T_0,T_1,T_2)+\cdots\end{aligned} \quad (۳۱)$$

بر اساس دقت مورد احتیاج، تعداد ترم‌های در نظر گرفته رابطه ۳۱ تغییر خواهد کرد. به‌عنوان‌مثال برای در نظر گرفتن حل تا مرتبه $O(\varepsilon^3)$، جابجایی‌های برحسب $T_0$، $T_1$ و $T_2$ نوشته می‌شود. در ادامه، پاسخ سیستم بر اساس فرکانس تحریک در سه حالت نزدیک به رزونانس اصلی، فوق هارمونیک و زیر هارمونیک محاسبه می‌شود.

### ۳-۳-۲-۱- رزونانس اصلی

پارامتر $\sigma$ را که نشان‌دهنده میزان انحراف فرکانس تحریک ($\Omega$) از فرکانس طبیعی ($\omega_0$) است، به‌صورت رابطه ۳۲ معرفی می‌شود. به دلیل نزدیکی فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی ($r \approx 1$)، تحریکی از نوع ضعیف مطابق با رابطه ۳۳ برای اثرگذاری بر سیستم کافی خواهد بود.

$$\mathrm{r} = 1 + \varepsilon^2\sigma \tag{۳۲}$$

$$f(\tau) = \varepsilon^2 F cos(r\tau) \tag{۳۳}$$

با جایگذاری از روابط ۳۱ و ۳۳ در رابطه ۲۸ و مرتب کردن معادلات برحسب مرتبه ε، معادلات ۳۴ به دست می‌آیند. دقت شود که در تحریک نزدیک رزونانس اصلی، ترم میرایی از نوع ضعیف انتخاب شده است تا هم‌مرتبه با نیروی تحریک در معادلات ظاهر شود.

$$O(\varepsilon^0) \rightarrow D_0^2 z_0 + z_0 = 0 \tag{۱-۳۴}$$

$$O(\varepsilon^1) \rightarrow D_0^2 z_1 + z_1 = -2D_0D_1z_0 - \alpha z_0^2 \tag{۲-۳۴}$$

$$O(\varepsilon^2) \rightarrow D_0^2 z_2 + z_2 = -(D_1^2 + 2D_0D_2)z_0 \\ -2\mu D_0 z_0 - 2D_0D_1z_1 - 2\alpha z_0 z_1 + F cos(r\tau) \tag{۳-۳۴}$$

حل معادله ۱-۳۴ به‌صورت رابطه ۳۵ می‌آید.

$$z_0 = Ae^{iT_0} + cc \tag{۳۵}$$

معادله ۲-۳۴ با قرار دادن $z_0$ از رابطه ۳۵ به‌صورت رابطه ۳۶ بازنویسی می‌شود.

$$D_0^2 z_1 + z_1 = -2iD_1Ae^{iT_0} - \alpha\left[A^2e^{2iT_0} + A\bar{A}\right] + cc \tag{۳۶}$$

به‌منظور حذف ترم سکولار بایستی $D_1 A = 0$ باشد. به‌عبارت‌دیگر $A = A(T_2)$ باید باشد. با صفر کردن ترم سکولار و حل رابطه ۳۶، پاسخ $z_1$ به‌صورت رابطه ۳۷ به دست می‌آید.

$$z_1 = \alpha\left[\frac{1}{3}A^2e^{2iT_0} - A\bar{A}\right] + cc \tag{۳۷}$$

با جایگذاری معادلات ۳۵ و ۳۷ مربوط به $z_0$ و $z_1$ در رابطه ۳-۳۴، معادله مربوطه به‌صورت رابطه ۳۸ بازنویسی می‌شود.

$$D_0^2 z_2 + z_2 = \left[\frac{10}{3}\alpha^2A^2\bar{A} - 2i(D_2A + \mu A)\right]e^{iT_0} \\ + \frac{1}{2}Fe^{irT_0} + cc + NST \tag{۳۸}$$

در بازنویسی سمت راست رابطه ۳۸، هدف یافتن ترم‌های سکولار بوده است. ازاین‌رو از ارائه ترم‌های غیر سکولار صرف نظر شده و آن‌ها در قالب عبارت NST گنجانیده شده‌اند. با جایگذاری $r\tau = T_0 + \sigma T_2$ از رابطه ۳۲ در سمت راست رابطه ۳۸، ترم سکولار به‌صورت رابطه ۳۹ استخراج می‌شود.

$$2i(D_2A + \mu A) - \frac{10}{3}\alpha^2A^2\bar{A} - \frac{1}{2}\mathrm{F}e^{i\sigma T_2} = 0 \tag{۳۹}$$

با فرض کردن $A = \frac{1}{2}ae^{i\beta}$ و جدا کردن بخش‌های موهومی و حقیقی دو معادله به‌صورت زیر به دست می‌آیند.

$$a' = -\mu a + \frac{1}{2}F sin(\gamma) \tag{۱-۴۰}$$

$$a\beta' = \frac{10}{24}\alpha^2a^3 - \frac{1}{2}F cos(\gamma) \tag{۲-۴۰}$$

که پارامتر γ به‌صورت رابطه (۴۱) تعریف می‌شود.

$$\gamma = \sigma T_2 - \beta \tag{۴۱}$$

با حذف پارامتر β بین روابط ۲-۴۰ و ۴۱، رابطه ۴۲ نتیجه خواهد شد.

$$a\gamma' = a\sigma + \frac{10}{24}\alpha^2a^3 + \frac{1}{2}F cos(\gamma) \tag{۴۲}$$

اکنون با حل هم‌زمان دو معادله ۱-۴۰ و ۴۲، پارامترهای a و γ به دست می‌آیند. پاسخ نهایی با بکار گیری تخمین تا مرتبه دوم محاسبه شده و به شکل مثلثاتی در رابطه ۴۳ نشان داده شده است.

$$z = a\,cos(r\tau - \gamma) \\ + \frac{1}{2}\varepsilon\alpha a^2\left[-1 + \frac{1}{3}cos(2r\tau - 2\gamma)\right] + O(\varepsilon^2) \tag{۴۳}$$

با ملاحظه رابطه ۴۳ مشاهده می‌شود، پاسخ ارتعاشات اجباری سیستم در مجاورت رزونانس اصلی، ترکیبی از فرکانس طبیعی و هارمونیک دو برابر خواهد بود. وجود ترم $-\frac{1}{2}\varepsilon\alpha a^2$ در پاسخ نشانگر آن است که نوسانات از مبدأ صفر انحراف داشته، سیستم حول نقطه‌ای غیر صفر نوسان می‌کند.

### ۳-۳-۲-۲- رزونانس فوق هارمونیک

در تحریک سوپر هارمونیک، نیروی تحریک از نوع غیر ضعیف انتخاب شده و ترم نیرو مطابق با رابطه ۱-۴۴ در مرتبه اول

معادلات ظاهر می‌شود. رابطه ۴۴، معادلات سیستم را تا مرتبه اول نشان می‌دهد.

$$O(\varepsilon^0) \rightarrow D_0^2 z_0 + z_0 = F cos(r\tau) \tag{۱-۴۴}$$

$$O(\varepsilon^1) \rightarrow D_0^2 z_1 + z_1 = -2\mu D_0 z_0 \\ -2D_0 D_1 z_0 - \alpha z_0^2 \tag{۲-۴۴}$$

معادله ۱-۴۴، به‌صورت رابطه ۴۵ حل می‌شود.

$$z_0 = Ae^{iT_0} + \Lambda e^{irT_0} + cc \\ \Lambda = \frac{1}{2}\frac{F}{1-r^2} \tag{۴۵}$$

رابطه ۲-۴۴، پس از جایگذاری حل $z_0$ از رابطه ۴۵ به‌صورت رابطه (۴۶) بازنویسی می‌شود.

$$D_0^2 z_1 + z_1 = -2i(D_1 A + \mu A)e^{iT_0} - 2i\mu r \Lambda e^{irT_0} \\ -\alpha\big[A^2 e^{2iT_0} + \Lambda^2 e^{2irT_0} + 2\bar{A}\Lambda e^{i(r-1)T_0} + \\ 2A\Lambda e^{i(r+1)T_0} + A\bar{A} + \Lambda^2\big] + cc \tag{۴۶}$$

با دقت در سمت راست رابطه ۴۶ می‌توان دریافت که رزونانس سوپر هارمونیک زمانی اتفاق می‌افتد که $\omega_0 = 2\Omega$ باشد (r=1/2)؛ بنابراین پارامتر انحراف فرکانس تحریک از فرکانس طبیعی، به‌صورت رابطه ۴۷ تعریف می‌شود.

$$2r = 1 + \varepsilon\,\sigma \;\Rightarrow\; 2r\tau = T_0 + \sigma T_2 \tag{۴۷}$$

با جایگذاری از رابطه ۴۷ در سمت راست رابطه ۴۶، ترم سکولار مطابق با رابطه ۴۸ به دست می‌آید.

$$D_1 A + \mu A + \frac{1}{2i}\alpha\Lambda^2 e^{i\sigma T_1} = 0 \tag{۴۸}$$

با حل رابطه ۴۸، ضریب A به‌صورت رابطه ۴۹ به دست می‌آید.

$$A = ae^{-\mu T_1} + \frac{i\alpha\Lambda^2}{2(\mu + i\sigma)}e^{i\sigma T_1} \tag{۴۹}$$

درصورتی‌که زمان به سمت بی‌نهایت میل داده شود، ترم $e^{-\mu T_1}$ در ضریب A به سمت صفر میل می‌کند. در این حالت ضریب A پس از ساده‌سازی به‌صورت رابطه ۵۰ بازنویسی می‌شود.

$$A = \frac{i\alpha\Lambda^2}{2(\mu + i\sigma)}e^{i\sigma T_1} \tag{۵۰}$$

در نهایت پاسخ حالت دائم سیستم در مجاورت رزونانس سوپر هارمونیک با فرض تخمین مرتبه اول، به‌صورت رابطه ۵۱ استخراج می‌شود. دقت شود که ترم σ از رابطه ۴۷ و مقدار Λ از رابطه ۴۵ جایگذاری شده است.

$$z = \frac{F}{1-r^2}cos(r\tau) \\ -\frac{\alpha F^2}{4(1-r^2)^2\sqrt{\sigma^2+\mu^2}}sin(2r\tau - \gamma) \tag{۵۱}$$

که: $\gamma = tan^{-1}(\sigma/\mu)$

با توجه به رابطه ۵۱، پاسخ سیستم در این حالت از تحریک از نوع هارمونیک بوده، ترکیبی از فرکانس تحریک و فرکانس دو برابر آن خواهد بود. در این حالت فرکانس تحریک بایستی یک‌دوم فرکانس طبیعی سیستم باشد. مشاهده می‌شود که ترم دوم رابطه دارای توان دوم دامنه نیروی تحریک است. ازاین‌رو با کاهش دامنه نیروی تحریک ترم دوم معادله نسبت به ترم اول با سرعت بسیار بیشتری به سمت صفر گرایش پیداکرده، حل مسئله مشابه با حل حالت خطی می‌شود.

### ۳-۲-۳- رزونانس زیر هارمونیک

در تحلیل زیر هارمونیک، نیروی تحریک با مرتبه صفر ε، همانند با تحلیل قبل در نظر گرفته می‌شود. ازاین‌رو معادلات مربوطه به مرتبه‌های ε، همانند رابطه ۴۴ خواهد بود. درصورتی‌که پاسخ اطراف دو برابر فرکانس طبیعی سیستم موردنیاز باشد، فرکانس تحریک لازم است، به‌صورت رابطه ۵۲ در نظر گرفته شود؛ بنابراین، پس از بازنویسی رابطه ۲-۴۴ با جایگذاری حل $z_0$ از رابطه ۴۵، ترم سکولار به‌صورت رابطه ۵۳ نوشته می‌شود.

$$r = 2 + \varepsilon\sigma \;\Rightarrow\; r\tau = 2T_0 + \sigma T_1 \tag{۵۲}$$

$$D_1 A + \mu A - i\alpha\bar{A}\Lambda e^{i\sigma T_1} = 0 \tag{۵۳}$$

با فرض $A = B\,exp(\frac{1}{2}i\sigma T_1)$ رابطه ۵۳ به‌صورت رابطه ۵۴ ساده می‌شود.

$$D_1 B + \frac{1}{2}i\sigma B + \mu B - i\alpha\bar{B}\Lambda = 0 \tag{۵۴}$$

فرض می‌شود که ضریب B، ماهیت مختلط داشته و به‌صورت $B = B_r + iB_i$ باشد که $B_r$ و $B_i$ به ترتیب نمایانگر، بخش‌های حقیقی و موهومی ضریب B هستند. با جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی رابطه ۵۴، این رابطه به‌صورت دو معادله دیفرانسیل زیر تبدیل می‌شود.

$$B_r' + \mu B_r - \left(\frac{1}{2}\sigma + \alpha\Lambda\right)B_i = 0 \tag{۱-۵۵}$$

$$B_i' + \mu B_i - \left(\frac{1}{2}\sigma - \alpha\Lambda\right)B_r = 0 \tag{۲-۵۵}$$

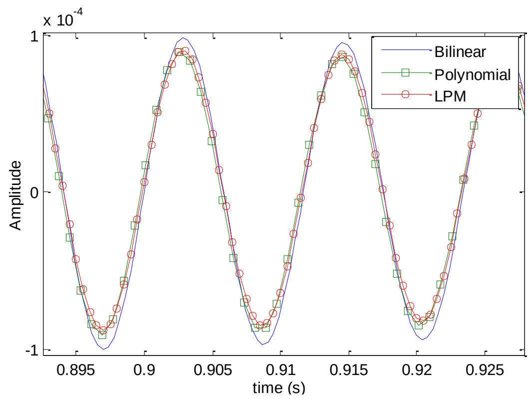
دو معادله بالا، معادلاتی خطی و با ضرایب ثابت هستند؛ لذا حلی برابر با $B_i = b_i e^{\lambda T_1}$ و $B_r = b_r e^{\lambda T_1}$ می‌توان برای آن‌ها در نظر گرفت. که ضرایب $b_r$، $b_i$ و λ همگی ثابت هستند. با جایگذاری $B_r$ و $B_i$ در رابطه ۵۵، حل غیر بدیهی به‌صورت رابطه ۵۶ استخراج می‌شود.

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 - \sigma^2/4} \quad (۵۶)$$

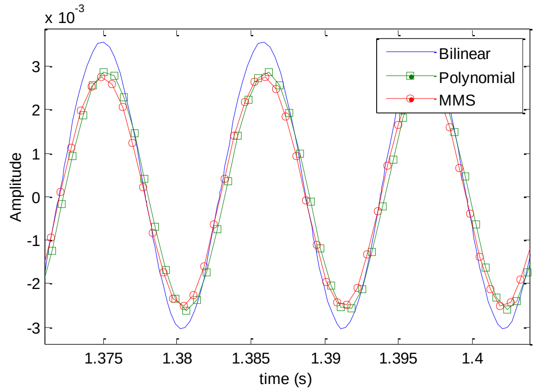
در تحریک زیر هارمونیک، مقدار $\lambda$ همواره منفی باقی می‌ماند. ازاین‌رو دامنهٔ ترم نوسانات آزاد مربوط به فرکانس زیر هارمونیک با گذر زمان کاهش می‌یابد؛ بنابراین پاسخ حالت دائم در حالت تحریک زیر هارمونیک، به‌صورت تک فرکانسی بوده، تنها شامل فرکانس تحریک است.

## ۴- نتایج

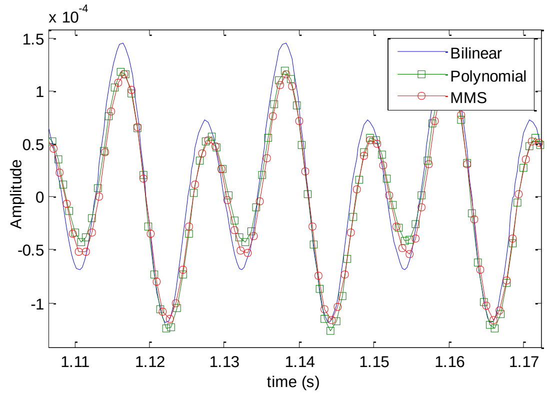
در بخش دوم مقاله سیستم تیر و اتصال فلنجی با سیستم معادلات دوخطی، رابطه ۹ معادل‌سازی گردید. با استفاده از روش عددی می‌توان معادله ۹ دارای ترم دوخطی را به‌صورت نسبتاً دقیق حل کرد. در روش عددی دقیق، هر قسمت خطی (q<0 و q>0) جداگانه حل‌شده، با پیش بردن حل در قدم‌های زمانی به اندازه کافی کوچک و بررسی علامت $q$ در هر قدم به یکدیگر متصل می‌شود. نمودار شکل ۶، حل عددی دقیق تابع دوخطی، حل عددی چندجمله‌ای مرتبه سوم معادل و پاسخ به‌دست آمده از روش پوانکاره را در غیاب نیروی تحریک نشان می‌دهد. نمودارهای شکل ۷ نیز، حل عددی دقیق سیستم دوخطی و چندجمله‌ای مرتبه سوم معادل آن را با پاسخ‌های به‌دست‌آمده از روش چند مقیاسی در مجاورت فرکانس طبیعی پایه و رزونانس سوپر هارمونیک نشان می‌دهد. برای ترسیم نمودارهای پاسخ در مجاورت رزونانس اصلی و سوپر هارمونیک بازه زمانی به نحوی انتخاب شده است که نوسانات سیستم از حالت گذرای اولیه عبور کرده، به حالت دائم برسد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مطابقت خوبی بین نتایج هر سه روش وجود دارد.




**شکل ۶- پاسخ نوسانات آزاد مربوط به مدل‌های دوخطی و چندجمله‌ای مرتبه سوم معادل**




**(الف)**




**(ب)**

**شکل ۷- مقایسه پاسخ عددی مدل‌های دوخطی و چندجمله‌ای مرتبه دوم معادل اطراف الف) رزونانس اصلی و ب) رزونانس فوق هارمونیک**

مقایسه بین نتایج حل عددی دقیق سیستم دوخطی و حل عددی چندجمله‌ای معادل درجه سوم، حاکی از آن است که در نظر گرفتن ضرایب تا توان سوم مختصات عمومی (q) برای تخمین رفتار دینامیک سیستم در حالات نوسانات آزاد و مجاورت رزونانس اصلی و سوپر هارمونیک دقت کافی را دارا است؛ بنابراین می‌توان از اثر توان‌های بالاتر صرف‌نظر نموده، سیستم دوخطی را با چندجمله‌ای درجه دوم معادل نمود. در واقع سیستم معادل سیستمی غیرخطی، از توان دوم جابه‌جایی است.

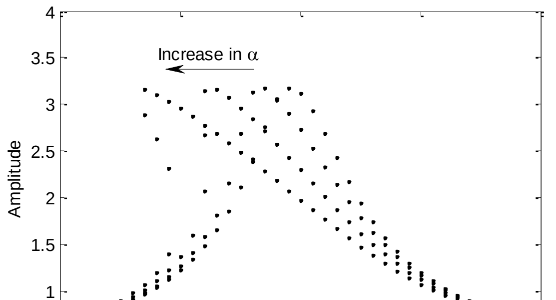
مقایسه بین نتایج حل عددی سیستم دوخطی و چندجمله‌ای معادل آن با حل ارائه شده به روش اغتشاشات نیز، حاکی از دقت بالای پاسخ به‌دست آمده به روش‌های پوانکاره و چند مقیاسی دارد. ملاحظه می‌شود، سیستم حول

مبدا غیر صفر نوسان می‌کند. این مسئله از ماهیت سیستم‌های دوخطی نشئت می‌گیرد. به‌کارگیری این روش‌ها برای حل معادلات غیرخطی این اجازه را می‌دهد که بتوان حلی تحلیلی تقریبی برای سیستم به دست آورد و اثر پارامترهای مختلف را به‌صورت تحلیلی بررسی کرد.

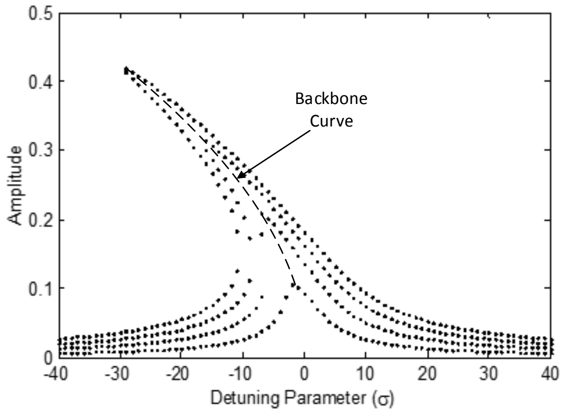
با انتقال، به توان دو رساندن و جمع سمت راست دو رابطه ۱-۴۰ و ۴۲، معادله پاسخ فرکانسی در مجاورت رزونانس اصلی مطابق با رابطه ۵۷ به دست می‌آید.

$$a^2[\mu^2 + (\alpha^* a^2 + \sigma)^2] = \left(\frac{F}{2}\right)^2 \quad (۵۷)$$
$$(\alpha^* = \frac{10}{24}\alpha^2 \ : \text{که})$$

طبق رابطه ۵۷، حداکثر دامنه برابر با $F/2\mu$ بوده که مستقل از ضریب ترم غیرخطی سیستم ($\alpha$) است. منحنی پاسخ فرکانسی سیستم به ازای تغییر در میزان غیرخطی بودن و تغییر در دامنه نیروی تحریک به ترتیب، در شکل ۸ و شکل ۹ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که وجود ترم غیرخطی توان دوم، همانند سختی نرم شونده عمل کرده، تمایل به انتقال قله منحنی پاسخ فرکانسی به سمت فرکانس‌های پایین‌تر نشان می‌دهد. برای سیستم موردنظر در این مقاله، عامل تغییر دهنده ضریب $\alpha$ (میزان غیرخطی بودن سیستم)، تغییر اختلاف بین $\omega_0^-$ و $\omega_0^+$ یا به‌عبارت‌دیگر، تغییر اختلاف بین سختی خمشی مثبت و منفی اتصال است. در مرجع [۱۹] اشاره شده است که دو عامل ۱- افزایش پیش‌بار در پیچ ۲- افزایش ضخامت لبه اتصال فلنجی، موجب زیادتر شدن اختلاف بین سختی مثبت و منفی شده، لذا به تبع آن سبب افزایش ضریب ترم غیر خطی خواهد شد.




**شکل ۸- پاسخ فرکانسی سیستم در مجاورت رزونانس اصلی با تغییر در ضریب غیرخطی** ($\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha$)




**شکل ۹- پاسخ فرکانسی سیستم در مجاورت رزونانس اصلی با تغییر در دامنه نیروی تحریک** ($0.5F, 1F, 1.5F, 2F$)

مطابق شکل ۹ با افزایش دامنه نیرو، نقطه ماکزیمم منحنی پاسخ فرکانسی بالاتر رفته، علاوه بر آن از $\sigma = 0$ به سمت فرکانس‌های کمتر منحرف می‌شود. منحنی مکان هندسی ماکزیمم دامنه[1] به‌صورت سهمی با معادله $\sigma = \alpha^* a^2$ است که در شکل ۹ با خط‌چین نمایش داده شده است.

با ملاحظه ترم ضریب هارمونیک $2x$ در رابطه ۵۱، رابطه پاسخ فرکانسی ترم سوپر هارمونیک، به‌صورت رابطه ۵۸ نوشته می‌شود.

همان‌طور که در رابطه ۵۱ مشاهده می‌شود، پاسخ فرکانسی مربوط به فرکانس طبیعی پایه با افزایش میزان غیرخطی بودن سیستم (افزایش $\alpha$) شدیدتر می‌شود. شکل ۱۰، پاسخ فرکانسی سیستم را در مجاورت رزونانس سوپر هارمونیک به ازای مقادیر مختلف ضریب غیرخطی $\alpha$، نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با افزایش غیرخطی بودن سیستم، دامنه پاسخ افزایش می‌یابد.

$$\frac{\alpha F^2}{4(1-r^2)^2\sqrt{\sigma^2+\mu^2}} \quad (۵۸)$$

## ۴-۱- مقایسه با حل عددی

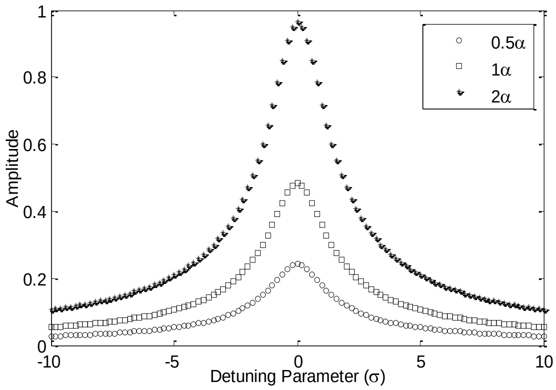
شکل ۱۱ مقایسه پاسخ فرکانسی سیستم با مشخصات مفروض در جدول ۱ را در اطراف فرکانس طبیعی پایه به روش ارائه شده در این مقاله و حل عددی نشان می‌دهد.

[1] Backbone Curve

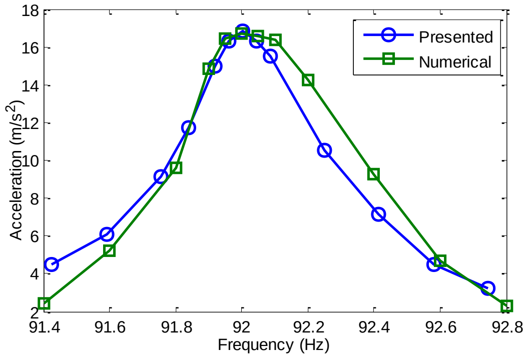
برای محاسبه پاسخ فرکانسی به روش عددی، طیف زمانی پاسخ به ازای فرکانس‌های تحریک مختلف استخراج و سپس دامنه طیف فرکانسی در فرکانس تحریک بەدست‌آمده است. مشاهده می‌شود که مطابقت خوبی بین نتایج عددی و نتایج مدل ارائه شده وجود دارد.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا معادلات دینامیکی غیرخطی برای سیستمی شامل، دو تیر و اتصال فلنجی تک پیچ استخراج شده است. سپس حل دینامیکی این سیستم با استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی تقریبی به روش اغتشاشات بدست آمده است. معادلات غیرخطی بدست آمده نشان می‌دهند که دو عامل افزایش سختی کلی اتصال و همچنین کاهش اختلاف سختی مثبت و منفی با کاهش ضریب ترم غیرخطی، موجب خطی‌تر شدن سیستم می‌شود. پاسخ غیرخطی سیستم، تحت نوسانات آزاد و اجباری در مجاورت رزونانس اصلی و سوپر هارمونیک و زیر هارمونیک به روش‌های عددی و اغتشاشات محاسبه و مقایسه شده است. ملاحظه می‌شود که رفتار سیستم، مشابه با سیستمی دارای سختی توان دوم بوده، هارمونیک‌های دوم فرکانس تحریک در پاسخ ظاهر می‌شوند. با محاسبه پاسخ فرکانسی سیستم مشاهده می‌شود که وجود اتصال فلنجی همانند سختی نرم شونده، موجب انحراف قله پاسخ فرکانسی به فرکانس‌های کمتر می‌شود. با افزایش ضریب ترم غیرخطی و نیروی تحریک، انحراف بیشتر می‌شود.




شکل ۱۰- پاسخ فرکانسی سیستم در مجاورت رزونانس سوپر هارمونیک به ازای مقادیر مختلف ضریب غیرخطی




شکل ۱۱- مقایسه پاسخ فرکانسی سیستم به روش تحلیلی ارائه‌شده و حل عددی

## ۶- فهرست علائم

| | |
|---|---|
| A | مساحت سطح مقطع ($m^2$) |
| E | مدول الاستیسیته ($N/m^2$) |
| I | ممان اینرسی خمشی ($m^4$) |
| f | نیرو (N) |
| K | سختی (N/m, Nm/rad) |
| L | طول تیر (m) |
| M | جرم (Kg) |
| r | فرکانس تحریک بدون بعد |
| q | مختصات عمومی |

**علائم یونانی**

| | |
|---|---|
| $\alpha$ | ضریب ترم غیرخطی |
| $\mu$ | ضریب میرایی بدون بعد |
| $\sigma$ | انحراف از فرکانس طبیعی |
| $\varepsilon$ | پارامتر اغتشاش |
| $\Delta$ | خیز استاتیکی |
| $\tau$ | پارامتر زمانی بدون بعد |
| $\omega$ | فرکانس طبیعی (rad/s) |
| $\rho$ | چگالی ($Kg/m^3$) |

**بالانویس‌ها**

| | |
|---|---|
| + | تغییر شکل‌های مثبت |
| − | تغییر شکل‌های منفی |

**زیرنویس‌ها**

| | |
|---|---|
| *t* | خمشی |
| *l* | طولی |
| *fl* | فلنج |

## ۷- پیوست ۱

ماتریس ضرایب معرفی شده در بخش ۲:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{s}(\beta_2 L_2) & \mathrm{c}(\beta_2 L_2) & -\mathrm{sh}(\beta_2 L_2) & -\mathrm{ch}(\beta_2 L_2) \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{c}(\beta_2 L_2) & \mathrm{s}(\beta_2 L_2) & \mathrm{ch}(\beta_2 L_2) & \mathrm{sh}(\beta_2 L_2) \\
-E_1 I_1 \beta_1^3\, \mathrm{c}(\beta_1 L_1) + (\frac{1}{2}\mathrm{M_f}\omega^2 - \mathrm{K_l})\, \mathrm{s}(\beta_1 L_1) & E_1 I_1 \beta_1^3\, \mathrm{s}(\beta_1 L_1) + (\frac{1}{2}\mathrm{M_f}\omega^2 - \mathrm{K_l})\, \mathrm{c}(\beta_1 L_1) & E_1 I_1 \beta_1^3\, \mathrm{ch}(\beta_1 L_1) + (\frac{1}{2}\mathrm{M_f}\omega^2 - \mathrm{K_l})\, \mathrm{sh}(\beta_1 L_1) & E_1 I_1 \beta_1^3\, \mathrm{sh}(\beta_1 L_1) + (\frac{1}{2}\mathrm{M_f}\omega^2 - \mathrm{K_l})\, \mathrm{ch}(\beta_1 L_1) & 0 & \mathrm{K_l} & 0 & \mathrm{K_l} \\
\beta_1^3 \emptyset\, \mathrm{c}(\beta_1 L_1) & -\beta_1^3 \emptyset\, \mathrm{s}(\beta_1 L_1) & -\beta_1^3 \emptyset\, \mathrm{ch}(\beta_1 L_1) & -\beta_1^3 \emptyset\, \mathrm{sh}(\beta_1 L_1) & -\beta_2^3 & 0 & -\beta_2^3 & 0 \\
K_t \beta_1\, \mathrm{c}(\beta_1 L_1) - \beta_1^2 E_1 I_1\, \mathrm{s}(\beta_1 L_1) & -K_t \beta_1\, \mathrm{s}(\beta_1 L_1) - \beta_1^2 E_1 I_1\, \mathrm{c}(\beta_1 L_1) & K_t \beta_1\, \mathrm{ch}(\beta_1 L_1) + \beta_1^2 E_1 I_1\, \mathrm{sh}(\beta_1 L_1) & K_t \beta_1\, \mathrm{sh}(\beta_1 L_1) + \beta_1^2 E_1 I_1\, \mathrm{ch}(\beta_1 L_1) & -K_t(\beta_2) & 0 & -K_t(\beta_2) & 0 \\
K_t \beta_1\, \mathrm{c}(\beta_1 L_1) & -K_t \beta_1\, \mathrm{s}(\beta_1 L_1) & K_t \beta_1\, \mathrm{ch}(\beta_1 L_1) & K_t \beta_1\, \mathrm{sh}(\beta_1 L_1) & -K_t(\beta_2) & -\beta_2^2 (E_2 I_2) & -K_t(\beta_2) & \beta_2^2 (E_2 I_2)
\end{bmatrix}
$$

## ۸- مراجع


[1] Schwingshackl CW, Di Maio D, Sever I, Green JS (2013) Modeling and validation of the nonlinear dynamic behavior of bolted flange joints. J Eng Gas Turbines Power 135(12): 122504-122504.

[2] Law SS, Wu ZM, Chan SL (2004) Vibration control study of a suspension footbridge using hybrid slotted bolted connection elements. Eng Struct 26(1): 107-116.

[3] Benedetti M, Garofalo G, Zumpano M, Barboni R (2007) On the damping effect due to bolted junctions in space structures subjected to pyro-shock. Acta Astronaut 60(12): 947-956.

[4] Zapico-Valle JL, Abad-Blasco J, González-Martínez MP, Franco-Gimeno JM, García-Diéguez M (2012) Modelling and calibration of a beam-column joint based on modal data. Comput Struct 108-109(0): 31-41.

[5] Rezaee MS, Ghazavi MR, Jafari AA, Najafi A (2012) Stability of a system consisting of three-axis connected through Hooke's joints. Modares Mechanical Eng 12(6): 69-79. (in Persian)

[6] Lavassas I, Nikolaidis G, Zervas P, Efthimiou E, Doudoumis IN, Baniotopoulos CC (2003) Analysis and design of the prototypeof a steel 1-MW wind turbine tower. Eng Struct 25(8): 1097-1106.

[7] Lee SY, Ko KH, Lee J (2000) Analysis of dynamic characteristics of structural joints using stiffness influence coefficients. KSME Int J 14(12): 1319-1327.

[8] Iranzad M, Ahmadian H (2012) Identification of nonlinear bolted lap joint models. Comput Struct 96-97(0): 1-8.

[9] Agatonovic P (1985) Beam model of bolted flanged connections. Eng Comput 2(1): 21-29.

[10] Shi Y, Chan S, Wong Y (1996) Modeling for moment-rotation characteristics for end-plate connections. J Struct Eng 122(11): 1300-1306.

[11] Semke WH, Bibel GD, Gurav SB, Webster AL, Jerath S (2002) Dynamic response of a pipe having bolted flange connection with a gasket. in ASME 2002 Eng. Tech. Conf. on Energy 675-681.

[12] Semke WH, Bibel GD, Jerath S, Gurav SB, Webster AL (2002) A dynamic investigation of piping systems with a bolted flange. in Proceeding of ASME 121-128.

[13] Semke WH, Bibel GD, Jerath S, Gurav SB, Webster AL (2006) Efficient dynamic structural response modelling of bolted flange piping systems. Int J Press Vessels Pip 83(10): 767-776.

[14] Luan Y, Guan ZQ, Cheng GD, Liu S (2012) A simplified nonlinear dynamic model for the analysis of pipe structures with bolted flange joints. J Sound Vib 331(2): 325-344.

[15] Mathan G, Prasad NS (2012) Study of dynamic response of piping system with gasketed flanged joints using finite element analysis. Int J Press Vessels Pip 89(0): 28-32.

[16] Wu Z, Nassar SA, Yang X (2014) Nonlinear deformation behavior of bolted flanges under tensile, torsional, and bending loads. J Pressure Vessel Technol Trans ASME 136(6): 061201-061201.

[17] Ahmadian H, Jalali H (2007) Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures. Mech Syst Signal Process 21(2): 1041-1050.

[18] Jalali H, Ahmadian H, Mottershead JE (2007), Identification of nonlinear bolted lap-joint parameters by force-state mapping. Int J Solids Struct 44(25-26): 8087-8105.

[19] Meisami F, Moavenian M, Afshadfard A, Pishbin SI (2016) analytical and experimental investigation for nonlinear behavior of flange joints under axial and lateral loading. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 6(3): 43-54. (in Persian)

[20] Peng ZK, Lang ZQ, Billings SA, Lu Y (2007) Analysis of bilinear oscillators under harmonic loading using nonlinear output frequency response functions. Int J Mech Sci 49(11): 1213-1225.