مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۳/ دوره ۴/ شماره ۴/ صفحه ۱۷۵-۱۸۹

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه شاهرود

شبیه سازی عددی جریان خارجی لزج تراکم‌ناپذیر با استفاده از روش لاتیس بولتزمن بدون شبکه

الناز شایان[۱]، عبدالرحمان دادوند[۲،*] و ایرج میرزایی[۳]

[۱] دانشجوی دکتری مکانیک، دانشکده مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

[۲] استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

[۳] استاد، دانشکده مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۲/۳۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۱۰/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۱/۳۰

چکیده

در سال‌های اخیر روش شبکه بولتزمن به عنوان یک روش دینامیک سیالات محاسباتی جایگزین و امیدبخش برای شبیه سازی جریان‌های پیچیده درآمده است. روش شبکه بولتزمن استاندارد علیرغم موفقیت‌آمیز بودنش در بسیاری از کاربردهای عملی به یکنواختی شبکه در فضای فیزیکی محدود می‌شود. این مهمترین عیب روش شبکه بولتزمن استاندارد برای کاربرد در مسایل جریان با هندسه پیچیده است. در حال حاضر چندین روش برای حل مشکل روش شبکه بولتزمن استاندارد وجود دارد. یکی از این روش‌ها، روش شبکه بولتزمن بر مبنای بسط سری تیلور و حداقل مربعات (TLLBM) است. این روش بر مبنای روش شبکه بولتزمن استاندارد با معرفی بسط سری تیلور و روش حداقل مربعات استوار است. در روش مذکور، معادله نهایی یک معادله صریح است و هیچ محدودیتی روی ساختار و مدل شبکه ندارد. در کار حاضر، روش TLLBM با مدل شبکه D2Q9 برای شبیه سازی جریان خارجی لزج، تراکم ناپذیر و پایای دو بعدی با استفاده از شبکه‌های غیر یکنواخت بکار برده شده است. دو مطالعه مورد بررسی می‌گردد: الف) جریان حول استوانه دایروی با شبکه غیر یکنواخت O، ب) جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه های حمله مختلف با شبکه غیر یکنواخت و متعامد C. مشاهده شد که این روش نتایج بسیار دقیقی به دست می دهد.

کلمات کلیدی: روش لاتیس بولتزمن بدون شبکه؛ استوانه دایروی؛ ایرفویل NACA0012؛ تراکم‌ناپذیر.

Numerical simulation of incompressible viscous external flow using mesh-free lattice Boltzmann method

E. Shayan[1], A. Dadvand[2,*] and I. Mirzaee[3]

[1] Ph.D. Student, Mech. Eng., Urmia Univ., Urmia, Iran

[2] Assist. Prof., Mech. Eng., Urmia Univ. of Tech., Urmia, Iran

[3] Prof., Mech. Eng., Urmia Univ., Urmia, Iran

Abstract

In recent years, the lattice Boltzmann method (LBM) has become an alternative and promising computational fluid dynamics approach for simulation of complex fluid flows. Despite its huge success in many practical applications, the conventional (standard) LBM is restricted to the lattice uniformity in the physical space. This is an important drawback of the standard LBM for the application to flow problems with complex geometry. Currently there are several ways to remove this drawback of standard LBM. One of these methods is the Taylor series expansion and least squares-based LBM (TLLBM).This method is based on the standard LBM with introduction of the Taylor series expansion and the least squares approach. The salient feature of the TLLBM is the fact that the final equation is an explicit form and essentially has no limitation on the mesh structure and lattice model. In the present work, the TLLBM with D2Q9 lattice model is used to simulate 2-D steady incompressible viscous external flow on non-uniform meshes.Two test cases are studied: a) flow past a circular cylinder with a non-uniform O-type mesh; b) flow past a NACA0012 airfoil at different attack angles with orthogonal and non-uniform C-type mesh. It was found that this method can give very accurate results.

Keywords: Mesh-free lattice Boltzmann method; Circular cylinder; NACA0012 airfoil; Incompressible.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۴۴-۳۱۹۸۰۲۶۴؛ فکس: ۰۴۴-۳۱۹۸۰۲۵۱

آدرس پست الکترونیک: a.dadvand@mee.uut.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر از روش شبکه بولتزمن[1] به عنوان یک روش دینامیک سیالات محاسباتی جایگزین برای شبیه‌سازی جریان سیالات استفاده شده است [۱-۲]. برخلاف روش‌های مرسوم عددی که بر پایه جداسازی معادلات پیوسته ماکروسکوپیک استوار می‌باشند، روش شبکه بولتزمن بر پایه مدل‌های میکروسکوپی و معادلات جنبشی مزوزکوپی می‌باشد و دینامیک ماکروسکوپی یک سیال نتیجه رفتار اشتراکی تعداد زیادی از ذرات میکروسکوپی در سیستم است. ثابت شده است که روش شبکه بولتزمن استاندارد می‌تواند معادلات ناویر استوکس را با استفاده از بسط چاپمن-انسکوک بازیابی کند [۳]. شکل صریح معادلات حاکم، سهولت کاربرد در محاسبات موازی و اعمال ساده شرایط مرزی روی مرزهای منحنی وار از مزایای مهم روش شبکه بولتزمن استاندارد می‌باشند. روش شبکه بولتزمن استاندارد دارای دو فرآیند اساسی است: انتقال و برخورد. به دلیل نیاز ذاتی فرآیند انتقال از یک نقطه شبکه به نقطه همسایه اش، معادله شبکه بولتزمن استاندارد معمولا روی شبکه یکنواخت در سیستم مختصات کارتزین به کار می‌رود و نمی‌تواند به طور مستقیم برای مسائل با هندسه پیچیده به کار رود. در نتیجه کاربرد آن برای حل مسائل عملی محدود می‌باشد. از طرفی، بیشتر مسائل جریان شامل هندسه‌های پیچیده هستند و نیازمند استفاده از شبکه‌های غیر یکنواخت برای تسخیر لایه مرزی نازک می‌باشند.

روش شبکه بولتزمن استاندارد توسعه یافته ی روش ماشین سلولی شبکه گازی[2] است. در روش ماشین سلولی شبکه گازی، تمامی ذرات جرم یکسانی دارند و یک ذره در یک نقطه شبکه باید به نقطه همسایه در یک بازه زمانی انتقال یابد. این نیازمندی منجر به یکنواختی شبکه می‌شود. در روش شبکه بولتزمن استاندارد، جرم ذره توسط تابع توزیع چگالی جایگزین می‌شود. این روش را همچنین می‌توان از تئوری جنبشی گازها برگرفت [۴].

برای شبیه‌سازی جریان حول سیلندر دایروی کارهای عددی زیادی بر پایه معادلات ماکروسکوپیک (معادلات ناویر-استوکس) انجام شده است. کاربرد عددی این روش‌ها برای به‌دست آوردن نتایج با دقت بالا بسیار پیچیده است. بنابراین به عنوان یک روش دینامیک سیالات محاسباتی جایگزین، روش شبکه‌ی بولتزمن یک موفقیت بزرگ در مهندسی مکانیک سیالات در سالهای اخیر به دست آورده است.

تحقیقات تجربی زیادی روی جریان ناپایا حول سیلندر دایروی گزارش شده است [۹-۵] که در میان آنها کارهای ارائه شده توسط بوارد و کوتانسیو[3] در سال ۱۹۸۰ بهترین به نظر می‌رسند. در کارهای آنها پدیده شکل‌گیری و بسط گردابه‌های اصلی و ثانویه به صورت کمی و کیفی در اعداد رینولدز بالا تا $۱۰^۴$ مطالعه شده است.

اولین کار عددی انجام شده برای جریان ناپایا حول سیلندر دایروی در سال ۱۹۵۸ [۱۰] توسط پاین[4] برای اعداد رینولدز ۴۰ و ۱۰۰ انجام شد. بعد از آن محاسبات عددی زیادی انجام شد که بسیاری از آنها بر پایه فرمول تابع جریان- ورتیسیته، با استفاده از روشهای هیبرید، لاگرانژی و اویلری برای گسسته‌سازی استوار بودند.

شبیه‌سازی جریان حول یک سیلندر دایروی دو بعدی با استفاده از روش شبکه‌ی بولتزمن توسط گروههای مختلفی از افراد انجام شده است. نوبل[5] و همکاران در سال ۱۹۹۶ جریان حول یک سیلندر هشت‌وجهی را مورد مطالعه قرار دادند[۱۱].

هیگورا و سوسی[6] در سال ۱۹۸۹ نمونه‌های جریان برای اعداد رینولدز بالای ۸۰ را مورد مطالعه قرار دادند. در رینولدز ۵۲/۸ آنها متوجه شدند که جریان بعد از یک گذار اولیه طولانی، متناوب می‌شود و برای رینولدز ۷۷/۸ یک جریان ریزشی متناوب ظاهر می‌شود. آنها عدد استروهال، زاویه جدایش جریان و ضرایب لیفت و درگ را با نتایج شبیه‌سازی و تجربی قبلی مقایسه کردند که مطابقت قابل قبول و منطقی را نشان داد [۱۲].

واگنر[7] در سال ۱۹۹۴ توزیع فشار حول سطح سیلندر را به عنوان تابعی از عدد رینولدز با دقت مورد مطالعه قرار داد و

[1] LBM
[2] LGCA
[3] Bouard and Coutanceau
[4] Payen
[5] Nobel
[6] Higuera and Succi
[7] Wagner

نتیجه‌گیری کرد که اختلاف بین عدد استروهال به‌دست آمده توسط او با اعداد استروهال حاصل از شبیه‌سازی توسط دیگر مدل‌ها کمتر از ۳/۵ درصد است [۱۳].

شبیه‌سازی‌های بالا با روش شبکه بولتزمن استاندارد که بر مبنای شبکه‌های یکنواخت می‌باشد انجام یافته است که هندسه دایروی را خیلی ضعیف شبیه‌سازی می‌کند. چون هندسه‌های پیچیده نیاز به شبکه غیریکنواخت برای تسخیر لایه مرزی نازک دارند. اگر چه روش شبکه بولتزمن استاندارد کارایی محاسباتی روش ماشین سلولی شبکه گازی را افزایش می‌دهد اما هنوز مشکل وابستگیش به یکنواختی شبکه را داراست. از دید تئوری نیازی به حفظ یکنواختی شبکه نیست زیرا توابع توزیع در فضای فیزیکی پیوسته هستند. چهار روش رایج برای بهبود روش شبکه بولتزمن استاندارد وجود دارد که می‌تواند برای مسائل پیچیده بکار رود.

بنابراین برای رفع مشکل روش شبکه‌ی بولتزمن و برای کاربرد مسائل جریان با هندسه‌های پیچیده و استفاده از شبکه غیریکنواخت، نوع جدیدی از روش شبکه‌ی بولتزمن به نام روش درونیابی الحاقی شبکه‌ی بولتزمن[1] توسط هی و همکاران در سال ۱۹۹۶ پیشنهاد شد [۱۴]. در این روش درونیابی در هرگام زمانی برای به دست آوردن توابع توزیع چگالی در تمامی نقاط شبکه انجام می‌شود. بنابراین محاسبات بیشتری در مقایسه با روش شبکه بولتزمن استاندارد نیاز است.

در سال ۱۹۹۷ هی و دولین[2] مساله جریان دو بعدی حول یک سیلندر دایروی را با روش درونیابی الحاقی شبکه‌ی بولتزمن بررسی کردند[۱۵].

در سال ۲۰۰۲ چیو[3] و همکاران روش دیفرانسیلی شبکه-شبکه‌ی بولتزمن را برای شبیه‌سازی جریانهای لزج در اعداد رینولدز بالا پیشنهاد دادند[۱۶]. روش دیفرانسیلی شبکه بولتزمن، بر پایه حل معادله دیفرانسیل جزئی می‌باشد. برای مسائل پیچیده، این معادله را می‌توان توسط یکی از روشهای مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی مانند روش اختلاف محدود با کمک انتقال مختصات، روش حجم محدود یا روش المان محدود حل نمود. نتایج نشان داده است که بازده محاسباتی این روش بطور عمده وابسته به انتخاب طرح یا الگوی عددی است.

سومین روش تکنیک ریز کردن شبکه می‌باشد که اولین بار توسط فیلیپوا و هانیل[4] پیشنهاد شد و بعداً توسط می و همکاران بهبود یافت [۱۷ و ۱۸].

در سال ۲۰۰۲ روش شبکه‌ی بولتزمن بر مبنای بسط سری تیلور و حداقل مربعات[5] برای اولین بار توسط شو[6] و همکاران پیشنهاد شد [۱۹و ۲۰]. این روش بر پایه روش شبکه بولتزمن استاندارد، بسط سری تیلور، روش رانگ کوتای توسعه یافته و روش حداقل مربعات می‌باشد. شکل نهایی این روش یک فرمول جبری است و هیچ محدودیتی روی ساختار و مدل شبکه ندارد. روش جدید می‌تواند برای انواع شبکه‌های مختلف به کار رود.

در کار حاضر، روش شبکه بولتزمن بر مبنای بسط سری تیلور و حداقل مربعات با مدل شبکه D2Q9 برای شبیه سازی جریان پایای دو بعدی، خارجی، تراکم ناپذیر و لزج با شبکه-های غیر یکنواخت به کار رفته است. برای نشان دادن کاربرد این روش (۱) جریان حول استوانه دایروی و (۲) جریان حول ایرفویل NACA0012، به عنوان نمونه‌های عددی انتخاب شده‌اند. در این تحقیق برای اولین بار موفق شدیم با استفاده از روش TLLBM که روشی صریح و مستقل از ساختار شبکه است جریان خارجی آرام، تراکم‌ناپذیر و لزج را روی هندسه پیچیده ایرفویل شبیه‌سازی کنیم. نتایج حاصل با دیگر نتایج عددی موجود که با حل معادلات ناویر استوکس به دست آمده مقایسه شده است. آشکارا، مطابقت خوبی بین نتایج حاضر و نتایج به دست آمده از دیگر روشهای عددی وجود دارد. می‌توان دریافت که نتایج به دست آمده از این روش بسیار دقیق می‌باشد.

۲- معادلات حاکم

معادلات ناویراستوکس دو بعدی برای جریان سیال تراکم-ناپذیر به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad (۱)$$

[1] Interpolation-supplemented-LBM (ISLBM)
[2] He and Doolen
[3] Chew
[4] Filippova and Hanel
[5] Taylor-series-expansion-and-least square-based LBM (TLLBM)
[6] Shu

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} \tag{۲}$$

که در آن $\mathbf{u}$ بردار سرعت، ρ چگالی، p فشار و ν ویسکوزیته سینماتیک می‌باشد. این معادلات به همراه شرایط مرزی مناسب برای به دست آوردن خواص مورد نیاز جریان حل می‌شوند.

۳- روش شبکه بولتزمن بر مبنای بسط سری تیلور و حداقل مربعات [۱۹ و ۲۰]

روش شبکه بولتزمن بر مبنای بسط سری تیلور و حداقل مربعات (TLLBM) بر این حقیقت استوار است که تابع توزیع چگالی در فضای فیزیکی پیوسته بوده و می‌تواند با هر سیستم مختصات شبکه‌ای استفاده شود. در روش شبکه بولتزمن استاندارد، معادله جنبشی برای تابع توزیع سرعت ذره $f(\mathbf{x},\mathbf{e},t)$ حل می‌شود که در آن $\mathbf{e}$ بردار سرعت ذره، $\mathbf{x}$ بردار موقعیت فضایی و t زمان می‌باشد. کمیت های ماکروسکوپیک نظیر چگالی جرم ρ و چگالی مومنتوم ρu را می‌توان از ارزیابی مومنتوم‌های هیدرودینامیک تابع توزیع f به دست آورد. این روش برای اولین بار توسط مک نامارا و زانتی[1] [۲۱]، با پایه تئوری اضافی اثبات شده توسط هیگورا و جیمینز[2] [۲]، کولمان[3] [۲۲]، کیان[4] و همکاران [۲۳]، چن[5] و همکاران [۲۴]، و هیومیرس[6] [۲۵] پیشنهاد شد.

روش شبکه بولتزمن استاندارد دو بعدی توسط تقریبی که توسط بهاتناگار، گراس و کروک[7] ارائه شده است به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f_i(x+e_{ix}\delta t, y+e_{iy}\delta t, t+\delta t) = f_i(x,y,t) + \frac{1}{\tau}\left[f_i^{eq}(x,y,t) - f_i(x,y,t)\right], \quad (i=0,1,\dots,N) \tag{۳}$$

به طوریکه τ زمان رهایی منفرد، و f_i تابع توزیع چگالی در جهت i است. f_i^{eq} تابع توزیع چگالی در حالت تعادلی است که بستگی به متغیرهای ماکروسکوپی محلی مانند چگالی ρ و سرعت $\mathbf{u}(u,v)$ دارد. همچنین δt گام زمانی و $e_i(e_{ix},e_{iy})$ سرعت ذره در جهت i و N تعداد جهت‌های حرکت ذره است. متغیرهای ماکروسکوپی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho = \sum_{i=0}^{N} f_i \quad, \rho u = \sum_{i=0}^{N} f_i e_{ix} \quad, \rho v = \sum_{i=0}^{N} f_i e_{iy}. \tag{۴}$$

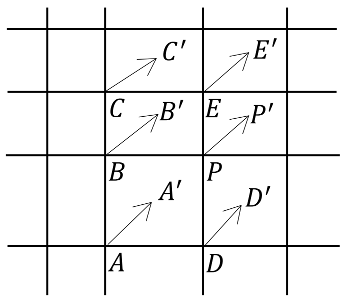
فشار مستقیما از معادله حالت گاز ایده ال به دست می آید:

$$p = \rho c_s^{\,2} \tag{۵}$$

به طوریکه c_s سرعت صوت است.

فرض کنید که یک ذره ابتدا در نقطه (x,y,t) از شبکه است. این ذره در جهت i به موقعیت $(x+e_{ix}\delta t, y+e_{iy}\delta t, t+\delta t)$ انتقال می‌یابد. برای یک شبکه یکنواخت، $\delta x = e_{ix}\delta t$ و $\delta y = e_{iy}\delta t$ می‌باشد. بنابراین $(x+e_{ix}\delta t, y+e_{iy}\delta t, t+\delta t)$ دقیقاً روی نقطه شبکه واقع است. به عبارت دیگر معادله (۳) می‌تواند توابع توزیع چگالی را به طور دقیق در نقاط شبکه به دست آورد. در حالی که برای یک شبکه غیر یکنواخت، موقعیت مکانی $(x+e_{ix}\delta t, y+e_{iy}\delta t, t+\delta t)$ معمولاً روی نقطه شبکه واقع نیست. برای به دست آوردن تابع توزیع چگالی در نقطه $(x+\delta x, y+\delta y)$ از شبکه و در سطح زمانی $(t+\delta t)$ نیاز به بکارگیری بسط سری تیلور یا دیگر روشهای درونیابی نظیر آنکه توسط هی و دولین [۱۵] استفاده شد می‌باشد. در کار حاضر از بسط سری تیلور استفاده می‌شود. توجه داشته باشید که سطح زمانی برای موقعیت $(x+e_{ix}\delta t, y+e_{iy}\delta t)$ و نقطه شبکه $(x+\delta x, y+\delta y)$ یکسان یعنی $(t+\delta t)$ است. بنابراین بسط در جهت زمان ضروری نیست.

همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود نقطه A مکان (x_A, y_A)، نقطه A' محل $(x_A+e_{ix}\delta t, y_A+e_{iy}\delta t)$ و نقطه P نیز موقعیت (x_p, y_p) را نشان می‌دهد.



شکل ۱- جهت حرکت ذرات

---

[1] McNamara and Zanetti
[2] Higuera and Jimenez
[3] Koelman
[4] Qian
[5] Chen
[6] Humieres
[7] Bhatnagar-Gross-Krook

با استفاده از معادله (۳)، می‌توان تابع توزیع چگالی را در نقطه A' به دست آورد:

$$f_i(A',t+\delta t)=f_i(A,t)+\frac{1}{\tau}\left[f_i^{eq}(A,t)-f_i(A,t)\right]. \tag{۶}$$

از آنجا که نقطه A' بر نقطه شبکه P منطبق نمی‌باشد بنابراین برای به دست آوردن تابع توزیع چگالی در نقطه A'، نیاز به استفاده از بسط سری تیلور می‌باشد. با استفاده از این بسط، $f_i(A',t+\delta t)$ به شکل زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{aligned} f_i(A',t+\delta t) &= f_i(P,t+\delta t)+ \\ &\Delta x_A\frac{\partial f_i(P,t+\delta t)}{\partial x}+\Delta y_A\frac{\partial f_i(P,t+\delta t)}{\partial y} \\ &+\frac{1}{2}(\Delta x_A)^2\frac{\partial^2 f_i(P,t+\delta t)}{\partial x^2} \\ &+\frac{1}{2}(\Delta y_A)^2\frac{\partial^2 f_i(P,t+\delta t)}{\partial y^2} \\ &+\Delta x_A\Delta y_A\frac{\partial^2 f_i(P,t+\delta t)}{\partial x\partial y} \\ &+O\left[\left(\Delta x_A\right)^3+\left(\Delta y_A\right)^3\right] \end{aligned} \tag{۷}$$

به‌طوریکه:

$$\Delta x_A = x_A + e_{\alpha x}\delta t - x_p,$$
$$\Delta y_A = y_A + e_{\alpha y}\delta t - y_p$$

با جاگذاری معادله (۷) در معادله (۶) داریم:

$$\begin{aligned} & f_i(P,t+\delta t)+\Delta x_A\frac{\partial f_i(P,t+\delta t)}{\partial x} \\ &+\Delta y_A\frac{\partial f_i(P,t+\delta t)}{\partial y}+ \\ &\frac{1}{2}(\Delta x_A)^2\frac{\partial^2 f_i(P,t+\delta t)}{\partial x^2} \\ &+\frac{1}{2}(\Delta y_A)^2\frac{\partial^2 f_i(P,t+\delta t)}{\partial y^2}+ \\ &\Delta x_A\Delta y_A\frac{\partial^2 f_i(P,t+\delta t)}{\partial x\partial y} \\ &=f_i(A,t)+\frac{1}{\tau}\left[f_i^{eq}(A,t)-f_i(A,t)\right] \end{aligned} \tag{۸}$$

معادله (۸) یک معادله دیفرانسیلی است که تنها شامل دو نقطه شبکه A و P می‌باشد. با حل این معادله می‌توان توابع توزیع چگالی را در تمام نقاط شبکه به دست آورد.

همانطور که می‌دانیم، روش رانگ-کوتا بسط سری تیلور را برای حل معادلات دیفرانسیلی معمولی بهبود می‌بخشد. به طوری که بسط سری تیلور برای به دست آوردن مقدار اصلی در گام زمانی بعدی بایستی معادله‌ای از مرتبه‌های مختلف مشتقات را حل کند که کاربرد این روش برای معادله دیفرانسیل معمولی داده شده با عبارات پیچیده، خیلی مشکل است. برای بهبود بسط سری تیلور، روش رانگ کوتا مقادیر اصلی را در بعضی نقاط میانی به صورت ترکیبی تخمین می-زند تا یک الگویی را با همان مرتبه دقت تشکیل دهد با این ایده در ذهن، در معادله (۸) تابع توزیع چگالی و مشتقاتش در نقطه شبکه P در سطح زمانی $(t+\delta t)$ همگی مجهولند. بنابراین معادله (۸) در کل شش مجهول دارد. برای حل شش مجهول، شش معادله نیاز است. بنابراین برای اینکه سیستم بسته شود پنج معادله اضافی دیگر بایستی نوشته شود. از شکل ۱ مشاهده می‌شود که در جهت i ذرات در پنج نقطه شبکه P ,D, C, B و E در سطح زمانی t به موقعیت‌های جدید P,'B', C', D',E' در سطح زمانی $(t+\delta t)$ حرکت می‌کنند. توابع توزیع چگالی در موقعیت‌های جدید با استفاده از معادله (۳) محاسبه می‌شوند که در زیر آورده شده است:

$$f_i(\Phi',t+\delta t)=f_i(\Phi,t)+\frac{1}{\tau}\left[f_i^{eq}(\Phi,t)-f_i(\Phi,t)\right] \tag{۹}$$

که Φ اشاره به نقاط D, C, B, P و E دارد. با استفاده از بسط سری تیلور $f_i(\Phi',t+\delta t)$ در معادله (۹) با استفاده از تابع توزیع و مشتقاتش در نقطه شبکه P به شکل زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{aligned} & f_i(P,t+\delta t)+\Delta x_\Phi\frac{\partial f_i(P,t+\delta t)}{\partial x} \\ &+\Delta y_\Phi\frac{\partial f_i(P,t+\delta t)}{\partial y}+ \\ &\frac{1}{2}(\Delta x_\Phi)^2\frac{\partial^2 f_i(P,t+\delta t)}{\partial x^2} \\ &+\frac{1}{2}(\Delta y_\Phi)^2\frac{\partial^2 f_i(P,t+\delta t)}{\partial y^2}+ \\ &\Delta x_\Phi\Delta y_\Phi\frac{\partial^2 f_i(P,t+\delta t)}{\partial x\partial y} \\ &=f_i(\Phi,t)+\frac{1}{\tau}\left[f_i^{eq}(\Phi,t)-f_i(\Phi,t)\right] \end{aligned} \tag{۱۰}$$

به طوریکه:

$$\Delta x_{\Phi} = x_{\Phi} + e_{ix}\delta t - x_P$$
$$\Delta y_{\Phi} = y_{\Phi} + e_{iy}\delta t - y_P$$

معادله (۸) به همراه معادله (۹) دستگاهی برای حل شش مجهول تشکیل می‌دهد که به صورت زیر می‌باشد:

$$g_j = f_i(x_j, y_j, t) + \frac{1}{\tau}\left[f_i^{eq}(x_j, y_j, t) - f_i(x_j, y_j, t)\right] \tag{۱۱}$$

$$\{s_j\}^{\mathrm{T}} = \left\{1, \Delta x_j, \Delta y_j, (\Delta x_j)^2/2, (\Delta y_j)^2/2, \Delta x_j \Delta y_j\right\} \tag{۱۲}$$

$$\{F\} = \left\{ f_i, \partial f_i/\partial x, \partial f_i/\partial y, \partial^2 f/\partial x^2, \partial^2 f/\partial y^2, \partial^2 f_i/\partial x \partial y \right\}^{\mathrm{T}} \tag{۱۳}$$

به طوریکه g_j حالت پس برخورد تابع توزیع در نقطه j و سطح زمانی t می‌باشد و $\{s_j\}^T$ نیز یک بردار با شش عضو تشکیل شده از مختصات نقاط شبکه است و {F} نیز بردار مجهول در نقطه شبکه P در سطح زمانی $(t+\delta t)$ می‌باشد که شش عضو دارد. هدف یافتن عضو اول بردار F یعنی $F_1 = f_i(P, t+\delta t)$ می‌باشد. با تعاریف بالا، معادلات (۸) و (۹) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$g_j = \{S_j\}^T \{F\} = \sum_{k=1}^{6} S_{j,k} F_k, \tag{۱۴}$$

$$j = P, A, B, C, D, E$$

$S_{j,k}$ عنصر k ام بردار $\{s_j\}^T$ است و F_k نیز عنصر k ام بردار $\{F\}$ می‌باشد. دستگاه معادلات (۱۴) به شکل ماتریسی به صورت زیر نوشته می شود:

$$[S]\{F\} = \{g\} \tag{۱۵}$$

به طوریکه $\{g\} = \{g_P, g_A, g_B, g_C, g_D, g_E\}^T$

و

$$[S] = [S_{j,k}] = \begin{bmatrix} \{s_P\}^T \\ \{s_A\}^T \\ \{s_B\}^T \\ \{s_C\}^T \\ \{s_D\}^T \\ \{s_E\}^T \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \Delta x_p & \Delta y_p & (\Delta x_p)^2/2 & (\Delta y_p)^2/2 & \Delta x_p \Delta y_p \\ 1 & \Delta x_A & \Delta y_A & (\Delta x_A)^2/2 & (\Delta y_A)^2/2 & \Delta x_A \Delta y_A \\ 1 & \Delta x_B & \Delta y_B & (\Delta x_B)^2/2 & (\Delta y_B)^2/2 & \Delta x_B \Delta y_B \\ 1 & \Delta x_C & \Delta y_C & (\Delta x_C)^2/2 & (\Delta y_C)^2/2 & \Delta x_C \Delta y_C \\ 1 & \Delta x_D & \Delta y_D & (\Delta x_D)^2/2 & (\Delta y_D)^2/2 & \Delta x_D \Delta y_D \\ 1 & \Delta x_E & \Delta y_E & (\Delta x_E)^2/2 & (\Delta y_E)^2/2 & \Delta x_E \Delta y_E \end{bmatrix}$$

ماتریس [S] فقط به مختصات نقاط شبکه وابسته است که یکباره محاسبه می‌شودو سپس برای کاربرد در معادله (۱۵) در همه سطوح زمانی ذخیره می‌شود. برای اطمینان از غیرمنفرد بودن ماتریس [S] شو و همکاران[۱۹] روش حداقل مربعات بر مبنای روش شبکه بولتزمن استاندارد را پیشنهاد دادند.

معادله (۱۴) دارای شش مجهول است که شامل عناصر بردار $\{F\}$ می‌باشند. اگر این معادله در بیشتر از شش نقطه به کار برده شود آنگاه سیستم نامعین است. بایستی بردار مجهول از روش حداقل مربعات به‌دست آید. برای سادگی، نقطه شبکه P با اندیس j=0 و نقاط همسایه آن به ترتیب با اندیس‌های j=1, 2, …, M نشان داده می‌شوند و M نیز تعداد نقاط همسایه حول نقطه P می‌باشد و بایستی بزرگتر از پنج باشد. در هر نقطه، می‌توان خطایی برای جمله‌های معادله (۱۴) به شکل زیر تعریف کرد:

$$err_j = g_j - \sum_{k=1}^{6} s_{j,k} F_k, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M \tag{۱۶}$$

جمع مربعات تمامی خطاها به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_2 = \sum_{j=0}^{M} \mathrm{err}_j^2 = \sum_{j=0}^{M} \left(g_j - \sum_{k=1}^{6} s_{j,k} F_k \right)^2 \tag{۱۷}$$

برای کمینه کردن خطای E_2 لازم است که برای هر $k = 1, 2, \dots, 6$، $\partial E_2 / \partial F_k = 0$ باشد که معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$E_2 = \sum_{j=0}^{M} \mathrm{err}_j^2 = \sum_{j=0}^{M} \left(g_j - \sum_{k=1}^{6} s_{j,k} F_k \right)^2 \tag{۱۸}$$

ماتریس [S] یک ماتریس (M+1)×6 است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$[S]=\begin{bmatrix} 1 & \Delta x_0 & \Delta y_0 & (\Delta x_0)^2/2 & (\Delta y_0)^2/2 & \Delta x_0\Delta y_0 \\ 1 & \Delta x_1 & \Delta y_1 & (\Delta x_1)^2/2 & (\Delta y_1)^2/2 & \Delta x_1\Delta y_1 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ 1 & \Delta x_M & \Delta y_M & (\Delta x_M)^2/2 & (\Delta y_M)^2/2 & \Delta x_M\Delta y_M \end{bmatrix}_{(M+1)\times 6}$$

و $\{g\}=\{g_0,g_1,...g_M\}^T$. مقادیر Δx و Δy در ماتریس $[S]$ به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\Delta x_j = x_j + e_{ix}\delta t - x_0$$
$$\Delta y_j = y_j + e_{iy}\delta t - y_0 \quad (j=0,2,...,M) \qquad (۱۹)$$

هنگامی که مختصات نقاط شبکه و سرعت ذره و اندازه گام زمانی معلوم باشد، ماتریس$[S]$ تعیین می‌شود. شکل معادله (۱۸) به صورت زیر خواهد شد:

$$\{F\}=\left(\left[S\right]^T\left[S\right]\right)^{-1}\left[S\right]^T\{g\}=\left[A\right]\{g\} \qquad (۲۰)$$

ماتریس$\left[A\right]$ یک ماتریس $6\times(M+1)$ است. از معادله (۲۰) نتیجه زیر حاصل می شود:

$$f_i(x_0,y_0,t+\delta t)=F_1=\sum_{\ell=1}^{M+1} a_{1,\ell}\, g_{\ell-1} \qquad (۲۱)$$

$a_{1,k}$عناصر سطر اول ماتریس $\left[A\right]$ هستند. این ضرایب قبل از اینکه روش شبکه بولتزمن استاندارد به کار برده شود محاسبه شده‌اند. به طوریکه یکبار برای همیشه در ابتدای برنامه محاسبه می‌شوند و برای استفاده در تمام سطوح زمانی ذخیره می‌شوند. معادله (۲۱) معادله‌ای مستقل از ساختار شبکه است که در آن بایستی مختصات نقاط شبکه مشخص باشند. بنابراین این معادله اساساً شکلی بدون شبکه دارد.

۳-۱- مدل D2Q9

یک ویژگی مهم روش شبکه بولتزمن بر مبنای بسط سری تیلور و حداقل مربعات این است که می‌تواند برای هر مدل از سرعت شبکه بکار برده شود. تابع توزیع چگالی تعادلی f_i^{eq} با مدل D2Q9 به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$f_i^{eq}=\rho w_i\left[1+\frac{3}{c^2}(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{u})+\frac{9}{2c^4}(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{u})^2-\frac{3}{2c^2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\right] \qquad (۲۲)$$

که در آن $c=\dfrac{\delta x}{\delta t}$ می‌باشد. w_i ضریب وزنی است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$w_i=\begin{cases} 4/9 & i=0 \\ 1/9 & i=1,3,5,7 \\ 1/36 & i=2,4,6,8 \end{cases}$$

در این مدل $e_i(e_{ix},e_{iy})$ مجموعه سرعت‌های گسسته شده ذرات هستند و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$e_i=\begin{cases} (0,0) & i=0 \\ \left(\cos\left[(i-1)\frac{\pi}{4}\right],\sin\left[(i-1)\frac{\pi}{4}\right]\right)\cdot C & i=1,3,5,7 \\ \left(\cos\left[(i-1)\frac{\pi}{4}\right],\sin\left[(i-1)\frac{\pi}{4}\right]\right)\sqrt{2}\cdot C & i=2,4,6,8 \end{cases}$$

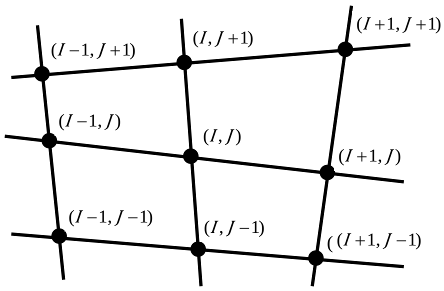
سرعت صوت در این مدل برابر با $c_s=\dfrac{C}{\sqrt{3}}$ است و ویسکوزیته متناظر در معادله ناویر استوکس (۲) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\nu=\left(\tau-\tfrac{1}{2}\right)c_s^2\delta t \qquad (۲۳)$$

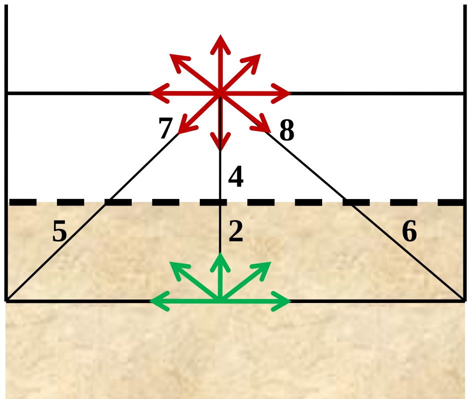
همانطور که در بالا ذکر شد، روش شبکه بولتزمن بر مبنای بسط سری تیلور و حداقل مربعات یک روش بدون شبکه است و می‌تواند با شبکه‌های غیر منظم به کار رود. با این حال، برای سادگی در تعیین مختصات نقاط شبکه در این کار، شبکه‌های با سازمان استفاده شده است. برای ارضاء شرایط M برابر با هشت در نظر گرفته می‌شود. همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود برای نقطه داخلی شبکه (I,J) هشت نقطه مجاور در نظر گرفته شده است به طوریکه ترکیب نه نقطه شبکه در تمام جهت‌های شبکه به کار برده شده است.

۴- شرایط مرزی و اولیه

در محاسبات حاضر، سه نوع شرایط مرزی به کار رفته است. اولین نوع شرط مرزی که روی دیواره‌های استوانه دایروی و ایرفویل اعمال شده، شرط مرزی عدم لغزش است. برای اعمال شرط مرزی عدم لغزش بر روی دیواره که با نقاط



شکل ۲- ترکیب نقاط همسایه حول نقطه (I,J)



شکل ۳- شرایط مرزی انعکاس بین نقطه‌ای

شبکه در یک ردیف قرار گرفته است روش انعکاس بین نقطه-ای [۲۶ و ۲۷] به کار برده شده است. در این حالت، مرز بین دو سری از نقاط شبکه قرار می‌گیرد که در شکل ۳ نشان داده شده است.

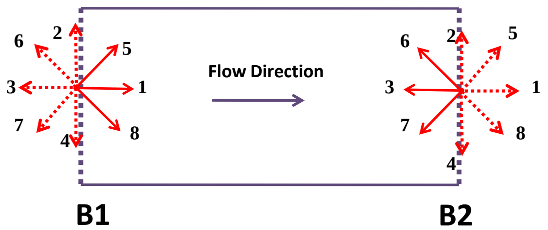
به طوریکه یک ردیف از نقاط شبکه را داخل مرز دیواره فرض می‌کنیم. در این حالت، مرز بین دو سری از نقاط شبکه قرار می‌گیرد. ذراتی که از نقاط داخل سیال، نقاط تر، به سمت دیوار حرکت می‌کنند به وسیله نقاطی که در خارج از مرز هستند، نقاط خشک، بازتاب می‌شوند. در حقیقت شرط عدم لغزش روی دیواره که بین نقاط شبکه قرار گرفته است اعمال می‌شود. این روش دارای دقت مرتبه دو و مستقل از جهت می‌باشد. همین مزیت باعث می‌شود که این روش را به آسانی برای مسائل با مرزهای پیچیده و منحنی‌وار به کار برد. بنابراین روی مرز شرط عدم لغزش به صورت رابطه زیر اعمال می‌شود:

$$\begin{matrix} f_1=f_3 & f_2=f_4 & f_5=f_7 & f_6=f_8 \\ f_3=f_1 & f_4=f_2 & f_7=f_5 & f_8=f_6 \end{matrix} \qquad (۲۴)$$

دومین نوع شرط مرزی شرط مرزی در دور دست است. در این نوع شرط مرزی، میدان جریان نامحدود در نظر گرفته می‌شود و جریان نیز پتانسیلی فرض شده است به طوریکه در انتهای هر گام زمانی، تابع توزیع چگالی با حالت تعادلی‌اش برابر فرض شده است. سومین نوع شرط مرزی، شرط مرزی متناوب است که روی خط برش خورده (خط افقی سمت راست) برای شبکه‌های نوع O و C به کار رفته است. شرط مرزی متناوب ساده‌ترین نوع شرایط مرزی است [۲۸] و کاربرد عملی آن به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} f_i^{\langle}(\mathrm{B}_1) &= f_j^{\rangle}(B_2) \\ f_i^{\langle}(\mathrm{B}_2) &= f_j^{\rangle}(B_1) \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

به طوریکه B_1 و B_2 لایه‌های مرزی چپ و راست هستند که در شکل ۴ نشان داده شده است. لازم به ذکر است که توابع توزیع مجهول به صورت $f_i^{\langle}$ و توابع توزیع معلوم هم با $f_i^{\rangle}$ نشان داده می‌شوند.



شکل ۴- شرایط مرزی متناوب

در این شبیه‌سازی میدان جریان پتانسیلی و غیرچرخشی به عنوان شرایط اولیه به‌کار برده شده است. یعنی به عنوان شرط اولیه برای کل میدان جریان حول استوانه و ایرفویل، چگالی مقدار ثابت $\rho=1$ در نظر گرفته شده است. سرعت جریان نیز روی دیواره (عدم لغزش) صفر در نظر گرفته شده است. اما برای کل میدان جریان به غیر از دیواره، مولفه X سرعت جریان برابر با ۰/۱۵ و مولفه y سرعت جریان صفر فرض شده است.

۵- نتایج و بحث

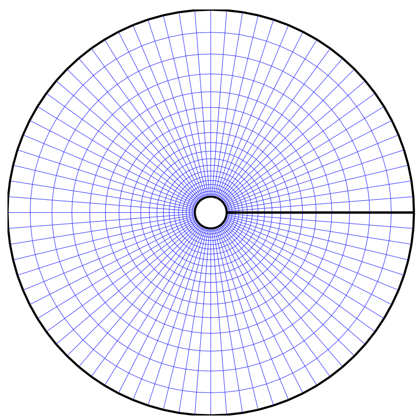
در این مطالعه، جریان خارجی با استفاده از روش شبکه بولتزمن بر مبنای بسط سری تیلور و حداقل مربعات با مدل شبکه D2Q9 مورد مطالعه قرار گرفته است.

۵-۱- جریان حول استوانه دایروی

در این بخش، جریان پایا و آرام حول استوانه دایروی مورد بررسی قرار گرفته است. به طوریکه آزمایشات تجربی و مطالعات عددی زیادی در این زمینه انجام گرفته است. اکثر مطالعات تجربی توسط حرکت جریان سیال می‌باشد. توسط این روش این موضوع ثابت شده است که به محض اینکه عدد رینولدز از یک مقدار ثابت تغییر یافته و افزایش می‌یابد ساختار جریان سیال تغییر می‌کند [۲۹].

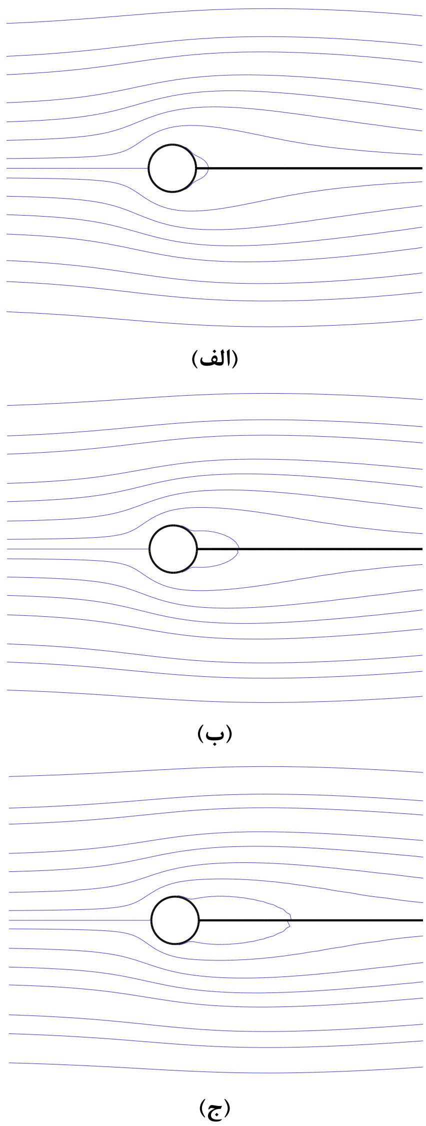
یکی از این اعداد، عدد رینولدز ۴۰ است که سیال در اطراف این عدد رفتاری متفاوت از خود نشان می‌دهد. در اعداد کمتر از این مقدار، جریان پایا می‌باشد و ساختار میدان سیال در دو طرف خط تقارن افقی استوانه، متقارن می‌باشد. فراتر از عدد رینولدز ۴۰ جریان از حالت پایا خارج شده و تقارن خود را از دست می‌دهد. در عین حال جریان‌های گردابه‌ای متناوبی نیز شکل می‌گیرند.

در این تحقیق، شبیه‌سازی عددی برای سه عدد رینولدز Re (که بر مبنای سرعت بالادست جریان U_∞ و قطر استوانه D تعریف شده است) ۱۰، ۲۰ و ۴۰ مورد بررسی قرار گرفته است. داده‌های گزارش شده از شبیه‌سازی برای اعداد رینولدز ۱۰، ۲۰ و ۴۰ با شبکه نوع O با اندازه ۱۲۱×۱۸۱و ۱۲۱×۲۴۱ به دست آمده است. نمونه‌ای از تولید شبکه در شکل ۵ نشان داده می‌شود. شرط مرزی دوردست نیز به اندازه ۲۵/۵ برابر قطر دایره برای Re برابر ۱۰ و ۵۰/۵ برابر قطر دایره برای Re برابر ۲۰ و ۴۰ دور از مرکز استوانه در نظر گرفته شده است.



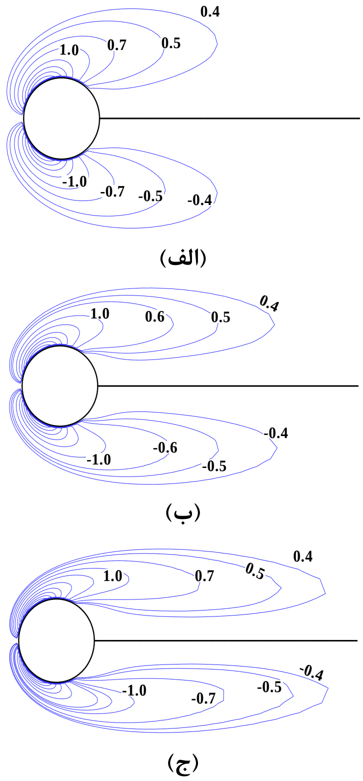
شکل ۵- شکل شماتیک شبکه غیر یکنواخت نوع O به کار رفته حول استوانه دایروی

شکل ۶ کانتورهای تابع جریان را برای سه عدد رینولدز ۱۰، ۲۰ و ۴۰ نشان می‌دهد. در هر سه حالت، یک جفت گردابه چرخشی پشت استوانه شکل می‌گیرد. دیده می‌شود که با افزایش عدد رینولدز طول ناحیه چرخشی که از نقطه پشت استوانه تا انتهای گردابه اندازه گیری می‌شود افزایش می‌یابد.



شکل ۶-کانتورهای تابع جریان حول استوانه دایروی برای اعداد رینولدز مختلف
(الف) Re=۱۰ (ب) Re =۲۰ (ج) Re=۴۰

شکل ۷ کانتورهای ورتیسیتی را نشان می‌دهد. دیده می‌شود که با افزایش عدد رینولدز قدرت گردابه و در نتیجه طول مؤثر آن افزایش می‌یابد. همچنین مقادیر منفی و مثبت ورتیسیتی نشان دهنده این است که دو چرخش ایجاد شده در پشت استوانه در جهت‌های مخالف هم می‌چرخند.



شکل ۷ کانتورهای ورتیسیته حول استوانه دایروی برای اعداد رینولدز مختلف
(الف) Re=۱۰ (ب) Re =۲۰ (ج) Re=۴۰

برای اطمینان از درستی نتایج کار حاضر طول ویک با نتایج مراجع مختلف مقایسه گردیده و در جدول ۱ داده شده است. همانطور که دیده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج کار حاضر و نتایج عددی و تجربی موجود در ادبیات فن وجود دارد.

شکل ۸ توزیع فشار را روی کل سطح استوانه برای اعداد رینولدز مختلف نشان می‌دهد. توزیع فشار روی سطح استوانه به شکل بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_p = (p - p_\infty) \Big/ \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \qquad (۲۶)$$

بالاترین فشار در نقطه سکون جلوی استوانه مشاهده می‌شود. با این حال، پایین‌ترین فشار در نقطه سکون پشت استوانه اتفاق نمی‌افتد. چون جریان لزج است، پایین‌ترین فشار در نقطه‌ای مشاهده می‌شود که ذرات سرانجام ساکن شده و توسط ذراتی که به دنبال آن می‌آیند از جسم جدا می‌شوند. بدین ترتیب ویک را می‌سازند و ویک نیز همواره دارای فشار نسبتاً کمی است.

جدول۱- مقایسه طول ویک در کار حاضر با نتایج عددی و تجربی موجود

Re	نتایج کار حاضر	نتایج [۷]	نتایج [۱۵]	نتایج [۳۰]
۱۰	۰/۴۸	۰/۶۸	۰/۴۷۴	–
۲۰	۱/۸۹	۱/۸۶	۱/۸۴۲	۱/۸۲
۴۰	۴/۵۱	۴/۲۶	۴/۴۹	۴/۴۸

شایان ذکر است که فشار در روش شبکه بولتزمن از یک معادله حالت به صورت معادله (۵) به دست می آید. رابطه بین فشار شبکه p و فشار فیزیکی p_p به صورت زیر است:

$$p_p = \rho_p c_{s,p}^2 = \rho_p \left[c_s^2 \left(\frac{\Delta x_p}{\Delta t_p} \right) \right]^2$$

$$= \rho_p \left(\frac{\Delta x_p}{\Delta t_p} \right)^2 \frac{p}{\rho}$$

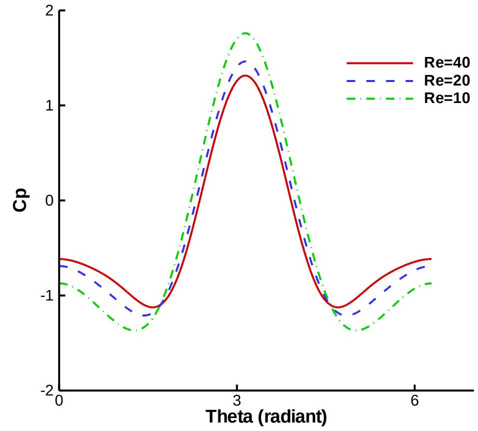
که در آن

$$\Delta t_p = \nu_p \Delta t \big/ (c_{s,p}^2 (\tau - \tfrac{1}{2}))$$

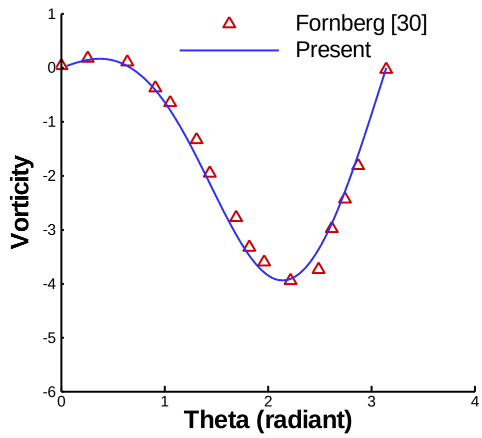
و اندیس p معرف کمیت (متغیر) فیزیکی می‌باشد.

شکل ۹ توزیع ورتیسیته را روی قسمتی از سطح استوانه برای دو عدد رینولدز مختلف ۲۰ و ۴۰ نشان می‌دهد. نتایج حاصل با نتایج عددی فرنبرگ[۱] [۳۰] که از حل معادلات ناویر استوکس به دست آمده نیز مقایسه شده است. همانطور که دیده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج وجود دارد.

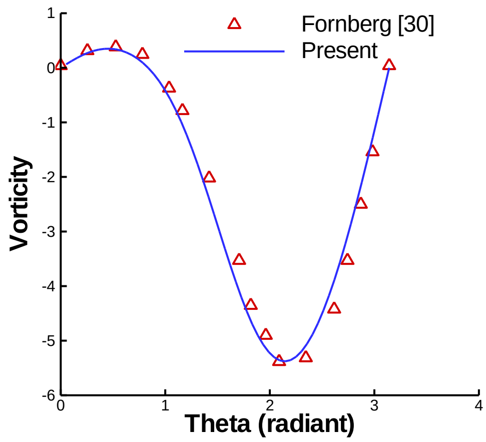
[1] Fernberg



شکل ۸- توزیع فشار روی سطح استوانه برای اعداد رینولدز- مختلف



(الف)

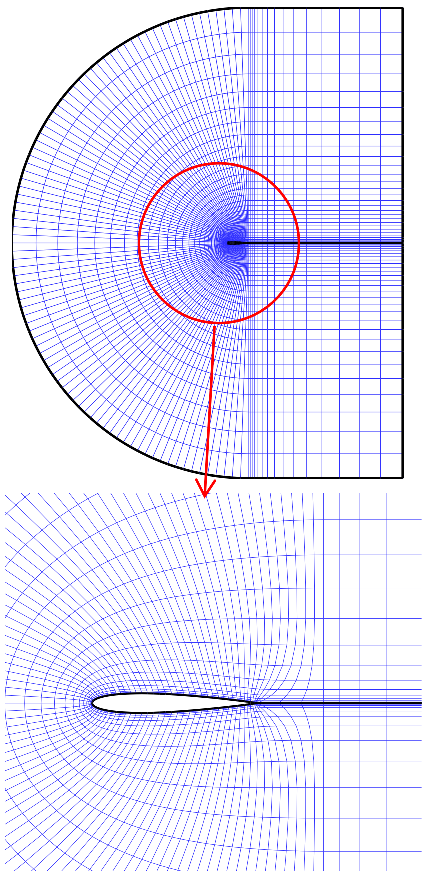


(ب)

شکل ۹- توزیع ورتیسیته روی سطح استوانه برای اعداد رینولدز ۲۰ (الف) و ۴۰ (ب)

۵-۲- جریان حول ایرفویل NACA0012

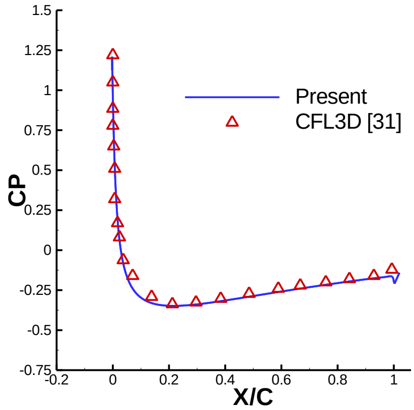
در این بخش جریان اطراف یک ایرفویل NACA0012 تحت زاویه های حمله صفر و چهار درجه با عدد ماخ جریان آزاد ۰/۲ و اعداد رینولدز ۵۰۰ و 5×10^{5} مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده از روش حاضر با نتایج حاصل از کد CFL3D[۳۱] مورد مقایسه قرار گرفته است. در اینجا، عدد رینولدز بر مبنای سرعت جریان آزاد و طول وتر ایرفویل تعریف شده است. در این شبیه‌سازی، مرز دامنه محاسباتی به اندازه ۵۰ برابر طول وتر ایرفویل در نظر گرفته شده است و برای تولید شبکه از یک شبکه غیریکنواخت نوع C با اندازه ۳۰۱×۸۳ استفاده شده است که نمونه‌ای از آن در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود.



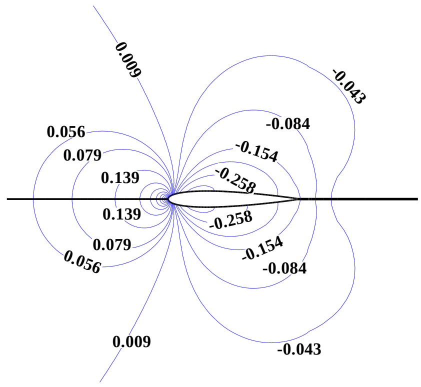
شکل ۱۰- شبکه غیر یکنواخت و متعامد C بکار رفته حول ایرفویل NACA0012

شکل‌های ۱۱ و ۱۲ به ترتیب توزیع فشار روی سطح ایرفویل و کانتورهای فشار حول آن را برای عدد رینولدز ۵۰۰ و عدد ماخ جریان آزاد ۰/۲ نشان می‌دهند. به طور روشن، مطابقت خوبی بین نتایج حاضر و نتایج به‌دست آمده از کد CFL3D وجود دارد.

برای مورد دوم جریان لزج تراکم‌ناپذیر را حول ایرفویل NACA0012 با رینولدز ۵ ×۱۰^۵ و عدد ماخ جریان آزاد ۰/۲ در نظر می‌گیریم. قابل توجه است هر چند که Re = ۵ ×۱۰^۵ عدد رینولدز بحرانی است و در آن گذار از جریان آرام به در-هم اتفاق می‌افتد اما در کار حاضر فقط معادلات ناویر-استوکس در رژیم جریان آرام حل شده است. در حالی که در کد CFL3D معادلات حاکم بر جریان توربولانت برای این مورد حل شده است.

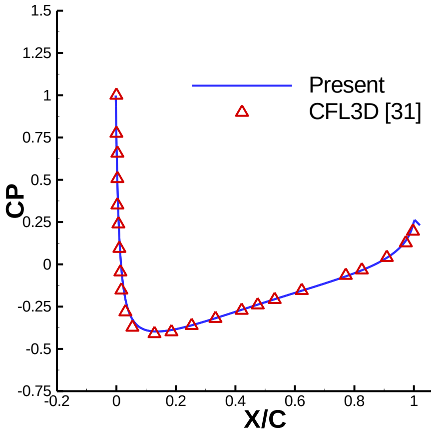


شکل ۱۱- توزیع فشار حول ایرفویل NACA0012، Re=۵۰۰، α=۰°

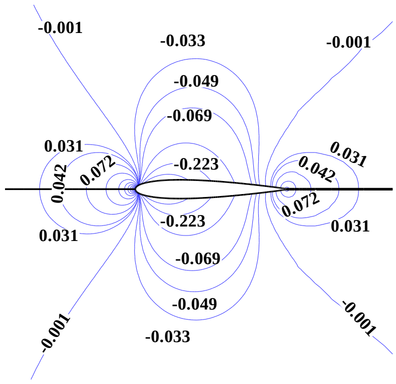


شکل ۱۲- کانتورهای فشار حول ایرفویل NACA0012، Re=۵۰۰، α=۰°

شکل‌های ۱۳ و ۱۴ به ترتیب توزیع فشار روی سطح ایرفویل و کانتورهای فشار حول آن را تحت زاویه حمله صفر درجه نشان می‌دهند. نتایج به دست آمده از روش حاضر با نتایج حاصل از کد CFL3D مورد مقایسه قرار گرفته است که از انطباق خوبی برخوردار است.

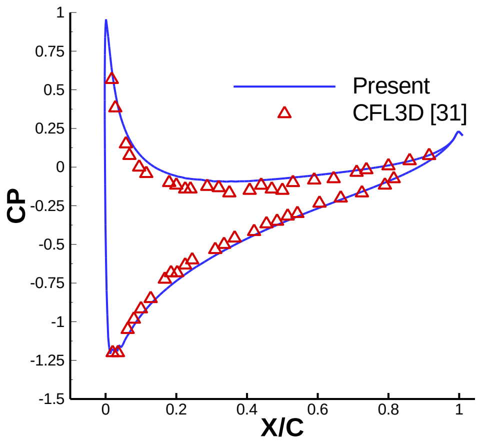


شکل ۱۳- توزیع فشار حول ایرفویل NACA0012، Re=۵×۱۰^۵، α=۰°

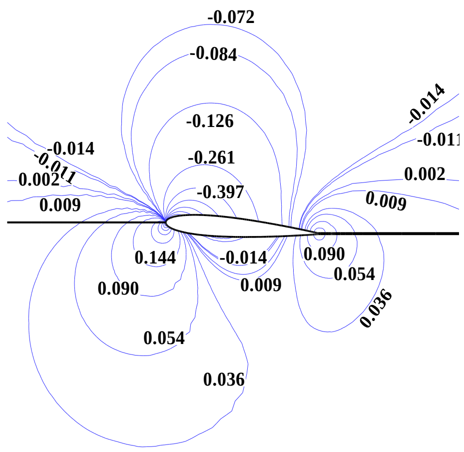


شکل ۱۴- کانتورهای فشار حول ایرفویل NACA0012، Re=۵×۱۰^۵، α=۰°

شکل‌های ۱۵ و ۱۶ به ترتیب توزیع فشار روی سطح ایرفویل و کانتورهای فشار حول آن را تحت زاویه حمله چهار درجه نشان می‌دهند. نتایج به دست آمده از روش حاضر با نتایج حاصل از کد CFL3D مورد مقایسه قرار گرفته است که از انطباق خوبی برخوردار است.



شکل ۱۵- توزیع فشار حول ایرفویل NACA0012، $\alpha=۴^\circ$، $Re=۵\times۱۰^{۵}$



شکل ۱۶- کانتورهای فشار حول ایرفویل NACA0012، $\alpha=۴^\circ$، $Re=۵\times۱۰^{۵}$

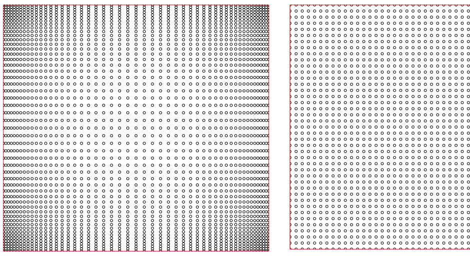
۵- ۳- نتیجه‌گیری

در کار حاضر، روش شبکه بولتزمن بر مبنای بسط سری تیلور و حداقل مربعات (TLLBM) با مدل شبکه D2Q9 برای شبیه سازی جریان خارجی لزج، تراکم ناپذیر و پایای دو بعدی در رژیم آرام با استفاده از شبکه‌های غیر یکنواخت بکار برده شد. این روش بر مبنای روش شبکه بولتزمن استاندارد با معرفی بسط سری تیلور و روش حداقل مربعات استوار است. در روش مذکور، معادله نهایی یک معادله صریح است و هیچ محدودیتی روی ساختار و مدل شبکه ندارد. دو مطالعه موردی بررسی گردید: الف) جریان حول استوانه دایروی با شبکه غیریکنواخت O، ب) جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه‌های حمله مختلف با شبکه غیر یکنواخت و متعامد C. مشاهده شد که این روش نتایج بسیار دقیقی به دست می‌دهد.

۶- پیوست: مقایسه روش TLLBM با LBM استاندارد از لحاظ حجم عملیات و دقت محاسبات

در حالت کلی، با بکارگیری تعداد نقاط شبکه یکسان برای حل یک مسأله خاص، روش LBM استاندارد نسبت به روش TLLBM به زمان محاسباتی کمتری نیاز دارد. از طرف دیگر با توجه به اینکه در روش TLLBM می‌توان از شبکه غیریکنواخت استفاده نمود، این روش نسبت به روش LBM استاندارد نیاز به نقاط شبکه کمتر و بنابراین زمان محاسباتی کمتر برای دستیابی به نتایج عددی دقیق دارد. به علاوه دقت مکانی و زمانی روش TLLBM نیز مانند روش LBM استاندارد از مرتبه دو می‌باشد [۱۹].

برای نشان دادن این موضوع که روش TLLBM نسبت به روش LBM استاندارد نیاز به نقاط شبکه کمتر و بنابراین زمان محاسباتی کمتر برای دستیابی به نتایج عددی دقیق دارد، شبیه سازی جریان پایای دو بعدی در یک حفره مربعی با درب متحرک بالایی به عنوان مثال عددی در نظر گرفته می‌شود. در این مسأله با حرکت دادن دیواره بالایی حفره، سیال داخل آن که در بتدا ساکن است به گردش در می‌آید. برای روش LBM استاندارد از شبکه یکنواخت و برای روش TLLBM از شبکه غیریکنواخت استفاده شده است (شکل پ۱ را ببینید). در هر دو حالت، عدد رینولدز که بر مبنای سرعت دیواره بالایی حفره محاسبه می‌شود برابر با ۴۰۰ در نظر گرفته شده و از مدل سرعت D2Q9 استفاده شده است (نتایج در اینجا نشان داده نشده است). در جدول پ۱ دیده می‌شود که روش TLLBM نسبت به روش LBM استاندارد به تعداد نقاط شبکه و نیز زمان محاسبات کمتری برای رسیدن به مرتبه دقت یکسان نیاز دارد. شایان ذکر است در صورتی که برای روش TLLBM هم از همان تعداد نقاط شبکه برای روش LBM استاندارد (۱۹۱×۱۹۱) استفاده می‌شد، زمان محاسبات برای آن بیشتر از روش LBM استاندارد بدست می‌آمد.



شکل پ۱- نمونه‌ای از شبکه یکنواخت (سمت راست) و شبکه غیریکنواخت (سمت چپ) برای حفره مربعی با درب بالایی متحرک

جدول پ۱- مقایسه حجم عملیات و دقت روش TLLBM نسبت به روش LBM استاندارد

روش	تعداد نقاط شبکه	زمان محاسباتی(ثانیه)
LBM	۱۹۱×۱۹۱	۷۶۸۷
TLLBM	۹۷×۹۷	۵۶۹۵

مراجع

[1] Niu XD, Shu C, Chew YT, Peng Y (2006) A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows. Phys Lett A 345: 173-182.

[2] Higuera FJ, Jemenez J (1989) Boltzmann approach to lattice gas simulations. Europhys Lett 9: 663-668.

[3] Hou S, Zou Q, Chen S, Doolen G, Cogley AC (1995) Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method. J Comput Phys 118: 329-347.

[4] He XY, Luo LS (1997) A priori derivation of the lattice Boltzmann equation. Phys Rev E 55: R6333.

[5] Honji H, Taneda S (1969) Flow past impulsively started bodies using Green's functions. J Phys Soc Jpn 27: 1968.

[6] Taneda S (1972) Recent research on unsteady boundary layer. Quebec Laval University 2.

[7] Coutanceau M, Bouard R (1977) Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1, Steady Flow, J Fluid Mech 79: 231-256.

[8] Coutanceau M, Bouard R (1977) Experimental detetermination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 2, Unsteady Flow, J Fluid Mech 79: 257-272.

[9] Bouard R, Coutanceau M (1958) The early stage of development of the wake behind an impulsively started cylinder for $40<Re<10^4$. J Fluid Mech 101: 583-607.

[10] Payen VA (1958) Calculations of unsteady viscous flow past a circular cylinder. J Fluid Mech 4: 81-88.

[11] Nobel DR, Georgiadis JG, Buckius RO (1996) Comparison of accuracy and performance for lattice Boltzmann and finite difference simulations of steady viscous flow. Int J Numer, Meth Fluids 23: 1-18.

[12] Higuera FJ, Succi S (1989) Simulating the flow around a circular cylinder with a lattice Boltzmann equation. Europhys Lett 8: 517-21.

[13] Wagner L (1994) Pressure in lattice Boltzmann simulations of flow around a cylinder. Phys Fluids 6: 3516-18.

[14] He X, Luo LS, Dembo M (1996) Some progress in lattice Boltzmann method. Part I Nonuniform Mesh Grids. J Comp Phys 129: 357-63.

[15] He X, Doolen GD (1997) Lattice Boltzmann method on curvilinear coordinates system: Flow around a circular cylinder. J Comput Phys 134: 306-315.

[16] Chew YT, Shu C, Niu X.D (2002) A new differential lattice Boltzmann equation and its application to simulate incompressible flows on non-uniform grids. Journal of Statistical Physics 107: 329-342.

[17] Filippova O, Hanel D (1998) Grid refinement for lattice BGK models. J Comput Phys 147(1): 219-228.

[18] Mei R, Luo LS, Shyy W (1999) An accurate curved boundary treatment in the lattice Boltzmann method. J Comput Phys 155(2): 307-330.

[19] Shu C, Chew YT, Niu XD (2001) Least-squares-based lattice Boltzmann method:A meshless approach for simulation of flows with complex ceometry. Phys Rev E 64: 045701.

[20] Niu XD, Chew YT, Shu C (2003) Simulation of flows around an impulsively started circular cylinder by Taylor series expansion and least squares based lattice Boltzmann method. Journal of Computational Physics 188: 176-193.

[21] McNamara G, Zanetti G (1988) Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. Phys Rev Lett 61: 2332-2335.

[22] Koelman JMVA (1991) A simple lattice Boltzmann scheme for Navier-Stokes fluid flow. Europhys Lett 15: 603-607.

[23] Qian YH, d'Humie'res D and Lallemand P (1992) Lattice BGK models for Navier Stokes equation. Europhys Lett 17: 479-84.

[24] Chen H, Chen S and Matthaeus WH (1992) Recovery of the Navier-Stokes equations using a

[28] Shu C (2001) Standard lattice Boltzmann method. Lecture Note: 111-173.

[29] Coutanceau M, Defaye JR (1991) Circular cylinder wake configurations-A flow visualization survey. Appl Mech Re 44(6): 255-305.

[30] Fornberg B (1980) A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. J Fluid Mech 98: 819-855.

[31] Lockard DP, Luo LS, Milder SD, Singer BA (2002) Evaluation of power flow for aerodynamic applications. J Statist Phys 102(1-2): 423-478.

lattice-gas Boltzmann method. Phys Rev A 45: R5339-42.

[25] d̉Humie’res D (1992) Generalized lattice Boltzmann equations, In Shizgal D, Weaver DP, editors. Rarefied Gas Dynamics: theory and simulations. Prog Astronaut Aeronaut 159: 450-8.

[26] Ziegler DP (1993) Boundary conditions for lattice Boltzmann simulations. J Stat Phys 71: 1171-77.

[27] Zou Q, He X (1997) On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. Phys Fluids 9: 1591-98.