



## تحلیل عددی جریان ترکیبی الکترواسموتیک / فشار محرک با استفاده از یک روش بهبود یافته هیدرودینامیک ذرات هموار تراکم پذیر ضعیف

مجتبی دهقان زاده بافقی<sup>۱</sup>، محمد سفید<sup>۲\*</sup>، رحیم شمس الدینی<sup>۳</sup> و سید امیر مسعود صالحی زاده<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد    <sup>۲</sup> استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد  
<sup>۳</sup> استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه سیرجان، سیرجان    <sup>۴</sup> دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد  
مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۱۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۲۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۱/۳۱

### چکیده

مطالعه حاضر به بررسی و تحلیل عددی جریان الکترواسموتیک همراه با فشار محرک در سیالات نیوتنی می‌پردازد. معادلات دو بعدی لاپلاس، پواسون-بولتزمن و مومنوم با استفاده از روش هیدرودینامیک ذرات هموار در یک میکروکانال مستطیلی به صورت عددی حل می‌شوند. به منظور بهبود روش هیدرودینامیک ذرات هموار از یک الگوریتم بهبود یافته و خوش رفتار برای تحلیل مسائل در میکروکانال‌ها استفاده شده است. جهت اعتبارسنجی الگوریتم، اثر پارامترهای پتانسیل زتا و گرادیان فشار اعمالی مورد بررسی قرار گرفته است و با نتایج تحلیلی و عددی مقایسه شده است. در وصله میانی میکروکانال که پتانسیل الکتریکی حضور دارد، نیروی حجمی ناشی از جریان الکترواسموتیک روی توزیع سهموی سرعت اثر گذاشته و این اثر در مقاله مورد بحث قرار گرفته و تاثیر تغییر پتانسیل زتا و گرادیان فشار اعمالی روی جریان نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش گرادیان فشار اعمالی سبب می‌شود، سهم توزیع سهموی سرعت در پروفیل سرعت در ناحیه ترکیبی بیشتر شود و توزیع سرعت به سهموی تخت نزدیک شود؛ درحالیکه افزایش پتانسیل زتا سبب می‌شود، سرعت در لایه دوگانه الکتریکی بیشتر شده و توزیع سرعت به شکل زین اسبی در آید.

**کلمات کلیدی:** جریان الکترواسموتیک؛ هیدرودینامیک ذرات هموار؛ میکروکانال مستطیلی.

## Numerical Analysis of Mixed Electroosmotic/Pressure Driven Flow Using an Improved Weakly Compressible Smoothed Particle Hydrodynamics Method

M. Dehghanzadeh Bafghi<sup>1</sup>, M. Sefid<sup>2\*</sup>, R. Shamsoddini<sup>3</sup>, A. M. Salehizadeh<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Ph.D. Student, Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.    <sup>2</sup> Prof., Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.  
<sup>3</sup> Assistant. Prof., Mech. Eng., Sirjan Univ., Sirjan, Iran.    <sup>4</sup> Ph.D, Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.

### Abstract

This study investigates a numerical analysis of the electroosmotic / pressure driven flow in Newtonian fluids. Laplace, Poisson-Boltzmann and Momentum two-dimensional equations are solved numerically in a rectangular microchannel using the smooth particle hydrodynamics method. In order to improve the smooth particle hydrodynamics method, an improved and well-behaved algorithm has been used to solve problems in microchannels. To validating the algorithm, the effect of the zeta potential and the applied pressure gradient parameters on the flow has also been researched and compared with analytical and numerical results. In the middle patch of the microchannel where there is an electric potential, the volumetric force caused by the electroosmotic flow affects the parabolic velocity distribution and this impact is discussed in this article. The effect of changing the zeta potential and pressure gradient on the flow has been shown as well. The results show increasing in the applied pressure gradient increases the share of the parabolic of velocity distribution in the velocity profile in the mixed region and the velocity distribution becomes flat parabolic, while increasing the zeta potential increases the velocity in the electric double layer and the velocity distribution takes the form of a horse saddle.

**Keywords:** Electroosmotic Flow; Smooth Particle Hydrodynamics; Rectangular Microchannels.

## ۱- مقدمه

در دو دهه گذشته، تکنولوژی تراشه‌های آزمایشگاهی پیشرفت‌های زیادی را در زمینه توسعه ریزسیستم‌ها به همراه داشته است. این پیشرفت‌ها را به خصوص می‌توان در کاربردهای شیمی، بیولوژیکی و پزشکی مشاهده کرد. مخلوط کننده‌های میکروالکتروسینتیکی به دلیل سهولت کنترل و ادغام با دستگاه‌های میکرو سیالی، بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۱].

الکترواسموتیک یکی از چهار پدیده الکتروسینتیک است که با اعمال یک میدان الکتریکی روی یک الکترولیت یونیزه شده در مجاور سطح دی الکتریک باردار تشکیل می‌شود. میدان الکتریکی روی لایه دوگانه الکتریکی<sup>۱</sup> اثر گذاشته و سبب حرکت سیال می‌شود. پدیده الکترواسموسیس برای اولین بار توسط روسو [۲] گزارش شد که دریافت که با استفاده از یک ولتاژ الکتریکی اعمالی به خاک رس می‌توان آب را در آن به جریان انداخت. موله‌و و همکاران [۳]، مطالعات تجربی را در میکروکانال‌های الکتروسینتیکی با فشار محرک انجام و نشان داده‌اند که گرادیان فشار اعمالی ممکن است، جریان را در یک میکروسیستم الکتروسینتیکی آشفته کند. کامینگز و همکاران [۴] جریان الکتریکی ایده آل را معرفی کردند و آنها شرایط لازم و کافی برای تشابه بین سرعت سیال و میدان الکتریکی را مورد بررسی قرار دادند. یانگ و لی [۵]، یک مدل عددی برای جریان الکترواسموتیک با استفاده از تقریب دبای هوگل انجام دادند. یک طرح عددی برای شبیه سازی جریان‌های الکترواسموتیکی در هندسه‌های پیچیده توسط پاتانکار و هو [۶] گسترش یافته که در آن جریان‌های تحت میدان الکتریکی با شدت بالا مورد بررسی قرار گرفته است. بدون فرض لایه الکتریکی نازک، رن و لی [۷] معادله غیر خطی پواسون-بولتزمن و معادله حرکت را به صورت عددی برای پتانسیل زتا یکنواخت حل کردند و اثر مقدار و جهت پتانسیل زتا روی نرخ سرعت جریان و توزیع فشار را مورد بررسی قرار داده‌اند. هو و چائو [۸]، یک میکروپمپ الکترواسموتیکی را به صورت عددی و تجربی مورد بررسی قرار داده‌اند و تأثیر تغییر طول دیبای، غلظت یونی محلول

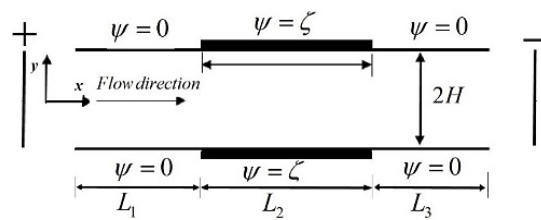
بالک مورد بررسی قرار دادند. آنها یک مدل ریاضی جدید را منتشر کردند تا توزیع یون‌ها و پتانسیل‌های موجود در پمپ را به صورت بی بعد و با بعد پیش بینی کنند. دوتا و همکاران [۹] اثر الکترواسموتیکی را در جهت جریان در نظر گرفته و جریان ترکیبی از الکترواسموتیک و فشاری را به صورت عددی تجزیه و تحلیل کرده و میدان سرعت و فشار را بررسی کرده‌اند. دوتا و بشکوک [۱۰]، یک راه حل تحلیلی برای توزیع پتانسیل الکتروسینتیک ارائه کرده‌اند. آنها ضخامت لایه دوگانه الکتریکی مؤثر را توصیف می‌کنند و از راه حل‌های تحلیلی برای سرعت، فشار و تنش برشی با استفاده از معادلات حرکت جریان بدست می‌آورند. رامیرز و کالیسک [۱۱]، جریان الکترواسموتیکی درون نانو ساختارها را با تغییرات ناگهانی در ارتفاع شبیه سازی کردند و تغییرات ویژگی‌های میدان جریان را بررسی کردند. باتکریا و برا [۱۲] جریان‌های الکترواسموتیکی همراه با فشار را داخل میکروکانال‌های مستقیم با پتانسیل زتا ناهمگن شبیه سازی کردند. سان و شی [۱۳] با استفاده از روش تجربی، جریان الکترواسموتیک را درون میکروکانال واگرا تحت جریان الکترواسموتیک دوره‌ای بررسی کرده‌اند.

ما در این مقاله سعی داریم، میکرو پمپ الکتروسینتیکی را مورد بررسی قرار دهیم. میکرو پمپ‌های الکتروسینتیکی می‌تواند همراه با گرادیان فشار باشد که در این صورت به آنها میکرو پمپ‌های الکترواسموتیکی همراه با فشار اعمالی<sup>۲</sup> اطلاق می‌شود یا می‌تواند تنها ناشی از اثرات الکتروسینتیکی باشد. حل ترم غیر خطی نمایی مرتبط با تابع سینوس هایپربولیک در معادله پواسون بولتزمن همیشه مسئله‌ای چالش برانگیز بوده است. در این مطالعه سعی شده با استفاده از روش هیدرودینامیک ذرات هموار و حذف وابستگی‌های شبکه‌ای این چالش را برطرف نماییم. تاکنون هیچ مطالعه لاگرانژی در زمینه جریان‌های الکترواسموتیک انجام نشده است. در این مطالعه سعی شده که با استفاده از روش هیدرودینامیک ذرات هموار این نوع جریان‌ها از دیدگاه لاگرانژی بررسی شود و همچنین سعی شده تا با بررسی پارامتریک گرادیان فشار اعمالی و پتانسیل زتا، تأثیر این پارامترها را روی الگوی جریان بررسی کنیم.

<sup>2</sup> Electroosmotic/Pressure Driven<sup>1</sup> Electric Double Layer

## ۲- شرح مسئله

در شکل ۱ میکروکانال مورد بررسی نمایش داده شده است. میکروکانال دو بعدی دارای ارتفاع  $2H$  و دارای طولی برابر  $L_1 + L_2 + L_3$  است. طول میکروکانال به سه قسمت مطابق شکل تقسیم شده است که قسمت وسط شامل ماده‌ای است که دارای اثرات الکترواسموتیکی است؛ در حالی که ابتدا و انتهای میکروکانال اثرات الکترواسموتیکی در آن صرف نظر شده است. میکروکانال با یک سیال الکترولیتی نیوتنی با چگالی و دانسیته ثابت پر شده است.



شکل ۱- میکروکانال الکترواسموتیک مورد بررسی

مطلق است. با جایگذاری معادله (۲) در معادله (۱) و استفاده از توزیع بولتزمن برای گونه یونی، معادله شناخته شده پواسون بولتزمن به شکل (۳) حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{2ze n_{\infty}}{\epsilon} \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T}\right) \quad (3)$$

ضخامت لایه دوگانه الکتریکی به طور تقریبی توسط طولی دیبای  $\lambda_D$  تقریب زده می‌شود. طول دیبای مشخصه‌ای از محلول الکترولیت است و بستگی به غلظت مولی سیال دارد و ضخامت آن می‌تواند توسط پارامتر دیبای هوگل  $\tau$  تخمین زده شود.

$$\tau = \frac{1}{\lambda_D} = \frac{2z^2 e^2 n_{\infty}^{1/2}}{\epsilon k_B T} \quad (4)$$

اعمال میدان الکتریکی خارجی روی سیال باردار، منجر به ایجاد یک نیروی الکتریکی خالص  $(\rho_e E_x)$  روی سیال نزدیک به دیواره‌های میکروکانال می‌شود.  $E_x$  قدرت میدان الکتریکی موثر است که برابر با رابطه (۵) است:

$$E_x = -\nabla \Phi \quad (5)$$

که در آن  $\Phi$  پتانسیل کلی ناشی از جمع خطی پتانسیل لایه دوگانه الکتریکی  $\psi$  و پتانسیل میدان الکتریکی اعمالی خارجی  $\phi$  است (یعنی  $\Phi = \psi + \phi$ ). پتانسیل میدان الکتریکی اعمالی خارجی با حل معادله لاپلاس حاصل می‌شود.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (6)$$

## ۳-۲- معادلات حاکم بر جریان سیال

هنگامی که یک جریان الکتریسته به لایه دوگانه الکتریکی وارد می‌شود. جریان الکترواسموتیک حاصل می‌شود. جریان دوبعدی، غیرقابل تراکم و آرام برای یک سیال نیوتنی در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر مسئله به ترتیب معادله بقای جرم، منتوم و معادله حالت می‌باشند.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot V \quad (7)$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = \mu \nabla^2 V + \rho g - \nabla P + \rho_e E_x \quad (8)$$

$$P - P_0 = C^2 (\rho - \rho_0) \quad (9)$$

که در این روابط  $\rho$  چگالی،  $V$  سرعت،  $P$  فشار،  $g$  شتاب گرانش،  $\mu$  لزجت سیال و  $C$  سرعت صوت می‌باشند و  $d$  معرف مشتق مادی است.  $\rho_e E_x$  نیروی حجمی ناشی از اعمال میدان الکتریکی روی سیال است.

## ۳- معادلات حاکم و شرایط مرزی

## ۳-۱- معادله پواسون بولتزمن

حضور یک سطح باردار در یک محلول الکترولیت توزیع یون نزدیک به آن را تحت تأثیر قرار می‌دهد. یون‌های با بار مخالف سطح به سمت سطح جذب می‌شود؛ در حالیکه یون‌های همسان با بار سطح از سطح دفع می‌شود؛ در نتیجه نیروهای جاذبه و دافعه بین یون‌ها در محلول الکترولیت و سطح باردار، یک توزیع غیریکنواخت یونی عمود به سطح به وجود می‌آید. چنین توزیع مجدد یون‌های آزاد در محلول منجر به تشکیل لایه دوگانه الکتریکی می‌شود. توزیع پتانسیل الکتریکی در محلول ناشی از حضور لایه دوگانه الکتریکی  $\psi$  توسط معادله پواسون بولتزمن توصیف می‌شود.

$$\epsilon \nabla^2 \psi = -\rho_f \quad (1)$$

$\rho_f$  چگالی بار فضایی یون‌های آزاد متحرک و  $\epsilon$  گذردهی دی الکتریک محلول است. برای یک محلول الکترولیت متقارن  $z_+ = z_- = z$  و با به کار بردن توزیع بولتزمن برای غلظت یونی داریم:

$$\rho_f = e(z_+ - z_-) = -2n_{\infty} z e \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T}\right) \quad (2)$$

که در آن  $n_{\infty}$  غلظت یونی محلول بالک،  $z$  ظرفیت یونی،  $e$  مقدار بار اساسی در یک الکترون،  $k_B$  ثابت بولتزمن و  $T$  دمای

### ۳-۳- شرایط مرزی

در ورودی میکروکانال جهت حذف اثرات ورودی از یک توزیع سرعت سهموی با ماکزیمم سرعت  $u_{in}$  استفاده شده است که نماینگر جریان پوزایه کاملاً توسعه یافته است. در دیواره‌های میکروکانال هیچ لغزشی وجود ندارد و از شرط مرزی عدم لغزش استفاده شده است. گرادیان فشار در طول میکروکانال ثابت فرض شده است. برای بررسی اثر گرادیان فشار روی جریان، گرادیان‌های فشار ثابت با چند توزیع سرعت سهموی با ماکزیمم سرعت  $u_{in}$  در ورودی داده شده است. برای میدان الکتریکی خارجی یک پتانسیل ثابت  $\varphi_{in}$  در ورودی میکروکانال و یک پتانسیل ثابت  $\varphi_{out}$  در خروجی میکروکانال داده شده است و شار پتانسیل  $(\partial\varphi/\partial x)$  در دیواره‌های میکروکانال صفر در نظر گرفته می‌شود. معادله پتانسیل الکترواسموتیک با در نظر گرفتن شار صفر در ورودی و خروجی و الگوی توزیع پتانسیل زتا  $\zeta$  در شکل ۱ حل می‌شود یعنی:

در دیواره میکروکانال  $\left. \begin{matrix} L_1 \leq x \leq L_3 & \psi = \zeta \\ x \leq L_1, x \geq L_1 + L_2 & \psi = 0 \end{matrix} \right\}$  برای حل معادله مومنوم سرعت عمودی و افقی در دیواره‌های میکروکانال صفر فرض شده است.  $(u = v = 0)$  در  $(y = \pm h)$  و از شرط کاملاً توسعه یافته برای سرعت  $\partial u / \partial x = 0$  در خروجی میکروکانال استفاده شده است.

### ۴- روش هیدرودینامیک ذرات هموار

#### ۴-۱- فرمول بندی

هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) برای حل معادلات حاکم به کار رفته است. SPH یک طرح گسسته سازی لاگرانژی بدون شبکه است که در آن محیط پیوسته با تعداد محدودی از نقاط محاسباتی گسسته شده است. SPH از یک روش نمایشی انتگرال در یک فرم ضعیف با استفاده از یک تابع هموارساز با یک دامنه درون‌یابی استفاده می‌کند که دامنه پشتیبانی نامیده می‌شود. اگر  $f$  یک تابع دلخواه در دامنه پشتیبانی  $\Omega$  باشد، می‌توان رابطه (۱۰) را نوشت:

$$f(r) = \int_{\Omega} f(r') W(r - r', h) dr' \quad (10)$$

که در آن  $r$  و  $r'$  به ترتیب بردار موقعیت و متغیر زیر انتگرالی،  $W$  تابع کرنل وزنی و  $h$  را اصطلاحاً طول هموار می‌نامند. معادله (۱۰) را می‌توان به صورت یک سری گسسته سازی در دامنه تقریب زد.

$$f(r) = \sum_{j=1} \omega_j f_j W(r - r', h) \quad (11)$$

$\omega_j$  حجم ذره  $j$  ام است. در این مطالعه از تابع وندلند مرتبه ۵ برای تابع کرنل استفاده شده است [۱۴]. تحقیقات اخیر نشان داده که استفاده از این تابع نیازهای ما را از جهت دقت و هزینه محاسباتی تامین می‌کند.

$$W(r, h) = 7/\pi h^2 \begin{cases} (1-s)^4(4s+1) & 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & s \geq 1 \end{cases} \quad (12)$$

اگر  $f$  و  $F$  به ترتیب نماد متغیر میدان اسکالر و برداری می‌باشند. برای انفصال جملات با مشتقات مرتبه اول از طرح-های زیر استفاده می‌شود:

$$\langle \nabla f \rangle_i = \sum_j \omega_j (f_j - f_i) B_i \cdot \nabla W_{ij} \quad (13)$$

$$\langle \nabla F \rangle_i = \sum_j \omega_j (F_j - F_i) \cdot (B_i \cdot \nabla W_{ij}) \quad (14)$$

تانسور  $B$  تانسور نرمال ساز مرتبه اول است که پیش از این توسط بانت و لاک [۱۵] برای تصحیح مشتق مرتبه اول تابع کرنل معرفی شده است:

$$B_i = \left[ \sum_j \omega_j r_{ji} \nabla W_{ij} \right]^{-1} \quad (15)$$

برای گسسته سازی مشتق مرتبه دوم از روش فاتی و منظری [۱۶] استفاده شده است.

$$\langle \nabla^2 f \rangle_i = \hat{B}_i : \sum_j 2\omega_j e_{ij} \nabla W_{ij} \left( \frac{f_j - f_i}{r_{ij}} - e_{ij} \cdot \langle \nabla f \rangle_i \right) \quad (16)$$

که  $e_{ij}$  بردار در جهت بردار جهت بین ذره  $i$  به  $j$  است و  $\hat{B}_i$  تانسور نرمال‌ساز لاپلاسیان است که با معادله (۱۷) داده شده است.

$$\hat{B}_i : \left[ \sum_j \omega_j r_{ij} e_{ij} e_{ij} \nabla W_{ij} + \left( \sum_j \omega_j e_{ij} e_{ij} \nabla W_{ij} \right) \cdot B_i \left( \sum_j \omega_j r_{ij} r_{ij} \nabla W_{ij} \right) \right] = -I \quad (17)$$

در این طرح یک سرعت میانی ( $\bar{V}$ ) معرفی می‌شود که این سرعت میانی بدون در نظر گرفتن ترم فشار و ناشی از شتاب گرانش و لزجت است:

$$\left(\frac{\bar{V} - V^n}{\Delta t}\right) = v \langle \nabla^2 V^n \rangle + g + \frac{\rho_e E_x}{\rho} \quad (20)$$

در نتیجه سرعت کل خواهد بود.

$$V^{n+1} = \bar{V} - \left\langle \frac{\nabla P^n}{\rho} \right\rangle \quad (21)$$

با انفصال معادله حالت یعنی معادله (۹) داریم:

$$\rho^{n+1} = \rho^n (1 - \Delta t \langle \nabla \cdot V \rangle^{n+1}) \quad (22)$$

با اعمال دیورژانس بر معادله (۲۱) و جایگذاری در معادله (۲۲) داریم:

$$\rho^{n+1} = \rho^n \left( 1 - \Delta t \left[ \langle \nabla \cdot \bar{V} \rangle - \Delta t \left\langle \nabla \cdot \frac{\nabla P^n}{\rho} \right\rangle \right] \right) \quad (23)$$

با این چگالی می‌توان معادله حالت فشار را به صورت رابطه (۲۴) بیان کرد:

$$p^{n+1} = P_0 + C^2 \left( \rho^n \left( 1 - \Delta t \left[ \langle \nabla \cdot \bar{V} \rangle - \Delta t \left\langle \nabla \cdot \frac{\nabla P^n}{\rho} \right\rangle \right] \right) - \rho_0 \right) \quad (24)$$

پس از محاسبه فشار، سرعت ذرات به صورت رابطه (۲۵) تصحیح می‌شود:

$$V^{n+1} = \bar{V} - \left\langle \frac{\nabla P}{\rho} \right\rangle^{n+1} \quad (25)$$

نهایتاً موقعیت جدید ذرات محاسبه می‌شود:

$$r^{n+1} = r^n + V^{n+1} \Delta t \quad (26)$$

## ۵- بررسی نتایج

مولفه‌های سرعت در جهت  $x$  و  $y$  با سرعت مرجع  $U_{ref}$  بی‌بعد شده‌اند. ( $V^* = v/U_{ref}$  و  $U = u/U_{ref}$ )، پتانسیل الکترواستاتیک با  $\zeta$  ( $\psi^* = \psi/\zeta$ ) و مختصات در راستای طولی و در راستای عرضی با نصف ارتفاع میکروکانال، یعنی  $H$  بی‌بعد شده‌اند. ( $\xi = x/H$  و  $\eta = y/H$ ) و فشار با  $\mu U_{ref}/H$  ( $P^* = PH/\mu U_{ref}$ ) بی‌بعد شده است. براساس رینولدز مرجع محاسبه می‌شود که به صورت  $Re_{ref} = \rho U_{ref} 2H/\mu$  تعریف می‌شود. نتایج برای رینولدز مرجع  $Re_{ref} = 0.005$  ارائه شده است.

جدول ۱ پارامترها و ثابت‌های مورد استفاده برای شبیه‌سازی عددی را در این مقاله نشان می‌دهد.

برای اعمال شرایط مرزی از ذرات مجازی استفاده می‌شود. این ذرات مطابق طرح لی و همکاران [۱۷] به کار رفته است. این ذرات دارای سرعتی برابر با سرعت ذرات دیوار متناظر با خود هستند و برای دیوار ساکن، در راستای عمود بر دیوار دارای فشار یکسان و برابر با ذره دیوار هستند. با اصلاح معادله (۳) و استفاده از بسط تیلور معادله به شکل زیر گسسته سازی شده است.

$$\sum_j 2\omega_j (\psi_i^{k+1} - \psi_j^{k+1}) \frac{e_{ij} \cdot (B_i \cdot \nabla W_{ij})}{|r_{ij}|} = \frac{2ze n_\infty}{\epsilon} \left[ \sinh \left( \frac{ze \psi_i^k}{k_B T} \right) + \frac{ze}{k_B T} (\psi_i^{k+1} - \psi_i^k) \cosh \left( \frac{ze}{k_B T} \psi_i^k \right) \right] \quad (18)$$

که بالانویس  $k$  مقدار محاسبه شده در تکرار قبلی را نشان می‌دهد و بالانویس  $k+1$  مقدار در تکرار جدید را نشان می‌دهد.

## ۴-۲- الگوریتم بهبود یافته هیدرودینامیک ذرات هموار تراکم پذیر ضعیف

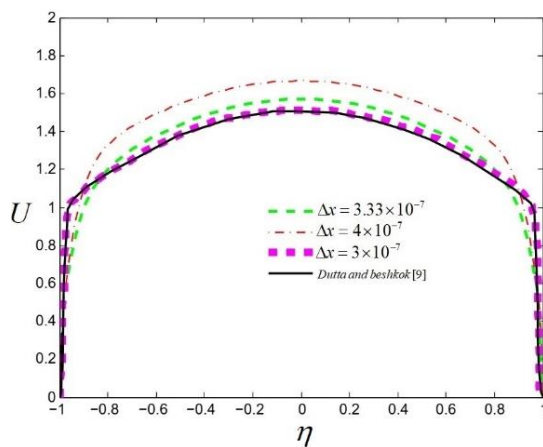
یکی از روش‌های استاندارد به کار رفته در حل مسائل، روش هیدرودینامیک ذرات هموار با تراکم پذیری ضعیف (WCSPH) است. عیب روش WCSPH استاندارد این است که دارای نوسانات شدید غیر فیزیکی است که وجود این نوسانات در مرجع [۱۷] گزارش شده است. تلاش‌هایی جهت حذف این نوسانات شده است که موفقترین طرح ارائه شده در مرجع [۱۸] است که از یک فیلتر فشاری جهت حذف نوسانات استفاده کرده است. در این مطالعه از یک طرح پیش بینی مصحح [۱۹] استفاده شده است. در این روش یک سرعت میانی بدون در نظر گرفتن ترم فشار در نظر گرفته می‌شود و سپس فشار جدید محاسبه و در سرعت جدید لحاظ می‌شود.

با تقسیم معادله (۸) بر چگالی ( $\rho$ ) انفصال معادله به شکل (۱۹) خواهد بود.

$$\left(\frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t}\right) = v \langle \nabla^2 V^n \rangle + g + \frac{\rho_e E_x}{\rho} - \left\langle \frac{\nabla P^n}{\rho} \right\rangle \quad (19)$$

جدول ۱- مشخصات پارامترها و ثوابت

$1000 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	چگالی سیال	$\rho$
$70.8 \times 10^{-12} \text{ (C/V.m)}$	گذردهی دی الکترونیک محلول	$\epsilon$
1	ظرفیت یونی	$z$
$1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$	بار مینای الکترون	$e$
$1.38 \times 10^{-23} \text{ J/k}$	ثابت بولتزمن	$k_b$
300 K	دمای مطلق	$T$
-25.4 mv	پتانسیل زتا	$\zeta$
10 v	میدان الکتریکی خارجی در ورودی	$\varphi_{in}$
0 v	میدان الکتریکی خارجی در خروجی	$\varphi_{out}$
10 $\mu\text{m}$	نصف ارتفاع میکروکانال	$H$
31 $\mu\text{m}$	طول قسمت‌های میکروکانال	$L_1, L_2, L_3$
100 nm	طول دیبای	$\lambda_D$

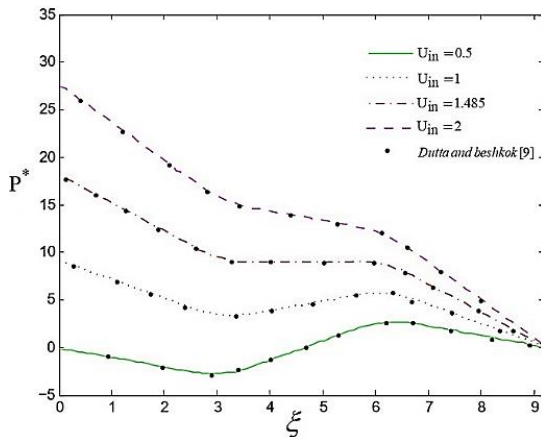


شکل ۲- توزیع سرعت بی بعد در مرکز میکروکانال برای  $U_{in} = 2$  برای سه فاصله ذره  $\Delta x = 4 \times 10^{-7}$  و  $\Delta x = 3.33 \times 10^{-7}$  و مقایسه با حل مرجع [۹]

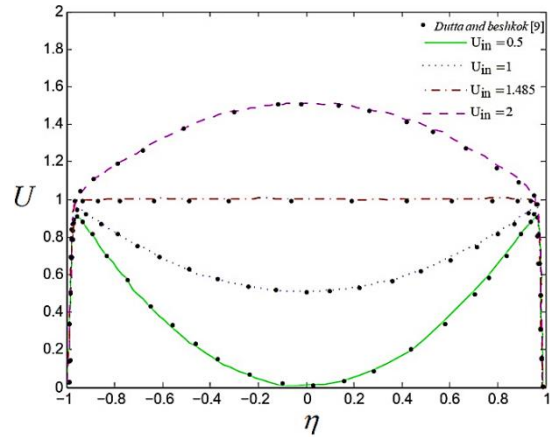
برقرار است و گرادیان فشار حضور ندارد. در  $U_{in} = 2$  نیروی فشار و نیروی الکترواسموتیک هم جهت بوده و سرعت که ترکیبی از پروفیل سرعت سهموی و پلاگ گونه است، به

حل عددی با مطالعه دوتا و بشکوک [۹] اعتبار سنجی شده است که حل عددی و تحلیلی انجام داده‌اند. برای بررسی همگرایی و استقلال حل از ذره، توزیع سرعت برای سه تعداد فاصله ذرات  $\Delta x = 3.33 \times 10^{-7}$  و  $\Delta x = 4 \times 10^{-7}$  و  $\Delta x = 3 \times 10^{-7}$  مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۲ نتایج برای این سه فاصله ذرات برای توزیع سرعت بی بعد در وسط میکروکانال با  $U_{in} = 2$  را نشان می‌دهد. نتایج همگرایی سرعت را در  $\Delta x = 3 \times 10^{-7}$  با حل مرجع [۹] نشان می‌دهد و این نشان می‌دهد که برای فاصله ذرات برابر و کمتر از  $\Delta x = 3 \times 10^{-7}$  حل از ذرات مستقل است و همگرایی قابل حصول است.

شکل ۳ سرعت بی بعد محوری را بر حسب عرض بی بعد در مرکز میکروکانال یعنی در  $\xi = 4.5$  برای  $U_{in}$  مختلف نمایش می‌دهد. انطباق نتایج حل با حل تحلیلی و عددی مرجع [۹] مشهود است. بعضی از پروفیل‌های سرعت نشان از گرادیان فشار مطلوب و بعضی نشان از گرادیان فشار معکوس دارد. در  $U_{in} = 1.485$  پروفیل سرعت پلاگ گونه است که نشان از این است که در این قسمت تنها جریان الکترواسموتیک



شکل ۴- توزیع فشار بی بعد در خط مرکزی برای  $U_{in}$  مختلف

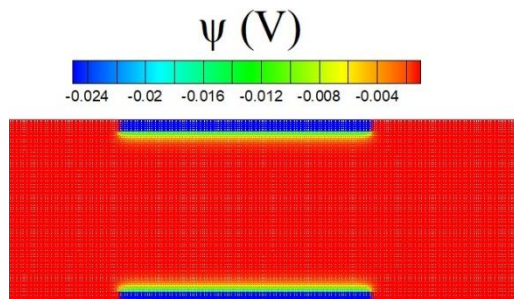


شکل ۳- توزیع سرعت بی بعد در مرکز میکروکانال برای  $U_{in}$  مختلف و مقایسه با حل مرجع [۹]

که فشار در ورودی صرف غلبه بر دراگ اصطکاکی شده و ناحیه الکترواسموتیکی فشار مورد نیاز برای جریان را تامین نموده است.

در شکل ۵ کانتور توزیع پتانسیل الکتریکی در میکروکانال نمایش داده شده است؛ همچنین در شکل چیدمان ذرات نیز نمایش داده شده است. جهت نمایش بهتر توزیع میدان الکتریکی، شکل در ناحیه میانی میکروکانال بزرگنمایی شده است. تغییرات شدید میدان پتانسیل الکتریکی از مقدار ماکزیمم تا فاصله کوتاهی از دیوار مشهود است که این فاصله لایه دوگانه الکتریکی است، بجز در این ناحیه پتانسیل در بقیه نواحی صفر است.

شکل ۶ کانتور سرعت بی بعد در راستای  $y$  را برای مقدار سرعت ورودی  $U_{in} = 2$  نمایش می‌دهد. همانطور که از شکل مشهود است، سرعت در راستای عمودی در ناحیه توسعه یافته میکروکانال صفر است، اما در ورودی و خروجی ناحیه



شکل ۵- توزیع میدان پتانسیل الکتریکی در EDL

صورت صعودی است، ولی در  $U_{in} = 0.5$  گرادیان فشار به صورت معکوس عمل می‌کند و نیروی الکترواسموتیک علاوه بر جبران افت‌های اصطکاکی وظیفه جبران این دراگ فشاری را نیز دارد.

شکل ۴ توزیع فشار بی بعد را در سرتاسر میکروکانال در خط مرکزی ( $\eta = 0$ ) نشان می‌دهد. انطباق عالی بین نتایج حل عددی مطالعه حاضر با نتایج حل دوتا و بشکوک دیده می‌شود. شکل ۴ نشان می‌دهد که فشار در انتهای میکروکانال به مقدار نسبی صفر می‌رسد. در انتها و ابتدای میکروکانال تنها فشار خالص وجود دارد و تنها در وصله میانی که نیروهای الکترواسموتیک حضور دارند، فشار ترکیبی از نیروهای فشاری و الکترواسموتیک است. مقدار  $U_{in}$  تعیین کننده گرادیان فشار در ناحیه ترکیبی است، برای  $U_{in} = 2$  در ناحیه ترکیبی گرادیان فشار مطلوب است و در شکل دیده می‌شود که شیب فشار در این ناحیه منفی است و در حالی که برای  $U_{in} = 0.5$  گرادیان فشار نامطلوب است و در ناحیه ترکیبی فشار در جهت جریان افزایش یافته است و آنچه باعث حرکت سیال می‌شود، تنها ناشی از اثرات الکترواسموتیکی است. از شکل مشهود که در  $U_{in} = 1.485$  فشار در ناحیه وسط صفحه مقدار ثابتی دارد و بدین معنی است که گرادیان فشار در این ناحیه صفر بوده و تنها عامل حرکت سیال نیروی الکترواسموتیکی است. از شکل مشهود است که گرادیان فشار در سرعت‌های ورودی  $U_{in} = 1$  و  $U_{in} = 0.5$  در وصله میانی مثبت است که نشان از آن دارد

جرمی عبوری ثابت است و اصل پایستاری جرم حفظ شده است.

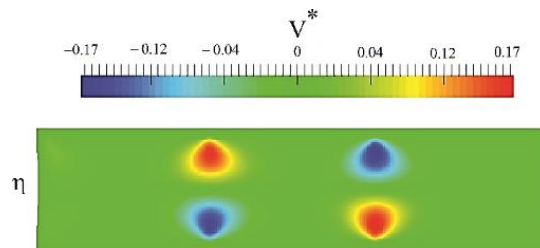
شکل ۸ کانتور سرعت در راستای افق و بردارهای سرعت را در طول میکروکانال برای سرعت ورودی  $U_{in} = 2$  و  $\zeta = -25.4 \text{ mv}$  نشان می‌دهد. همان طور که شکل نشان می‌دهد، توزیع سرعت در ابتدا و انتهای میکروکانال حالت سهمی گون و بدون تغییر را دارد و می‌توان نتیجه گرفت که در ابتدا و انتهای میکروکانال جریان حالت توسعه یافته دارد. در میانه میکروکانال توزیع سرعت تخت‌تر شده است که نشان از اثرات نیروهای الکترواسموتیکی است. از کانتورهای سرعت نیز مشخص است که سرعت ماکزیمم مقدار خود را در حالت سهمی گون در میانه میکروکانال از دست داده است.

در شکل ۹ خطوط جریان برای سرعت ورودی  $U_{in} = 2$  و  $\zeta = -25.4 \text{ mv}$  رسم شده است با توجه به توسعه یافتگی جریان انتظار می‌رود که خطوط جریان در ابتدا و انتهای میکروکانال موازی باشند که در شکل نیز مشهود است. انحراف خطوط جریان به سمت دیواره‌ها در میانه میکروکانال ناشی از انحراف سرعت به سمت دیواره‌ها به خاطر اثرات الکترواسموتیکی است. در شکل کانتورهای فشار نیز نمایش داده شده است که نشان می‌دهد، فشار از مقدار ماکزیمم در ورودی تا صفر در خروجی کاهش می‌یابد.

شکل ۱۰ کانتور سرعت در راستای افق و بردارهای سرعت را برای  $U_{in} = 1.485$  و  $\zeta = -40 \text{ mv}$  نشان می‌دهد. بردارهای سرعت در مقطع میانی نشان می‌دهد که پروفیل سرعت به حالت پلاگ در آمده است که دلیل بر این است که در این ناحیه نیروهای الکترواسموتیک حاکم است و گرادیان فشار در این ناحیه صفر است؛ بنابراین در این ناحیه سرعت تنها ناشی از اثر الکترواسموتیکی است. توسعه یافتگی در ابتدا و انتهای میکروکانال نیز از بردارهای سرعت ترسیم شده در شکل مشهود است.

#### ۶- نتیجه گیری

در میکروکانال‌های جریان الکترواسموتیک همراه با گرادیان فشار میزان سرعت ورودی و پتانسیل زتا نقش تعیین کننده شکل پروفیل سرعت و الگوی جریان دارد. پروفیل سرعت جریان با گرادیان فشار خالص به صورت سهموی شکل است



شکل ۶- کانتور سرعت بی بعد در راستای  $y$  برای  $U_{in} = 2$  و  $\zeta = -25.4 \text{ mv}$

تحت تاثیر نیروهای الکترواسموتیکی غیرصفر است. علت امر این است که در ناحیه ورودی پروفیل سرعت که سهموی است، تحت تاثیر نیروهای الکترواسموتیکی قرار می‌گیرد و به پروفیل سرعت پلاگ تغییر می‌یابد و در خروج این ناحیه نیز عکس این اتفاق می‌افتد و همین امر سبب بوجود آمدن سرعت در راستای  $y$  در ورود و خروج ناحیه الکترواسموتیکی شده است.

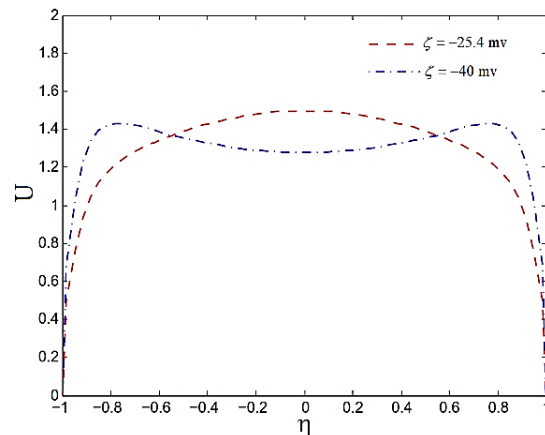
به منظور بررسی اثر پارامتر پتانسیل زتا، مسئله حاضر با هندسه‌ای مشابه برای  $\zeta = -40 \text{ mv}$  حل شده است. در شکل ۷ پروفیل سرعت بی بعد برای سرعت ورودی  $U_{in} = 2$  برای  $\zeta = -25.4 \text{ mv}$  و برای  $\zeta = -40 \text{ mv}$  رسم شده است. پروفیل سرعت کلی از برهم نهی جریان الکترواسموتیک و جریان فشاری به دست می‌آید. پروفیل سرعت حاصل از جریان الکترواسموتیک بدون حضور گرادیان فشار پلاگ گونه است و پروفیل سرعت بدون حضور جریان الکترواسموتیک حاصل از گرادیان فشار سهموی است. حال در ناحیه میانی با حضور جریان الکترواسموتیک و گرادیان فشار پروفیل سرعت کلی از برهم نهی جریان الکترواسموتیک و جریان فشاری به دست می‌آید. در پتانسیل  $\zeta = -40 \text{ mv}$  سرعت حاصل از جریان الکترواسموتیک رشد بیشتری دارد و همانطور که از شکل مشهود است، سرعت در  $\zeta = -40 \text{ mv}$  در ناحیه دو گانه الکتریکی رشد سریعی دارد و همین امر باعث شده که جمع جبری حاصل جمع دو اثر الکترواسموتیک و فشاری در ناحیه نزدیک دیوار از بقیه موقعیت‌ها بیشتر شده و پروفیل سرعت به شکل زین اسبی در آید، ولی این حاصل جمع برای  $\zeta = -25.4 \text{ mv}$  کمتر از موقعیت مرکزی میکروکانال بوده است و گرچه پروفیل سهمی گون تخت شده است، ولی قله خود را حفظ کرده است. برای هر دو پروفیل سرعت مقدار



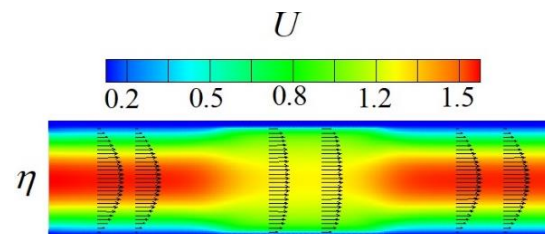
و توزیع سرعت جریان الکترواسموتیک خالص نیز پلاگ گونه است. در نواحی ابتدایی و انتهایی میکروکانال که نیروهای الکترواسموتیک حضور ندارند، پروفیل سهموی شکل است، ولی در وصله میانی توزیع سرعت حاصل برهم نهی توزیع سرعت جریان الکترواسموتیک و پوازیه است. میزان سرعت ورودی و پتانسیل زتا در ناحیه‌ای نقش تعیین کننده دارد که میدان پتانسیل الکتریکی حضور دارد. مقدار سرعت ورودی می‌تواند در وصله میانی گرادیان فشار مطلوب و یا نامطلوب ایجاد کند. در یک سرعت ورودی (در اینجا مقدار سرعت ورودی  $U_{in} = 1.485$ ) گرادیان فشار در وصله میانی صفر است که بدان معنی است که جریان در این ناحیه تنها ناشی از نیروهای الکترواسموتیکی است و سرعت‌های کمتر از این مقدار (در اینجا  $U_{in} < 1.485$ )، گرادیان فشار نامطلوب ایجاد می‌کند که از نمودار توزیع فشار نیز مشخص است که شیب فشار در این ناحیه مثبت شده است. در این حالت میکروکانال همانند یک میکرو پمپ الکترواسموتیکی عمل کرده و نیروهای الکترواسموتیکی بایستی بر نیروهای دراگ فشاری و اصطکاکی غلبه کند. به علت حاکم بودن بیشتر نیروهای الکترواسموتیکی پروفیل سرعت در نزدیکی دیوارها یعنی در لایه دوگانه الکتریکی بیشترین صعود را داشته و پروفیل سرعت به شکل زین اسبی در می‌آید، ولی در سرعت‌های بیشتر از این مقدار (در اینجا  $U_{in} > 1.485$ )، سرعت‌های اعمالی گرادیان فشار مطلوب در ناحیه الکترواسموتیکی ایجاد می‌کند که باعث می‌شود، توزیع سرعت نهایی که حاصل برهم نهی پروفیل سهموی و پلاگ گونه است، از حالت سهموی به سهموی تخت تبدیل شود.

بررسی میدان سرعت در راستای  $y$  نشان می‌دهد، در ورود و خروج وصله میانی و نزدیک دیواره جریان از حالت توسعه یافتگی خارج شده و مولفه عمودی سرعت جهت کمک به تغییر در پروفیل سرعت در این نواحی ایجاد شده و بجز در این ناحیه سرعت عمودی صفر بوده و جریان توسعه یافتگی خود را حفظ می‌کند.

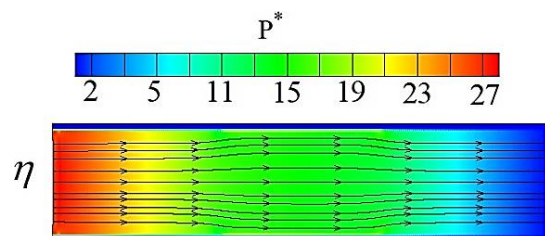
افزایش پتانسیل زتا سبب می‌شود که گرادیان پتانسیل افزایش یافته و مقدار نیروی حجمی الکترواسموتیکی ( $\rho_e E_x$ ) افزایش یافته و سبب افزایش سرعت نزدیک نواحی دیواره شود. این افزایش سرعت می‌تواند به گونه‌ای باشد که پروفیل به شکل زین اسبی درآید.



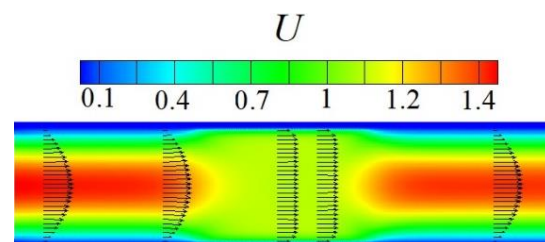
شکل ۷- پروفیل سرعت بی بعد در راستای  $y$  برای  $U_{in} = 2$  برای  $\zeta = -25.4 \text{ mV}$  و برای  $\zeta = -40 \text{ mV}$



شکل ۸- کانتور سرعت در راستای افق و بردارهای سرعت برای  $U_{in} = 2$  برای  $\zeta = -25.4 \text{ mV}$



شکل ۹- کانتور فشار و خطوط جریان برای  $U_{in} = 2$  و  $\zeta = -25.4 \text{ mV}$



شکل ۱۰- کانتور سرعت در راستای افق و بردارهای سرعت برای  $U_{in} = 1.485$  برای  $\zeta = -40 \text{ mV}$

لزجت دینامیکی، kg/ms	$\mu$		۷- فهرست علائم
لزجت سینماتیکی، m <sup>2</sup> /s	$\nu$	فشار و فشار مرجع، kg/ms <sup>2</sup>	$P, P_0$
پتانسیل زتا، V	$\zeta$	سرعت افقی، m/s	$u$
پتانسیل الکتریکی خارجی، V	$\varphi$	سرعت عمودی، m/s	$v$
پتانسیل الکتریکی داخلی، V	$\psi$	دما، K	$T$
گذردهی دی التریک محلول، C/Vm	$\epsilon$	بار مبنای الکترون، c	$e$
چگالی بار آزاد، C/m <sup>3</sup>	$\rho_f$	ثابت بولتزمن، J/K	$k_b$
پتانسیل الکتریکی کلی، V	$\phi$	ظرفیت یونی	$z$
طول دیبای	$\lambda_D$	سرعت مرجع، m/s	$U_{ref}$
حجم ذره، m <sup>3</sup>	$\omega$	نصف ارتفاع میکروکانال، m	$H$
طول بی بعد افقی	$\xi$	طول قسمتهای مختلف میکروکانال، m	$L_1, L_2, L_3$
طول بی بعد عمودی	$\eta$	غلظت یونی محلول بالک، m <sup>-3</sup>	$n_\infty$
پارامتر دبای هوگل	$\tau$	قدرت میدان الکتریکی، V/m	$E_x$
	بالانویس ها	بردار سرعت، m/s	$V$
مقادیر بی بعد	*	شتاب گرانش، m/s <sup>2</sup>	$g$
گام زمانی	$n$	سرعت صوت، m/s	$C$
	زیرنویس ها	متغیر اسکالر	$f$
مقادیر در ورودی	$in$	متغیر برداری	$F$
مقادیر در خروجی	$out$	تابع کرنل	$W$
شمارنده ذرات	$i, j$	بردار مکان، m	$r$
شمارنده تکرار	$k$	شعاع هموارسازی، m	$h$
		تانسور تصحیح کننده	$B, \hat{B}$
		بردار یکه	$e_{ij}$
		سرعت میانی، m/s	$\tilde{V}$
		سرعت افقی بی بعد	$U$
		رینولدز حالت مرجع	$Re_{ref}$
		علائم یونانی	
		چگالی و چگالی مرجع، kg/m <sup>3</sup>	$\rho, \rho_0$

### ۸- مراجع

- [1] Capretto L, Cheng W, Hill M, Zhang X (2011) Micromixing within microfluidic devices. Top Curr Chem 27-68.
- [2] Reuss F (1809) Charge-induced flow. Proceedings of the Imperial Society of Naturalists of Moscow 3: 327-344.
- [3] Molho J, Herr A, Desphande M, Gilbert J, Garguilo M, Paul P, John P, Woudenberg T, Connel C (1998) Fluid transport mechanisms in microfluidic devices. Proc ASME Mems 66: 69-76.

- with heterogeneous surface potential. *J Non-Newton Fluid* 259: 48-60.
- [13] Sun C, Shie S (2012) Optimization of a diverging micromixer driven by periodic electroosmotic. *Microsyst Technol* 18(9-10): 1237-1245.
- [14] Wendland H (1995) Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Adv Comput Math* 4(1): 389-396.
- [15] Bonet J, Lok T (1999) Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamic formulations. *Comput Method Appl M* 180(1-2): 97-115.
- [16] Fatehi R, Manzari M (2011) Error estimation in smoothed particle hydrodynamics and a new scheme for second derivatives. *Comput Math Appl* 61(2): 482-498.
- [17] Lee E, Moulinec C, Xu R, Violeau D, Laurence D, Stansby P (2008) Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method. *J Comput Phys* 227(18): 8417-8436.
- [18] Fatehi R, Manzari M (2011) A remedy for numerical oscillations in weakly compressible smoothed particle hydrodynamics. *Int J Numer Meth Fl* 67(9): 1100-1114.
- [19] Shamsoddini R, Aminizadeh N, Sefid M (2015) An improved WCSPH method to simulate the non-Newtonian power law fluid flow induced by motion of a square cylinder. *Cmes-Comp Model Eng* 105(3): 209-230
- [4] Cummings E, Griffiths S, Nilson R, Paul P (2000) Conditions for similitude between the fluid velocity and electric field in electroosmotic flow. *Anal Chem* 72(11): 2526-2532.
- [5] Yang C, Li D (1998) Analysis of electrokinetic effects on the liquid flow in rectangular microchannels. *Colloid Surface A* 143(2-3): 339-353.
- [6] Patankar N, Hu H (1998) Numerical simulation of electroosmotic flow. *Anal Chem* 70(9): 1870-1881.
- [7] Ren L, Li D (2001) Electroosmotic flow in heterogeneous microchannels. *J Colloid Interf Sci* 243(1): 255-261.
- [8] Hu J, Chao C (2007) A study of the performance of microfabricated electroosmotic pump. *Sensor Actuat A-Phys* 135(1): 273-282.
- [9] Dutta P, Beskok A, Warburton T (2002) Numerical simulation of mixed electroosmotic/pressure driven microflows. *Numer Heat Tr A-Appl* 41(2): 131-148.
- [10] Dutta P, Beskok A (2001) Analytical solution of combined electroosmotic/pressure driven flows in two-dimensional straight channels: finite Debye layer effects. *Anal Chem* 73(9): 1979-1986.
- [11] Ramirez J, Conlisk A (2006) Formation of vortices near abrupt nano-channel height changes in electro-osmotic flow of aqueous solutions. *Biomed Microdevices* 8(4): 325-330.
- [12] Bag N, Bhattacharyya S (2018) Electroosmotic flow of a non-Newtonian fluid in a microchannel