



تحلیل دیسک دوار با مواد مدرج تابعی براساس مدل هدایت حرارتی غیرفوریه تحت میدان الکترومغناطیس

محمد حسینی^{۱*}، عباس زندی باغچه‌مریم^۲ و ملیحه افتخاری^۳

^۱ دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران

^۲ کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران

^۳ استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۲۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۵/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۶/۱۸

چکیده

در این مقاله پاسخ ترمومغناطیس دیسک دوار با مواد مدرج تابعی براساس مدل هدایت حرارتی غیرفوریه تحت میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی بررسی شده است. در این بررسی مدل هدایت حرارتی غیرفوریه براساس مدل تأخیر زمانی دوگانه در نظر گرفته شده است. خصوصیات مکانیکی دیسک به‌صورت تابع توانی در راستای شعاع در نظر گرفته شده است و نتایج این بررسی برای شرایط مرزی مختلف به‌دست آمده است. در این مطالعه تأثیر تغییرات پارامترهای مختلف بر رفتار دیسک دوار با مواد مدرج تابعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ضریب ناهمگنی مواد، تغییرات دمایی افزایش می‌یابد؛ همچنین مشاهده گردید که وجود میدان مغناطیسی در دیسک، موجب کاهش تغییر مکان و همچنین کاهش تنش و افزایش سختی سیستم می‌شود.

کلمات کلیدی: دیسک دوار؛ مواد مدرج تابعی؛ هدایت حرارتی؛ مدل غیرفوریه؛ میدان الکترومغناطیس.

Analysis of FGM Rotating Disk Based on Non-Fourier Heat Conduction Model under Electromagnetic Field

M. Hosseini^{1*}, A. Zandi Baghche Maryam², M. Eftekhari³

¹ Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran.

² M.Sc., Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran.

³ Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran.

Abstract

In this paper, the thermomagnetic response of rotating disk with functionally graded material (FGM) based on non-Fourier heat conduction model under electrical and magnetic fields is studied. In this study, non-Fourier heat conduction model were considered based on dual phase lag model. Mechanical properties of disk are assumed to follow an identical power law in the radial direction and the results of this analysis are obtained for different boundary conditions. In the present work, the effect of various parameters on the behavior of rotating disk with functionally graded material is investigated. The results show that temperature changes is increased with increases in the coefficient of heterogeneous. Also, it is obvious that imposing a magnetic field significantly decreases displacement and stresses and increases stiffness of system.

Keywords: Rotating Disk; Functionally Graded Material; Heat Conduction; Non-Fourier Model; Electromagnetic Field.

۱- مقدمه

دیسک‌های دوار تحت بارهای مکانیکی و حرارتی به‌طور گسترده در بسیاری از زمینه‌های مهندسی مانند هوافضا، مکانیک، صنایع دریایی، واحدهای صنعتی شیمیایی، الکترونیک و مواد زیستی کاربرد دارد. در صنایع هوافضا، برای دیسک‌های دوار، کاربردهای متعددی مانند استفاده در طراحی دیسک دوار توربین گاز و ماشین‌های دوار گریز از مرکز و غیره تعریف شده است [۱-۵]. از کاربردهای دیسک-های دوار تحت بارهای مکانیکی و حرارتی در صنایع مختلف می‌توان به استفاده آنها در طراحی روتور توربین، فلاپویل، پمپ‌های گریز از مرکز، تجهیزات پرند و فضا پیماها و غیره اشاره کرد. علاوه بر این از دیسک‌های دوار تحت بارهای مکانیکی، حرارتی و الکترومغناطیسی در موتورهای القایی و موتورهای توربوچت و توربوپمپ‌ها، سانتریفیوژها و موتورهای الکتریکی نیز استفاده می‌شود که به واسطه جریان برق میدان مغناطیسی در آنها ایجاد می‌شود. دیسک‌های مورد استفاده در موتورهای جت در شرایط کاری خود تحت تاثیر هم‌زمان بارهای استاتیکی، دینامیکی و حرارتی قرار دارد. عوامل اصلی ایجاد تنش‌های استاتیکی در دیسک‌های توربین‌گاز، نیروی‌های گریز از مرکز، بارهای حرارتی و بارهای خمشی است؛ همچنین عبور گاز داغ در بین پره‌های روتور موجب بروز اختلاف دما در قسمت‌های مختلف دیسک یا به‌عبارت دیگر گرادیان دمایی می‌شود که عامل ایجاد تنش حرارتی است و از اهمیت بالایی در تحلیل استحکام دیسک برخوردار است.

تحقیقات فراوانی در زمینه تحلیل دیسک‌های دوار ارائه شده است؛ از جمله این تحقیقات، زنگور [۶] توزیع تنش و حل الاستیک دیسک‌های دوار توپیر کامپوزیتی را محاسبه نمودند. توزیع خواص در راستای شعاع به این صورت بود که از مرکز دیسک تا شعاع مشخصی، یک ماده همگن (از جنس فلز یا سرامیک)، پس از آن یک هسته از جنس ماده تابعی و سپس تا سطح خارجی دیسک، یک ماده همگن دیگر (مانند سرامیک یا فلز) قرار داشت. نحوه تغییرات خواص بخش تابعی دیسک، براساس تابعی نمایی بیان می‌شد. در نهایت، مولفه‌های تنش و تغییر مکان دیسک به‌ازای شرایط مرزی مختلف بدست آمد. اصغری و غفوری [۷] به‌دلیل اینکه حل تنش صفحه‌ای دو بعدی منجر به نتایج قابل قبول فقط

برای دیسک‌هایی با ضخامت کم می‌شد، یک حل نیمه‌تحلیلی سه‌بعدی برای دیسک‌های توپیر و توخالی دوار تابعی ارائه دادند تا دیسک‌های ضخیم را نیز شامل شود. آنها این موضوع را نشان دادند که اگرچه حل تنش صفحه‌ای تمام معادلات حرکت مسئله و شرایط مرزی را ارضاء می‌کند، اما منجر به یک میدان کرنش سه‌بعدی سازگار نمی‌شود؛ بدین منظور با اصلاح حل تنش صفحه‌ای، یک حل سه‌بعدی صحیح بدست آمد. کدخدایان و گل مکانی [۸]، تحلیل غیرخطی خمش دیسک‌های دوار توپیر و توخالی تابعی با ضخامت متغیر و تحت بار خمشی را با بهره‌گیری از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و معادلات ون-کارمن برای تغییر شکل‌های بزرگ، ارائه دادند. خواص ماده نیز به‌صورت تابعی توانی از کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده زیرکونیا و آلومینیوم و متغیر در جهت شعاع در نظر گرفته شد. در پایان، تاثیر متغیرهایی چون توان تغییر ماده، هندسه، ضخامت دیسک و سرعت زاویه‌ای روی نتایج مورد بررسی قرار گرفته است. اکبری و قنبری [۹] نیز یک حل دقیق و تحلیلی را برای مولفه‌های تنش و تغییر مکان ترموالاستیک، در دیسک‌های دوار توخالی تابعی تحت فشار داخلی و بارگذاری حرارتی پیشنهاد دادند. توابع توانی در راستای شعاع دیسک و به‌ازای توان-های مختلف برای خواص ترمومکانیکی دیسک، در نظر گرفته شد تا بدین طریق مقادیر تنش در سطح دیسک کنترل شوند. شه‌زمانیان و همکاران [۱۰] تماس ترموالاستیک دیسک ترمز متقارن محوری تابعی با منبع حرارتی از نوع اصطکاک تماسی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آنها در این کار از روش المان محدود استفاده کرده‌اند. خواص ماده مسئله مورد مطالعه، به صورت توزیع توانی در راستای شعاع تعریف شده است؛ همچنین آنها صفحه درونی دیسک دوار مورد مطالعه را فلز و صفحه خارجی را سرامیک در نظر گرفته‌اند. برای کفشک ترمز، ماده به صورت خالص و برای منبع حرارتی، اصطکاک تماسی کولمب در نظر گرفته شده است. برای دیسک ترمز و کفشک ترمز دو دیسک مشابه در نظر گرفته شده؛ به طوری که تنش‌های حرارتی کاملاً هدایت شوند. افسر و همکاران [۱۱]، معادله دیفرانسیل حاکم بر دیسک دوار توخالی ساخته شده از مواد هدفمند با گرادیان حرارتی به صورت عددی با استفاده از کدهای المان محدود حل و میدان ترموالاستیک مسئله را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این

ترموالاستیک دیسک دوار تابعی با ضخامت متغیر با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای تغییر شکل‌های کوچک را مورد بررسی قرار داده است. خواص مواد و پروفیل ضخامت در راستای شعاع و بر پایه تابع توانی فرض شده و یک حل نیمه تحلیلی برای دو نوع شرایط مرزی برای دیسک توپر ارائه داده‌اند. گالیقلو [۲۲] برای دیسک دوار ساخته شده از مواد تابعی با گرادیان حرارتی حلی تحلیلی ارائه کرده است. در پروسه حل از تئوری تغییر شکل بینهایت کوچک الاستیسیته و برای توزیع ماده از قانون توانی استفاده شده است. چه‌رمی و همکاران [۲۳]، حل الاستوپلاستیک دیسک با مواد مدرج تابعی را با استفاده از روش عددی بررسی کردند.

در بررسی آنالیز حرارتی بیشتر از مدل هدایت حرارتی فوریه برای پیش‌بینی توزیع دمایی استفاده می‌شود. براساس این مدل یک تغییر محلی دما هرچند کوچک سبب ایجاد اغتشاش دمایی در هر نقطه از محیط حتی در فواصل بسیار دور از تحریک اولیه می‌شود. این مدل علی‌رغم غیرقابل قبول بودن سرعت بی‌نهایت موج گرمایی از لحاظ فیزیکی، در بسیاری از کاربردهای مهندسی فرض مناسبی است؛ اما در شرایطی هم‌چون حضور منابع حرارتی با شدت بالا و شرایط بسیار گذرا از قبیل مسائلی که در آن‌ها از لیزر برای ایجاد شار حرارتی استفاده می‌شود و همچنین انتقال حرارت در شرایط دمایی بسیار پایین، انتقال حرارت روی لایه‌های نازک فلزی، نیمه‌رساناها و ابررساناها و مواد با ساختار غیرهمگن و متخلخل، سرعت موج گرمایی محدود است که در این حالت استفاده از مدل هدایت حرارتی غیرفوریه توصیه می‌شود [۲۴-۲۶].

مطالعات اندکی در زمینه انتقال حرارت غیرفوریه در مواد غیرهمگن و مواد هدفمند صورت گرفته است، از جمله این تحقیقات، سوترادهر و همکارانش [۲۷]، هدایت حرارتی گذرا در مواد همگن و غیرهمگن را با استفاده از تبدیل لاپلاس گالرکین و روش المان مرزی بررسی کردند. سوترادهر و پائولینیو [۲۸]، یک روش المان مرزی برای هدایت حرارتی گذرا در مواد هدفمند گسترش دادند. خسروی‌فرد و همکارانش [۲۹]، هدایت حرارتی گذرا در مواد هدفمند را با استفاده از روش بدون شبکه بررسی کردند. بابایی و چن [۳۰ و ۳۱] به بررسی هدایت حرارتی هذلولی غیرفوریه‌ای در یک کره و استوانه توخالی غیرهمگن

مقاله تابع توزیع به صورت نمایی در نظر گرفته شده و تغییرات خواص مواد به جز ضریب پواسون، در راستای شعاع در نظر گرفته شده است. بیات و همکارانش [۱۲]، حل دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد تابعی با ضخامتی متغیر را برای تغییر شکل‌های کوچک با خواص مواد و پروفایل‌های ضخامت دیسک بر پایه تابع توانی نسبت به راستای شعاع را ارائه کردند. نتایج برای دیسک حلقوی با شرایط مرزی آزاد در شعاع درونی را به دو روش تحلیلی و نیمه تحلیلی و همچنین برای یک دیسک توپر با شرایط مرزی ثابت در شعاع خارجی را با روش نیمه تحلیلی ارائه داده‌اند. همچنین ترابی و افشاری [۱۳] به تحلیل تنش‌های مکانیکی-حرارتی در دیسک‌های دوار با ضخامت و خواص متغیر در راستای شعاعی پرداختند. بهمویک و همکاران [۱۴]، سرعت بحرانی دورانی در دیسک-های دوار تحت بارگذاری خارجی با استفاده از روش گالرکین را به دست آوردند. یو و همکاران [۱۵]، به بررسی تنش و تغییر مکان در دیسک‌های توخالی با مواد مدرج تابعی تحت فشار داخلی پرداختند. کالیگلو و همکاران [۱۶]، با استفاده از روش تحلیلی و روش عددی المان محدود، توزیع تنش در دیسک‌های دوار با ماده مدرج تابعی را ارائه کردند. پنگ و لی [۱۷]، به تحلیل دیسک سه لایه ساخته شده از ماده مدرج تابعی پرداختند. پنگ و لی [۱۸] تنش حرارتی را در یک دیسک دوار توخالی ساخته شده از مواد هدفمند را به صورت تئوری مورد بررسی قرار دادند. خواص ماده در راستای شعاع در نظر گرفته شده است. آنها برای حل تئوری، مسئله‌ی مقدار مرزی را به معادله‌ی انتگرالی تبدیل کرده‌اند؛ همچنین تابع توانی را برای توزیع خواص ماده در نظر گرفته‌اند. لقمان و همکاران [۱۹]، به تحلیل غیرخطی الکترومگنتوترومکانیک دیسک دوار پرداختند و تاثیرات پارامترهای مختلف از جمله دما، اختلاف پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی را بر پاسخ سیستم مورد بررسی قرار دادند.

نی و همکاران [۲۰]، تغییر شکل‌های متقارن محوری دیسک دوار که شامل ضخامت، چگالی، ضریب انبساط حرارتی و مدول برشی را بررسی قرار دادند که در راستای شعاعی تغییر می‌کنند. دیسک از مواد لاستیکی ساخته شده است که به صورت‌های ایزوتروپیک، ترموالاستیک خطی و تراکم ناپذیر مدل شده است. بیات و همکارانش [۲۱]، حل

۲- معادلات حاکم

شکل شماتیک یک دیسک دوار با مواد مدرج تابعی با شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o و سرعت دورانی ω تحت پتانسیل الکتریکی ϕ در شکل ۱ آورده شده است. خصوصیات مکانیکی $(P(r))$ به صورت تابع توانی که در راستای شعاع تغییر می‌کند، به صورت رابطه (۱) در نظر گرفته شده است [۱۲]:

$$P(r) = P_o \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \quad (1)$$

P_o خصوصیات مکانیکی مواد و شعاع خارجی دیسک است. در این بررسی مدول پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود، همچنین ضرایب مدول الاستیک (E)، ضریب حرارتی (K)، ضریب انبساط حرارتی (α)، ضریب نفوذپذیری مغناطیسی (μ)، ضرایب پیزوالکتریک (e)، ضریب دی‌الکتریک (ϵ) و چگالی (ρ) به صورت تابعی از شعاع طبق رابطه فوق تغییر می‌کند. رابطه بین میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی به صورت رابطه (۲) است [۳۵]:

$$E_r = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \quad (2)$$

که ϕ پتانسیل الکتریکی و E_r میدان الکتریکی است. رابطه کرنش‌های شعاعی و محیطی با مولفه تغییر مکان به صورت (۳) تعریف می‌شود [۳۶]:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (3)$$

معادلات تنش شعاعی σ_r و محیطی σ_θ و تغییر مکان الکتریکی D_r برحسب تغییر مکان، میدان الکتریکی و حرارتی به صورت زیر بیان می‌شوند [۳۷]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \frac{E(r)}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_r - \epsilon_r^T \\ \epsilon_\theta - \epsilon_r^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{e(r)}{(1-\nu^2)} E_r \\ \frac{e(r)\nu}{(1-\nu^2)} E_r \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$D_r = \frac{e(r)}{(1-\nu^2)} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta - (1+\nu) \epsilon_r^T) + \frac{\epsilon(r)}{(1-\nu^2)} E_r \quad (4)$$

که

$$\epsilon_r^T = \alpha(r) \Delta T(r) \quad (5)$$

معادله تعادل دیسک دوار و معادله تعادل الکترواستاتیک به ترتیب به صورت معادلات زیر نوشته شده است [۳۷]:

ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند. کلس و کانکر [۳۲]، به بررسی یک کره و استوانه توخالی ساخته شده از مواد هدفمند از طریق هدایت حرارتی هذلولی پرداختند. قربانپور آرانی و همکاران [۳۳ و ۳۴] با ارائه حل نیمه‌تحلیلی مگنتروموالاستیک تنش‌ها و تغییر شکل‌های دیسک دوار تابعی با ضخامت متغیر را بررسی کردند که درون یک میدان حرارتی و یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار داشت. در این تحقیق با توجه به نوع تابع توانی استفاده شده و معادله دیفرانسیل به وجود آمده، دیسک به چندین زیرلایه (به تعداد متناهی) تقسیم می‌شود که خواص هر زیرلایه ثابت است؛ همچنین در مقاله مذکور، از تئوری تغییر شکل‌های کوچک مگنتروموالاستیک تحت شرایط تنش صفحه‌ای استفاده شده است. در نهایت مشاهده شد که اعمال میدان مغناطیسی به طور قابل ملاحظه‌ای تنش‌های محیطی کششی را کاهش می‌دهد که این موضوع افزایش عمر خستگی دیسک را به همراه دارد. در این مطالعات انتقال حرارت را پایدار در نظر گرفته شده و مدل هدایت حرارتی فوریه بررسی شده است.

آنچه در مرور مطالعات گذشته بدان اشاره شد، نشان دهنده این امر است که با وجود پژوهش‌های قابل توجهی که در زمینه دیسک‌های دوار انجام شده است، در حوزه دیسک دوار با مواد مدرج تابعی براساس مدل هدایت حرارتی غیرفوریه مطالعه‌ای صورت نگرفته است؛ همچنین در بررسی‌های گذشته معمولاً انتقال حرارت را پایدار در نظر گرفته و مدل حرارت گذرا بررسی نشده است.

در این بررسی پاسخ ترمومغناطیس دیسک دوار با مواد مدرج تابعی براساس مدل هدایت حرارتی غیرفوریه تحت میدان الکترومغناطیسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. خصوصیات مکانیکی به صورت تابع توانی در راستای شعاع تغییر می‌کند. در این بررسی تأثیر تغییرات پارامترهای مختلف از جمله ضریب ناهمگنی، شدت میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی و اثرات میدان حرارتی بر رفتار دیسک دوار با مواد مدرج تابعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل شده، نتایج با مطالعات گذشته در زمینه دیسک دوار با مواد مدرج تابعی مقایسه می‌شوند.

۲-۱-۱-۲- شرایط مرزی

۲-۱-۱-۲- دیسک توپر

شرایط مرزی دیسک توپر با رابطه (۱۱) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{At } r = 0: u = 0, \quad \frac{d\phi}{dr} = 0 \\ \text{At } r = r_0: \sigma_r = 0, \quad \phi = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

۲-۱-۲-۲- دیسک چرخان گیردار - آزاد

همچنین شرایط مرزی برای حالتی که لبه داخلی ($r = r_i$) تکیه گاه گیردار و لبه خارجی آزاد ($r = r_0$) باشد، به صورت رابطه (۱۲) است:

$$\begin{aligned} \text{At } r = r_i: u = 0, \quad \frac{d\phi}{dr} = 0 \\ \text{At } r = r_0: \sigma_r = 0, \quad \phi = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

۲-۱-۳-۱-۲- دیسک چرخان آزاد- آزاد

شرایط مرزی برای حالتی که لبه داخلی ($r = r_i$) تکیه گاه آزاد و لبه خارجی نیز آزاد ($r = r_0$) باشد، در رابطه (۱۳) آورده شده است:

$$\begin{aligned} \text{At } r = r_i: \sigma_r = 0, \quad \frac{d\phi}{dr} = 0 \\ \text{At } r = r_0: \sigma_r = 0, \quad \phi = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

۲-۲- مدل هدایت حرارتی غیرفوریه تأخیر زمانی دوگانه

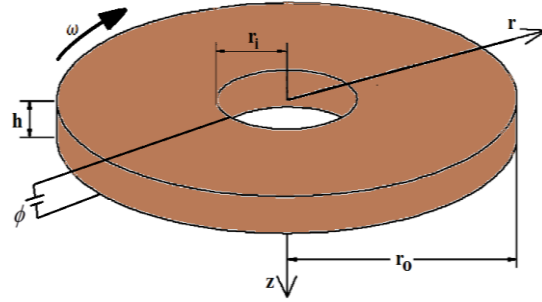
توزیع دمایی در سطح داخلی و خارجی دیسک دوار با مواد تابعی به صورت رابطه (۱۴) است:

$$\begin{aligned} \text{At } r = r_i: \Delta T_r = \Delta T_i = 0 \\ \text{At } r = r_0: \Delta T_r = \Delta T_o = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

مدل تأخیر زمانی دوگانه در ابتدا توسط ژو [۳۸] و با در نظر گرفتن دو تأخیر زمانی بررسی گردید. براساس این مدل معادله (۱۵) در نظر گرفته می‌شود:

$$q(r, t + \tau_q) = -K(r)\nabla\Delta T(r, t + \tau_T) \quad (15)$$

τ_T تأخیر زمان گرادیان دمایی و τ_q تأخیر زمان شار گرمایی است. با صرف نظر از جمله‌های مرتبه دوم و بالاتر و با فرض کوچک بودن هر دو تأخیر زمانی و با استفاده از بسط تیلور،



شکل ۱- شماتیک دیسک دوار

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_z + \rho(r)r\omega^2 = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} = 0 \quad (7)$$

که در آن نیروی لورنتز (میدان مغناطیسی) است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_z = \mu(r) H_z^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \quad (8)$$

H_z بردار شدت میدان مغناطیس است. با جایگذاری معادلات (۴) و (۸) در رابطه (۶) و (۷) معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} (rE_r + r(1 - \nu^2)\mu_r H_z^2) \frac{d^2 u}{dr^2} \\ + \left(r \frac{dE_r}{dr} + E_r + (1 - \nu^2)\mu_r H_z^2 \right) \frac{du}{dr} \\ + \left(\nu \frac{dE_r}{dr} - \frac{1}{r} E_r - \frac{1}{r} (1 - \nu^2)\mu_r H_z^2 \right) u \\ + r e_r \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \left(r \frac{de_r}{dr} + e_r (1 - \nu) \right) \frac{d\phi}{dr} \\ + (1 - \nu^2)\rho_r r^2 \omega^2 - r(1 + \nu) \\ \times \frac{d(E_r \alpha_r \Delta T_r)}{dr} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} r e_r \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(r \frac{de_r}{dr} + e_r \right) \frac{du}{dr} + \nu \frac{de_r}{dr} u \\ - r \epsilon_r \frac{d^2 \phi}{dr^2} - \left(r \frac{d\epsilon_r}{dr} + \epsilon_r \right) \frac{d\phi}{dr} \\ - (1 + \nu) e_r \alpha_r \Delta T_r - r(1 + \nu) \\ \times \frac{d(e_r \alpha_r \Delta T_r)}{dr} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

در این بررسی خصوصیات مکانیکی $P(r)$ به صورت P_r نشان داده می‌شود.

۳- روش حل

۳-۱- تحلیل الکترومکانیک

استفاده از روش نیمه تحلیلی در بیشتر موارد علاوه بر نداشتن محدودیت تحلیل دیسک‌هایی با هندسه، توزیع مواد و شرایط مرزی مختلف، دارای دقت مناسبی هستند که از این روش در این بررسی استفاده شده است. در روش نیمه تحلیلی دیسک به k حلقه با ضخامت معلوم تقسیم شده و خواص مواد در حلقه ثابت در نظر گرفته می‌شود. شکل ۲ این نوع تقسیم بندی در جهت شعاع را نشان می‌دهد [۳۹].

این روش معادلات دیفرانسیل را به مجموعه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی ناهمگن با ضرایب ثابت به صورت روابط زیر تبدیل می‌کند:

$$\left(c_1^{(k)} \frac{d^2}{dr^2} + c_2^{(k)} \frac{d}{dr} + c_3^{(k)} \right) u^{(k)} + \left(c_5^{(k)} \frac{d^2}{dr^2} + c_6^{(k)} \frac{d}{dr} \right) \phi^{(k)} + c_4^{(k)} = 0 \quad (19)$$

$$\left(c_5^{(k)} \frac{d^2}{dr^2} + c_7^{(k)} \frac{d}{dr} + c_8^{(k)} \right) u^{(k)} + \left(c_9^{(k)} \frac{d^2}{dr^2} + c_{10}^{(k)} \frac{d}{dr} \right) \phi^{(k)} + c_{11}^{(k)} = 0 \quad (20)$$

که

$$c_1^{(k)} = r^{(k)} E_{(r^{(k)})} + r^{(k)} (1 - \nu^2) \mu_{(r^{(k)})} H_z^2$$

$$c_2^{(k)} = r^{(k)} \left. \frac{dE_r}{dr} \right|_{r=r^{(k)}} + E_{(r^{(k)})} + (1 - \nu^2) \mu_{(r^{(k)})} H_z^2$$

$$c_3^{(k)} = \nu \left. \frac{dE_r}{dr} \right|_{r=r^{(k)}} - \frac{1}{r^{(k)}} E_{(r^{(k)})} - \frac{1}{r^{(k)}} (1 - \nu^2) \mu_{(r^{(k)})} H_z^2$$

$$c_4^{(k)} = (1 - \nu^2) \rho_{(r^{(k)})} (r^{(k)} \omega)^2 - r^{(k)} (1 + \nu) \left. \frac{d(E_r \alpha_r \Delta T_r)}{dr} \right|_{r=r^{(k)}}$$

$$c_5^{(k)} = r^{(k)} e_{(r^{(k)})}$$

$$c_6^{(k)} = r^{(k)} \left. \frac{de_r}{dr} \right|_{r=r^{(k)}} + e_{(r^{(k)})} (1 - \nu)$$

$$c_7^{(k)} = r^{(k)} \left. \frac{de_r}{dr} \right|_{r=r^{(k)}} + e_{(r^{(k)})}$$

معادله تأخیر زمانی دوگانه به صورت معادله (۱۶) حاصل می‌شود:

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} \right) q(r, t) = -K(r) \times \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \Delta T(r, t) \quad (16)$$

همچنین معادله توازن انرژی به صورت رابطه (۱۷) در نظر گرفته می‌شود:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) q(r, t) = \rho(r) C_p \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \quad (17)$$

با ترکیب معادلات (۱۶) و (۱۷)، معادله هدایت حرارتی تأخیر زمانی دوگانه به صورت رابطه (۱۸) است:

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\rho(r) C_p \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left(K(r) \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \right) \quad (18)$$

با توجه به رابطه فوق مشخص می‌شود که در صورتی که از تأخیر زمان گرادیان دمایی صرف نظر شود، معادله (۱۸) به معادله تأخیر زمان منفرد یا کاتانو-ورنات تبدیل می‌شود. با در نظر نگرفتن هر دو تأخیر زمان گرادیان دمایی و تأخیر زمان شار گرمایی معادله تأخیر زمانی دوگانه به معادله کلاسیک فوریه کاهش داده می‌شود؛ همچنین در صورتی که $\tau_T < \tau_q$ شار حرارتی به واسطه گرادیان دمایی است و در صورتی که $\tau_q < \tau_T$ وجود گرادیان دمایی به واسطه شار حرارتی است.

$$c_8^{(k)} = v \frac{de_r}{dr} \Big|_{r=r^{(k)}}$$

$$c_9^{(k)} = -r^{(k)} \varepsilon_{(r^{(k)})}$$

$$c_{10}^{(k)} = -\left(r^{(k)} \frac{d\varepsilon_r}{dr} \Big|_{r=r^{(k)}} + \varepsilon_{(r^{(k)})} \right)$$

$$c_{11}^{(k)} = -(1+v)e_{(r^{(k)})} \alpha_{(r^{(k)})} \Delta T_{(r^{(k)})} - r^{(k)}(1+v) \frac{d(e_r \alpha_r \Delta T_r)}{dr} \Big|_{r=r^{(k)}} \quad (21)$$

$$B_1^{(k)} \frac{d^3 u^{(k)}}{dr^3} + B_2^{(k)} \frac{d^2 u^{(k)}}{dr^2} + B_3^{(k)} \frac{du^{(k)}}{dr} + B_4^{(k)} u^{(k)} + B_5^{(k)} = 0 \quad (24)$$

که:

$$\begin{aligned} B_1^{(k)} &= c_5^{(k)} A_1^{(k)} \\ B_2^{(k)} &= c_1^{(k)} + c_5^{(k)} A_2^{(k)} + c_6^{(k)} A_1^{(k)} \\ B_3^{(k)} &= c_2^{(k)} + c_5^{(k)} A_3^{(k)} + c_6^{(k)} A_2^{(k)} \\ B_4^{(k)} &= c_3^{(k)} + c_6^{(k)} A_3^{(k)} \\ B_5^{(k)} &= c_4^{(k)} + c_6^{(k)} A_4^{(k)} \end{aligned} \quad (25)$$

حل عمومی معادله (۲۴) به صورت رابطه (۲۶) است:

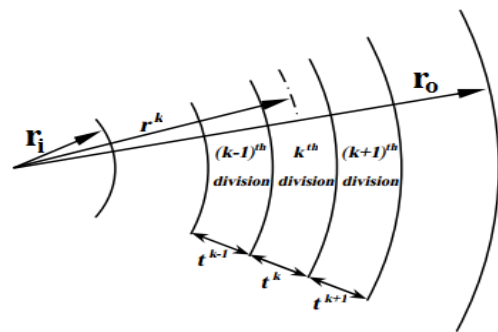
$$u^{(k)} = X_1^{(k)} \exp(\lambda_1^{(k)} r) + X_2^{(k)} \exp(\lambda_2^{(k)} r) + X_3^{(k)} \exp(\lambda_3^{(k)} r) - \frac{B_5^{(k)}}{B_4^{(k)}} \quad (26)$$

$\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \lambda_3^{(k)}$ ریشه‌های معادله مشخصه همگن با ضرایب ثابت در رابطه (۲۴) است. با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۲۲) و جایگذاری رابطه‌ی (۲۶) در رابطه (۲۲) تابع پتانسیل الکتریکی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \phi^{(k)} &= H_1^{(k)} X_1^{(k)} \exp(\lambda_1^{(k)} r) \\ &+ H_2^{(k)} X_2^{(k)} \exp(\lambda_2^{(k)} r) \\ &+ H_3^{(k)} X_3^{(k)} \exp(\lambda_3^{(k)} r) + H_4^{(k)} + X_4^{(k)} \end{aligned} \quad (27)$$

که

$$\begin{aligned} H_i^{(k)} &= A_1^{(k)} \lambda_i^{(k)} + A_2^{(k)} + \frac{A_3^{(k)}}{\lambda_i^{(k)}}, \quad i = 1, 2, 3 \\ H_4^{(k)} &= -\frac{B_5^{(k)}}{B_4^{(k)}} (1 + r^{(k)}) + A_4^{(k)} r^{(k)} \end{aligned} \quad (28)$$



شکل ۲- شماتیک تقسیم‌بندی شعاعی

در رابطه فوق $k = 1, 2, 3, \dots, m$ و تعداد تقسیم بندی شعاعی است. با ترکیب روابط (۱۹) و (۲۰) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{dr} \phi^{(k)} = A_1^{(k)} \frac{d^2 u^{(k)}}{dr^2} + A_2^{(k)} \frac{du^{(k)}}{dr} + A_3^{(k)} u^{(k)} + A_4^{(k)} \quad (22)$$

ضرایب معادله فوق به صورت رابطه (۲۳) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} A_1^{(k)} &= -\frac{c_1^{(k)} c_9^{(k)} - (c_5^{(k)})^2}{c_9^{(k)} c_6^{(k)} - c_5^{(k)} c_{10}^{(k)}} \\ A_2^{(k)} &= -\frac{c_2^{(k)} c_9^{(k)} - c_5^{(k)} c_7^{(k)}}{c_9^{(k)} c_6^{(k)} - c_5^{(k)} c_{10}^{(k)}} \\ A_3^{(k)} &= -\frac{c_3^{(k)} c_9^{(k)} - c_5^{(k)} c_8^{(k)}}{c_9^{(k)} c_6^{(k)} - c_5^{(k)} c_{10}^{(k)}} \\ A_4^{(k)} &= -\frac{c_4^{(k)} c_9^{(k)} - c_5^{(k)} c_{11}^{(k)}}{c_9^{(k)} c_6^{(k)} - c_5^{(k)} c_{10}^{(k)}} \end{aligned} \quad (23)$$

با استفاده از رابطه (۲۲) و جایگزینی مشتق آن در رابطه (۱۹)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$S_2^{(k)} = r^{(k)} \frac{dK_r}{dr} \Big|_{r=r^{(k)}} ((1 - e^{-c_0 t}) + \tau_T c_0 e^{-c_0 t}) + K_{(r^{(k)})} ((1 - e^{-c_0 t}) + \tau_T c_0 e^{-c_0 t})$$

$$S_3^{(k)} = r^{(k)} \rho_{(r^{(k)})} C_P (-c_0 e^{-c_0 t} + \tau_q c_0^2 e^{-c_0 t}) \quad (34)$$

حل تحلیلی معادله فوق به صورت زیر نوشته می شود:

$$\Delta T^{(k)} = \bar{X}_1^{(k)} \exp(\bar{\lambda}_1^{(k)} r) + \bar{X}_2^{(k)} \exp(\bar{\lambda}_2^{(k)} r) \quad (35)$$

که

$$\bar{\lambda}_1^{(k)}, \bar{\lambda}_2^{(k)} = \frac{-S_2^{(k)} \pm \sqrt{(S_2^{(k)})^2 - 4S_3^{(k)} S_1^{(k)}}}{2S_1^{(k)}} \quad (36)$$

$\bar{X}_1^{(k)}$ و $\bar{X}_2^{(k)}$ ضرایب ثابت هستند که از شرایط مرزی به همراه شرایط پیوستگی بدست می آیند. شرایط پیوستگی در رابطه (۳۷) آورده شده است:

$$\Delta T^{(k)} \Big|_{r=r^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}} = \Delta T^{(k+1)} \Big|_{r=r^{(k+1)} - \frac{t^{(k+1)}}{2}}$$

$$\frac{d\Delta T^{(k)}}{dr} \Big|_{r=r^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}} = \frac{d\Delta T^{(k+1)}}{dr} \Big|_{r=r^{(k+1)} - \frac{t^{(k+1)}}{2}} \quad (37)$$

با حاصل شدن ضرایب ثابت با استفاده از شرایط مرزی و پیوستگی، تغییرات دما برحسب پارامترهای مختلف حاصل می شود.

۴- نتایج و بحث

در این قسمت به بررسی نتایج حاصل از تأثیر تغییرات پارامترهای مختلف مانند ضریب ناهمگنی، شدت میدانهای الکتریکی و مغناطیسی و اثرات میدان حرارتی بر رفتار دیسک دوار با مواد مدرج تابعی پرداخته می شود. صحت نتایج با مقایسه با نتایج حاصل از آنچه قبلاً در تحقیقات قبلی ارائه شده است، تایید می شود. مقادیر در نظر گرفته شده برای استخراج نتایج برای جنس سرامیک به صورت زیر است [۱۲].

$$n = 0.5, c_0 = 0.5 \frac{1}{s}, t = 10s, \tau_T = 10,$$

$$\tau_q = 0.5, c_p = 555 \frac{j}{kg \text{ } ^\circ C}, m = 40,$$

لازم به ذکر است که شعاع به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$r^{(k)} - \frac{t^{(k)}}{2} \leq r \leq r^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2} \quad (29)$$

که $r^{(k)}$ و $t^{(k)}$ به ترتیب شعاع هر حلقه و عرض آن می باشد. ضرایب $X_1^{(k)}, \dots, X_4^{(k)}$ از شرایط مرزی در نظر گرفته شده و اعمال شرایط پیوستگی در مرزها حاصل می شود. این شرایط پیوستگی به صورت رابطه (۳۰) است:

$$u^{(k)} \Big|_{r=r^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}} = u^{(k+1)} \Big|_{r=r^{(k+1)} - \frac{t^{(k+1)}}{2}}$$

$$\sigma_r^{(k)} \Big|_{r=r^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}} = \sigma_r^{(k+1)} \Big|_{r=r^{(k+1)} - \frac{t^{(k+1)}}{2}}$$

$$\phi^{(k)} \Big|_{r=r^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}} = \phi^{(k+1)} \Big|_{r=r^{(k+1)} - \frac{t^{(k+1)}}{2}}$$

$$\frac{d\phi^{(k)}}{dr} \Big|_{r=r^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}} = \frac{d\phi^{(k+1)}}{dr} \Big|_{r=r^{(k+1)} - \frac{t^{(k+1)}}{2}} \quad (30)$$

با بدست آوردن ضرایب مجهول و جایگزینی در معادلات مربوطه میدانهای تغییر مکان برای هر حلقه حاصل می شود؛ همچنین با افزایش تعداد حلقهها دقت نتایج افزایش می یابد.

۳-۲- تحلیل حرارتی

تغییرات دما را می توان به صورت معادله (۳۱) نوشت [۴۰]:

$$\Delta T(r, t) = \Delta T(r) (1 - e^{-c_0 t}) \quad (31)$$

که در آن c_0 یک ضریب ثابت است. با جایگذاری معادله (۳۱) در رابطه (۱۸)، معادله (۳۲) حاصل می شود:

$$(c_0 e^{-c_0 t} - \tau_q c_0^2 e^{-c_0 t}) (\rho(r) C_P \Delta T(r)) = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) (K(r) ((1 - e^{-c_0 t}) + \tau_T c_0 e^{-c_0 t})) \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \quad (32)$$

همچنین معادله فوق با توجه به روش نیمه تحلیلی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\left(S_1^{(k)} \frac{d^2}{dr^2} + S_2^{(k)} \frac{d}{dr} + S_3^{(k)} \right) \Delta T^{(k)} = 0 \quad (33)$$

که

$$S_1^{(k)} = r^{(k)} K_{(r^{(k)})} ((1 - e^{-c_0 t}) + \tau_T c_0 e^{-c_0 t})$$

لذا نتایج تحلیل یک مساله متقارن محوری در دو حالت تنش صفحه‌ای (شبهه‌سازی دیسک) و کرنش صفحه‌ای (شبهه-سازی یک استوانه با طول زیاد) با روش حاضر جهت مقایسه با نتایج آزمایشگاهی و عددی ذکر شده توسط ماکوان و همکاران [۴۱] همراه با میزان درصد نسبی خطا آورده شده است.

همانطور که از جدول ۲ مشخص است، نتایج آزمایشگاهی ذکر شده در مرجع [۴۱] برای دو فشار داخلی ۵ ksi و ۱۰ ksi ذکر شده است که مقدار کرنش محیطی بدست آمده در شعاع خارجی در مرجع [۴۱] در بین مقادیر بدست آمده از دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای از روش حاضر است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج آزمایشگاهی به نتایج حالت کرنش صفحه‌ای نزدیک‌تر است و این با واقعیت مساله مورد آزمایش مطابقت دارد که یک استوانه با طول محدود است. حداکثر درصد نسبی خطا نسبت به حالت آزمایشگاهی در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای نیز محاسبه شده است که با توجه به درصد خطای ذکر شده تحلیل مساله صورت گرفته دارای دقت قابل قبولی است.

در ادامه به بررسی اثر پارامترهای مختلف بر رفتار دیسک دوار پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است، پارامترهای مورد بررسی به غیر از مواردی که واحد آن ذکر شده است طبق روابط ذکر شده در (۳۹) به صورت بدون بعد در نظر گرفته شده‌اند. در شکل ۴ تغییرات دما برحسب شعاع بی-بعد به‌ازای ضریب ناهمگنی و $c_0 = 1 \frac{1}{5}$ ترسیم شده است. در این شکل محور عمودی تغییرات دما و محور افقی شعاع بی‌بعد دیسک است. با توجه به نتایج به‌دست آمده مشخص است که با افزایش ضریب ناهمگنی تغییرات دمایی افزایش می‌یابد؛ بنابراین همان‌گونه که مشاهده می‌شود، هرچه مقدار پارامترهای غیرهمگنی در جسم بیشتر باشد، به سبب انبساط انرژی در جسم ماکسیمم دمای گذرا در جسم بیشتر شده و مقدار دمای جسم بالاتر می‌رود. جهت بررسی اثرات شدت میدان مغناطیس بر تغییر مکان، تنش و توزیع پتانسیل الکتریکی برحسب شعاع بی‌بعد و بدون میدان حرارتی با شرایط مرزی گیردار-آزاد شکل ۵ آورده شده است. لازم به ذکر است که تنش شعاعی و محیطی با توجه به رابطه (۴) محاسبه می‌شود. با توجه به این شکل ملاحظه

$$E_o = 151 Gpa, \rho_o = 5700 \frac{kg}{m^3}, \nu = 0.3,$$

$$\omega = 1000 \frac{rad}{s}, e_o = 15.2 \frac{C}{m^2}, r_i = \frac{r_o}{5}$$

$$\mu_o = 2.63225901 \times 10^{-6} \frac{H}{m},$$

$$H_z = 3 \times 10^7 \frac{A}{m}, \epsilon_o = 5.62 \times 10^{-9} \frac{C^2}{Nm^2}$$

$$\alpha_o = 10 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ C}, k_o = 2 \frac{W}{m \ ^\circ C} \quad (38)$$

در این بررسی پارامترهای بی‌بعد زیر تعریف می‌شود:

$$U = \frac{u}{u_0}, \sigma_{rn} = \frac{\sigma_r}{f_0}, \Phi = \frac{\phi}{\phi_0}, R = \frac{r}{r_o} \quad (39)$$

که

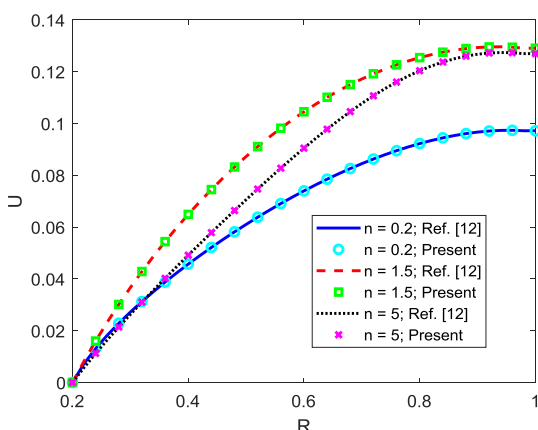
$$u_0 = \frac{\rho_o r_o^3 \omega^2}{E_o} + r_o \alpha_o \Delta T_o$$

$$f_0 = \rho_o r_o^3 \omega^2 + E_o \alpha_o \Delta T_o$$

$$\phi_0 = \frac{r_o E_o}{e_o} \quad (40)$$

در ابتدا به منظور اعتبار سنجی و مقایسه نتایج به‌دست آمده در غیاب اثرات میدان حرارتی و الکتریکی و اثرات میدان مغناطیس و با در نظر گرفتن پروفیل ضخامت یکنواخت دیسک، نتایج حاصل با نتایج مرجع [۱۲] در شکل ۳ مقایسه شده است. در این شکل تغییر مکان بی‌بعد برحسب شعاع دیسک بدون بعد با شرایط مرزی گیردار-آزاد آورده شده است که در آن مواد مدرج تابعی به‌کار رفته از آلومنیوم و سرامیک تشکیل شده است که آلومنیوم در سطح داخلی و سرامیک در سطح خارجی دیسک قرار دارد؛ همچنین در جدول ۱ صحت سنجی حداکثر جابجایی با مقالات پیشین برحسب مقادیر بی‌بعد ضخامت انجام شده است. با توجه به شکل ۳ و جدول ۱ مشخص می‌شود که نتایج تطابق خوبی با مطالعات پیشین دارد و از درستی نتایج و روش حل اطمینان حاصل می‌شود. علاوه بر این در جدول ۲ نتایج مربوط به کرنش محیطی مربوط به نقاط واقع بر پوسته خارجی یک استوانه با استفاده از حل حاضر جهت مقایسه با نتایج آزمایشگاهی و نتایج عددی ذکر شده توسط ماکوان و همکاران [۴۱] نیز آورده شده است. مساله مورد آزمایش توسط آنها یک استوانه جدارضخیم تحت فشار داخلی است. از آنجا که مساله مورد تحلیل در مقاله حاضر یک دیسک است؛

شکل ۶-ج توزیع پتانسیل الکتریکی برحسب شعاع بی بعد رفتاری مشابه با تغییر مکان و تنش با افزایش ضریب ناهمگنی دارد. شکل ۷ نمودار تغییر مکان، تنش شعاعی و توزیع پتانسیل الکتریکی برحسب شعاع بی بعد و زمان با شرایط مرزی گیردار- آزاد تحت میدان حرارتی آورده شده است. در شکل ۷-الف، تغییر مکان شعاعی در حالت پایا (Steady state) در شعاع خارجی نسبت به حالت گذرا بیشتر است و با افزایش زمان تغییر مکان به سمت تغییر مکان در



شکل ۳- مقایسه تغییر مکان بی بعد برحسب شعاع دیسک با مرجع [۱۲] با شرایط مرزی گیردار- آزاد

می شود که با افزایش شدت میدان مغناطیس تغییر مکان و تنش شعاعی کاهش می یابد. وجود میدان مغناطیسی، از تغییر مکان بیشتر دیسک جلوگیری می کند و می توان این گونه بیان نمود که وجود میدان مغناطیسی در دیسک، موجب کاهش تغییر مکان و همچنین کاهش تنش و سفت شدن سیستم می شود.

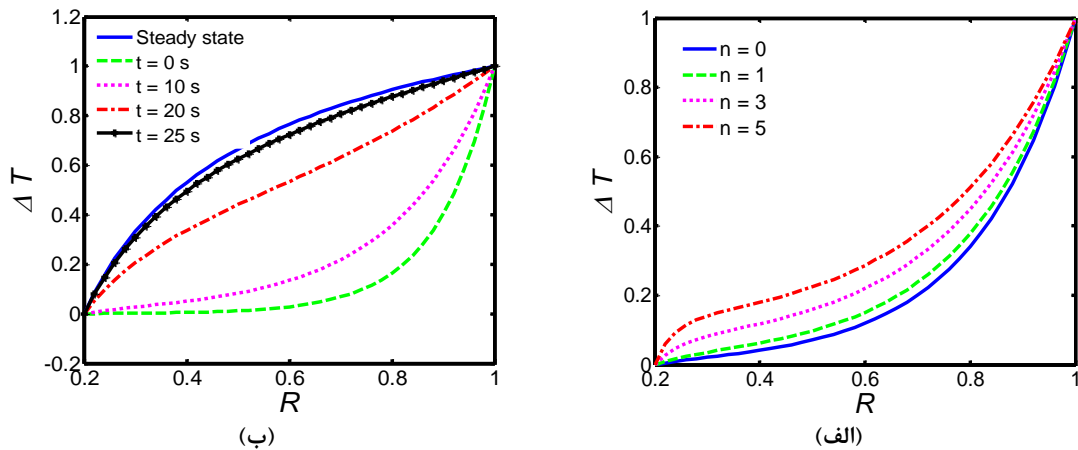
شکل ۶ به بررسی اثرات ضریب ناهمگنی بر تغییر مکان، تنش و توزیع پتانسیل الکتریکی برحسب شعاع بی بعد با شرایط مرزی گیردار- آزاد تحت میدان حرارتی پرداخته شده است. این شکل نشان می دهد که هر چه مقدار ضریب ناهمگنی n بیشتر باشد، تغییر مکان شعاعی ایجاد شده دارای مقادیر بیشتری بوده و هر چه مقدار پارامتر ناهمگنی کمتر باشد، تغییر مکان ایجاد شده دارای مقادیر کمتری می شود؛ همچنین در شعاع های بالاتر تغییرات تغییر مکان با تغییرات پارامتر ناهمگنی افزایش می یابد. علاوه بر این با توجه به شکل ۶-ب مشاهده می شود که در ضرایب ناهمگنی $n = 1$ نسبت به $n = 0$ تنش شعاعی بیشتری حاصل می شود. دلیل این امر این است که مطابق شکل ۶ و توضیحات بیان شده در مورد تأثیر ضریب ناهمگنی، افزایش ضریب ناهمگنی تا $n = 1$ باعث کاهش مقادیر خصوصیات مکانیکی می شود و در نتیجه باعث افزایش تغییر مکان و تنش می شود؛ همچنین در

جدول ۱- صحت سنجی حداکثر جابجایی با مقالات پیشین برحسب مقادیر بی بعد ضخامت

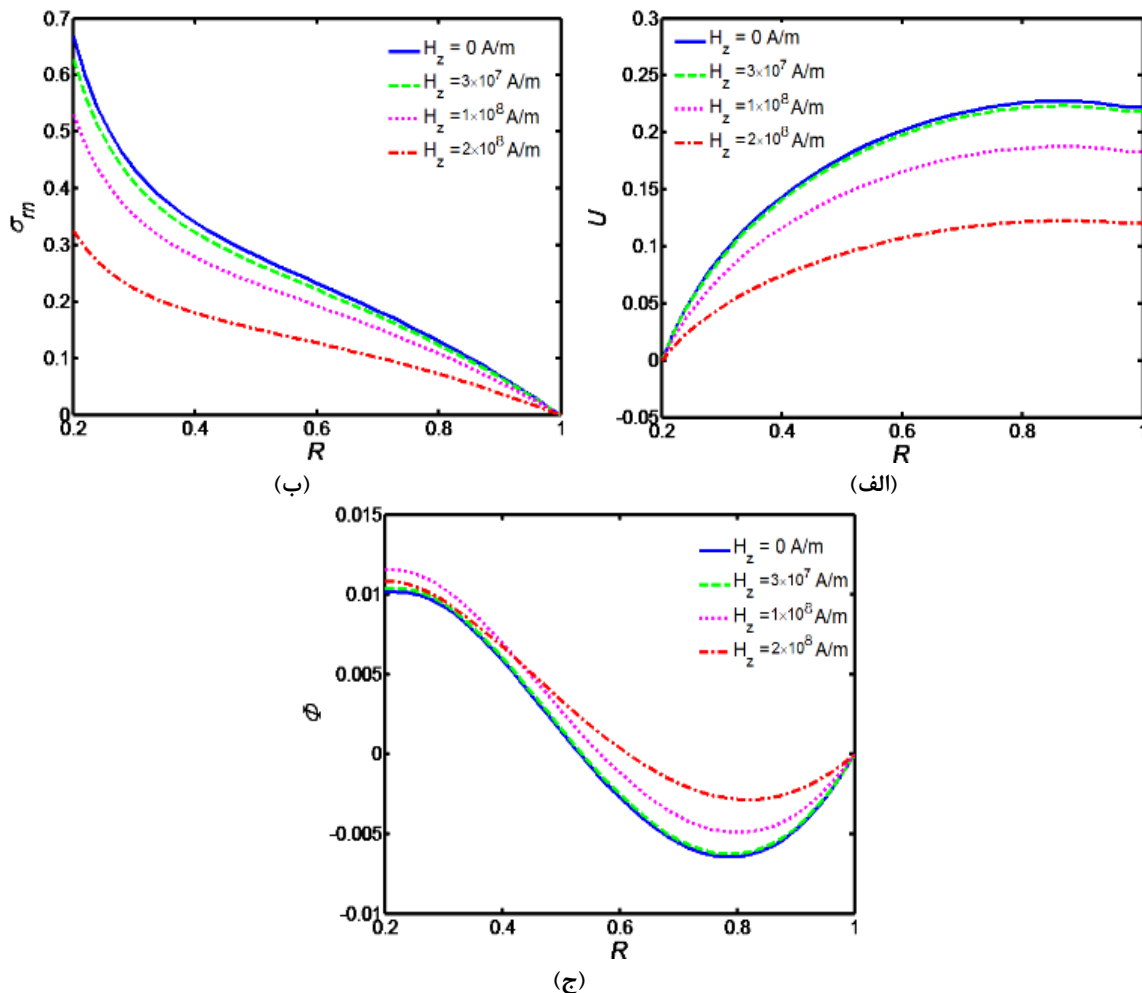
مقادیر بی بعد ضخامت	مقاله حاضر	مرجع [۴۲]	مرجع [۴۳]
۰/۰۵	۱۰/۴۰۳	۱۰/۴۰۱	۱۰/۳۹۶
۰/۱	۱۰/۴۹۱	۱۰/۴۸۷	۱۰/۴۸۱
۰/۱۵	۱۰/۶۳۴	۱۰/۶۳۱	۱۰/۶۲۳

جدول ۲- صحت سنجی کرنش محیطی ϵ_{θ} ($\times 10^{-6} \frac{in}{in}$) در شعاع بیرونی سیلندر با مرجع [۴۱] برحسب مقادیر فشار داخلی (ksi)

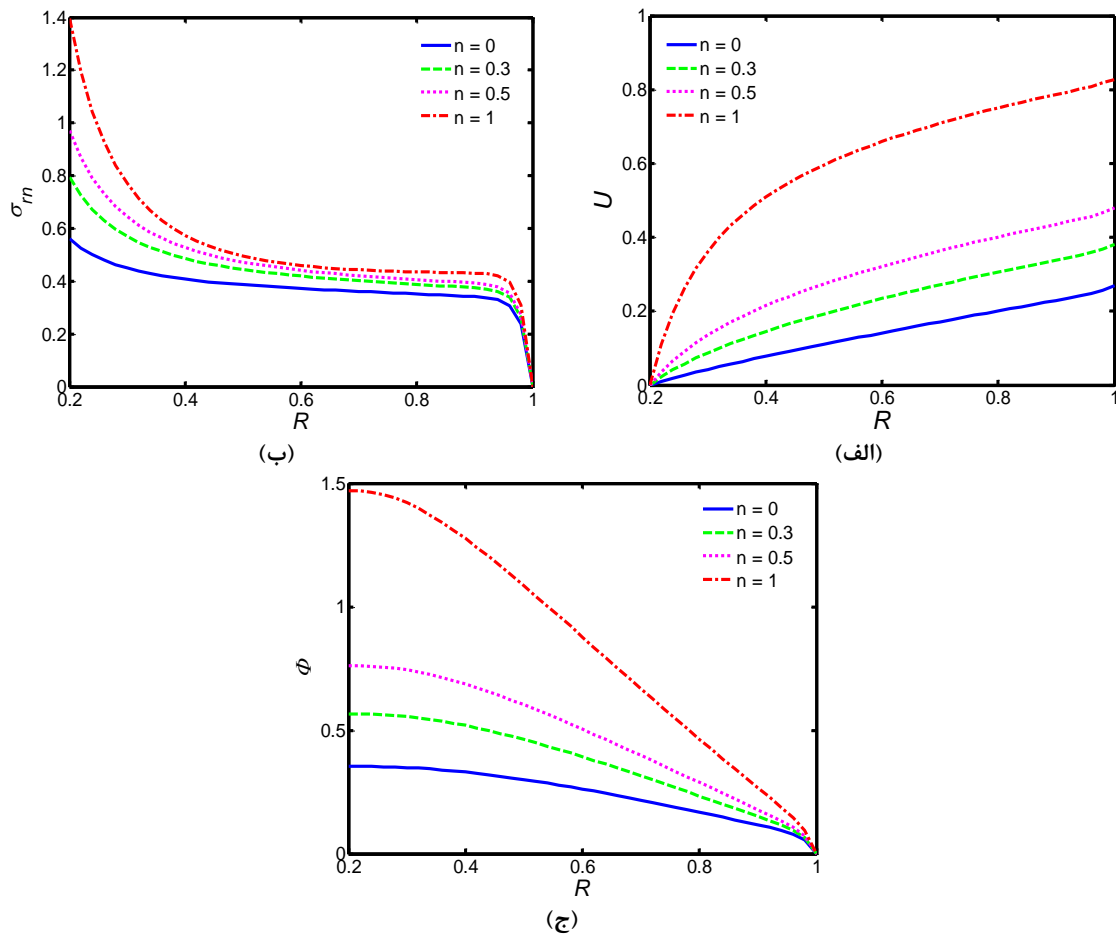
فشار (ksi)	حل عددی اجزا محدود [۴۱]	روش آزمایشگاهی [۴۱]	تنش صفحه ای		کرنش صفحه ای	
			مقاله حاضر	درصد خطای نسبی	مقاله حاضر	درصد خطای نسبی
۵	۴۲۵/۸۷	۴۰۹/۳۴	۴۳۱/۶۴	۵/۴۵	۳۹۵/۳۴	-۳/۴۲
۱۰	۸۵۳/۷۴	۸۱۸/۶۱	۸۶۳/۲۹	۵/۴۶	۷۹۰/۶۹	-۳/۴۱



شکل ۴- تغییرات دما (درجه سانتیگراد) بر حسب شعاع بی بعد برای $c_0 = 1 \frac{1}{s}$ به ازای: الف) ضریب ناهمگنی و ب) زمان



شکل ۵- الف) تغییر مکان، ب) تنش شعاعی و ج) پتانسیل الکتریکی بر حسب شعاع بی بعد و میدان مغناطیسی بدون میدان حرارتی با شرایط مرزی گیردار- آزاد



شکل ۶- الف) تغییر مکان ب) تنش شعاعی ج) پتانسیل الکتریکی برحسب شعاع بی بعد و ضریب ناهمگنی با شرایط مرزی گیردار- آزاد

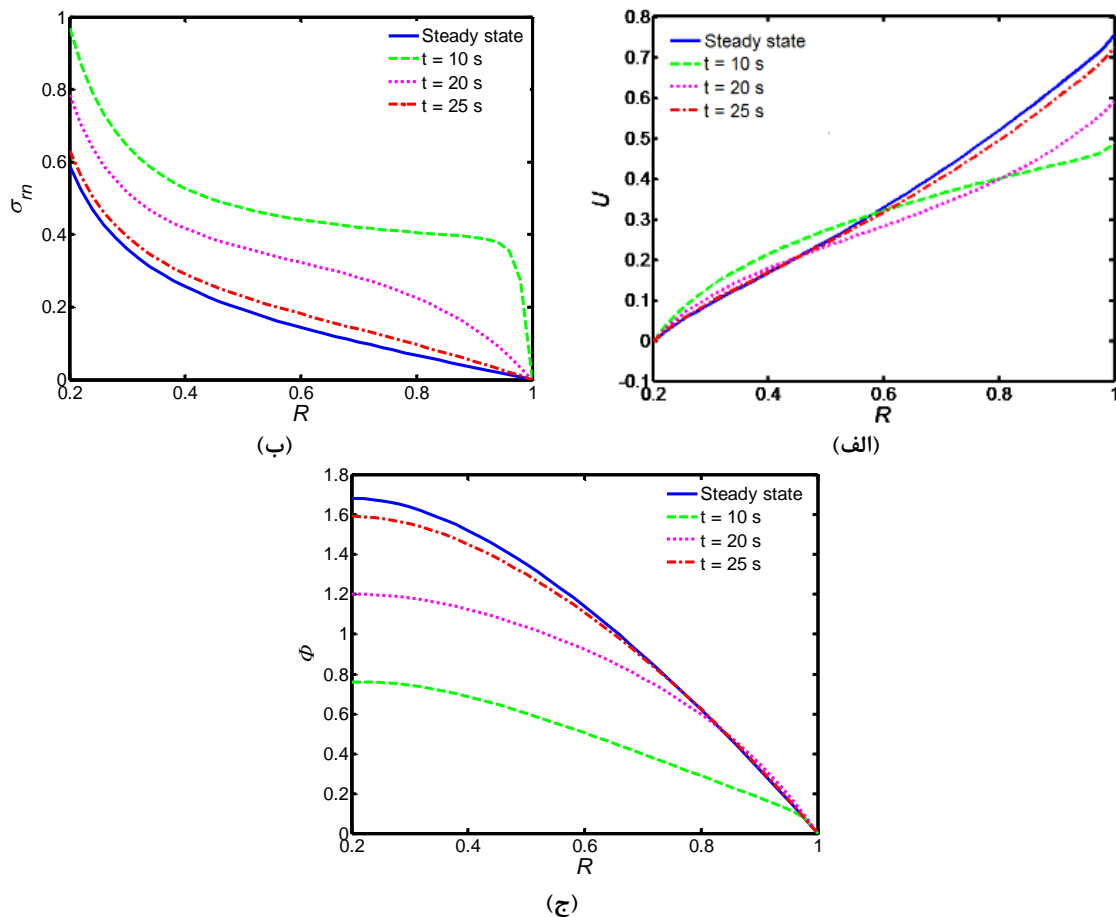
و تنش شعاعی در راستای شعاع بی بعد کاهش می یابد؛ همچنین در شکل ۸ ج ملاحظه می شود، توزیع پتانسیل الکتریکی با افزایش تأخیر زمان گرادیان دمایی در ابتدا کاهش و در نزدیکی شعاع خارجی افزایش می یابد. در شکل ۹ تغییر مکان، تنش شعاعی و پتانسیل الکتریکی برحسب شعاع بی بعد و تأخیر زمان شار گرمایی با شرایط مرزی گیردار- آزاد ترسیم شده است. در این شکل در مقدار بی بعد شعاع دیسک در ابتدا و انتها، شرایط مرزی گیردار- آزاد برقرار است؛ همچنین نتایج بیانگر این است که تغییر مکان و تنش شعاعی در راستای شعاع روندی نزولی با افزایش تأخیر زمان شار گرمایی دارد، در حالی که توزیع پتانسیل الکتریکی در این حالت در ابتدا کاهش و سپس افزایش جزئی دارد.

حالت پایا میل می کند. دلیل این امر این است که با گذشت زمان اثرات دمایی گذرا کاهش یافته و به سمت دمایی پایا میل می کند و در لحظه ای که جسم از نظر دمایی به حالت پایا می رسد، توزیع دمایی آن مشابه توزیع در حالت دمایی پایا می شود؛ همچنین در شکل ۷-ب و شکل ۷-ج با افزایش زمان مقدار تنش شعاعی و توزیع پتانسیل الکتریکی به مقدار آن در حالت پایا نزدیک می شود. علاوه بر این مقدار شرایط مرزی در شعاع ابتدا و انتها نیز ارضا می شود.

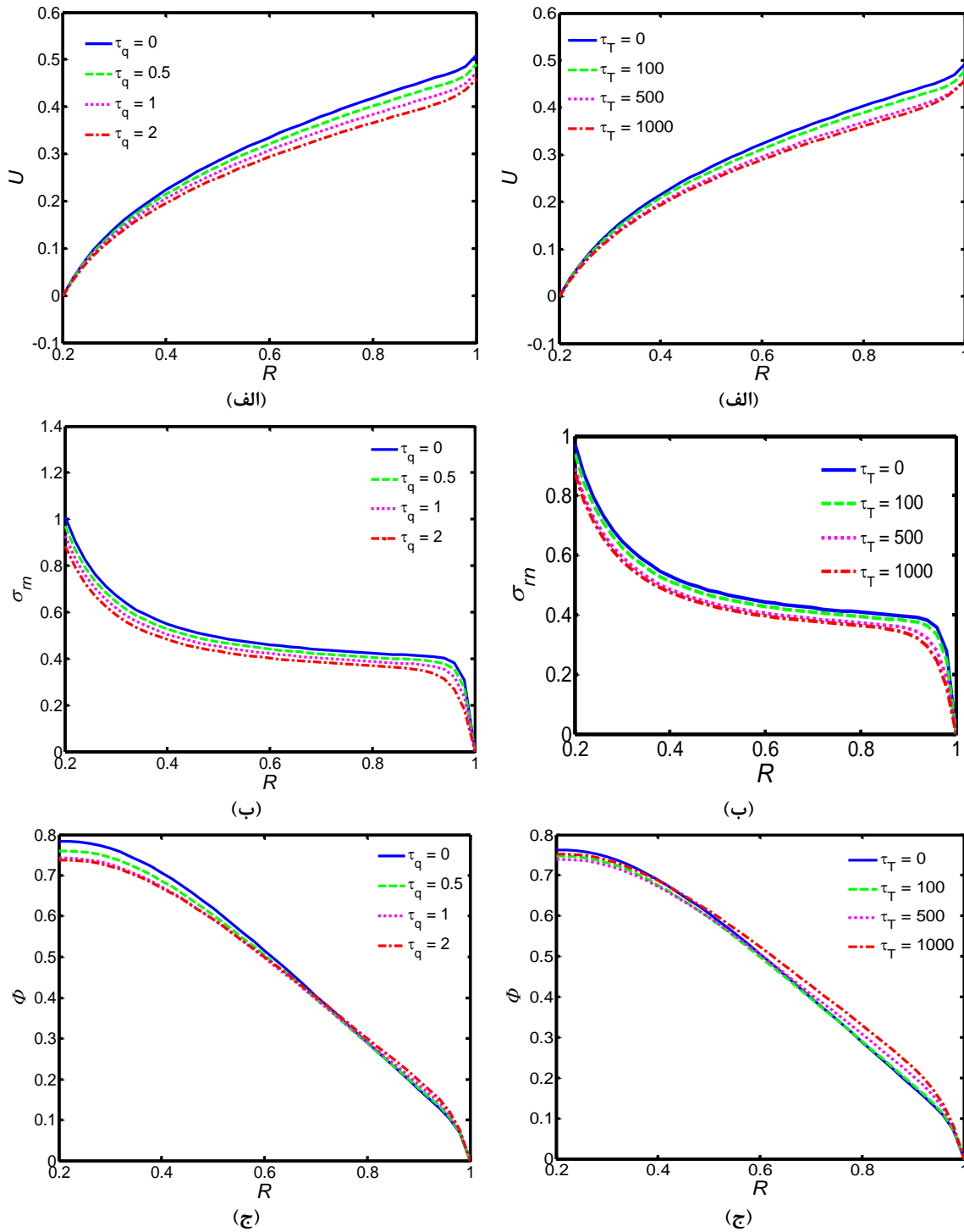
شکل ۸ به بررسی اثرات تأخیر زمان گرادیان دمایی بر تغییر مکان، تنش شعاعی و پتانسیل الکتریکی برحسب شعاع بی بعد و با شرایط مرزی گیردار- آزاد پرداخته است. همان گونه که در شکل ۸-الف و شکل ۸-ب مشاهده می شود، با افزایش تأخیر زمان گرادیان دمایی، تغییر مکان

میل می‌کند تا شرایط مرزی در نظر گرفته شده را ارضا نماید. شکل ۱۱ تغییر مکان، تنش شعاعی و پتانسیل الکتریکی بر حسب شعاع بی‌بعد و ضریب ناهمگنی با شرایط مرزی آزاد-آزاد تحت میدان حرارتی ترسیم شده است. در شرایط مرزی آزاد-آزاد تنش شعاعی در ابتدا و انتهای پارامتر بی‌بعد R برابر با صفر است. در شکل ۱۱ الف مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر ناهمگنی تغییر مکان افزایش می‌یابد؛ همچنین با مقایسه نتایج این شکل با شکل ۶ الف مشخص می‌شود که تغییر مکان در شرایط مرزی آزاد - آزاد نسبت به شرایط گیردار- آزاد مقادیر بیشتری دارد، زیرا تکیه‌گاه گیردار اجازه حرکت چرخشی و تغییر مکان را به دیسک نمی‌دهد؛ همچنین از شکل ۱۱ ب و ج می‌توان دریافت که افزایش ضریب ناهمگنی n باعث نرم شدن و در نتیجه افزایش تنش شعاعی و توزیع پتانسیل الکتریکی دیسک می‌شود.

در شکل ۱۰ اثرات شدت مغناطیسی با شرایط دیسک توپر بر میدان‌های تغییر مکان، تنش شعاعی و پتانسیل الکتریکی بدون میدان حرارتی بر حسب شعاع بی‌بعد نشان داده شده است. مطابق شکل ۱۰ الف، بررسی‌ها نشان می‌دهد که شدت میدان مغناطیس رابطه معکوس با تغییر مکان دیسک دارد، به طوری که در حالت بدون مگنت تغییر مکان بیشتری نسبت به حالت دیسک تحت میدان مغناطیس دارد. این نشان از افزایش رفتار سفت‌شوندگی با افزایش شدت میدان مغناطیس دارد و باعث سفت‌شدن سیستم می‌شود؛ بنابراین برای جلوگیری از تغییر مکان ایجاد شده در دیسک استفاده از میدان مغناطیس توصیه می‌شود. در شکل ۱۰ ب و ج نیز اثرات میدان مغناطیس موجب کاهش تنش و توزیع پتانسیل الکتریکی سیستم می‌شود. همچنین همان‌طور که مشاهده می‌شود، تنش شعاعی در نقطه انتهای پارامتر بی‌بعد R به سمت عدد صفر

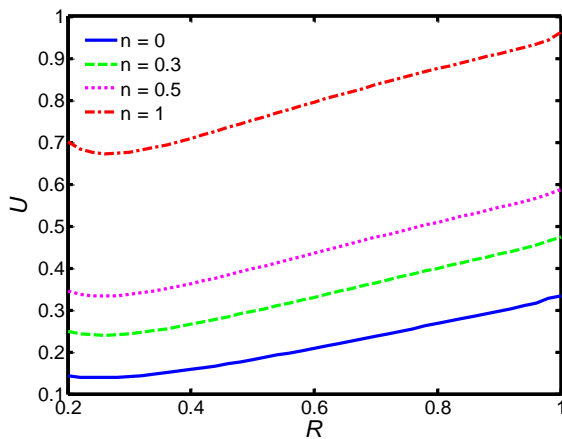


شکل ۷- الف) تغییر مکان، ب) تنش شعاعی و ج) پتانسیل الکتریکی بر حسب شعاع بی‌بعد و زمان با شرایط مرزی گیردار- آزاد

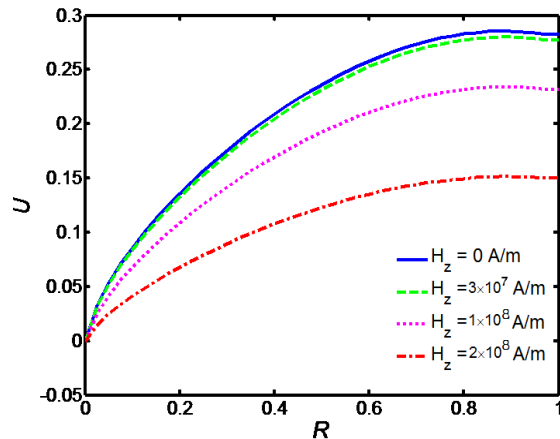


شکل ۹- الف) تغییر مکان، ب) تنش شعاعی و ج) پتانسیل الکتریکی بر حسب شعاع بی‌بعد و تأخیر زمان شار گرمایی با شرایط مرزی گیردار- آزاد

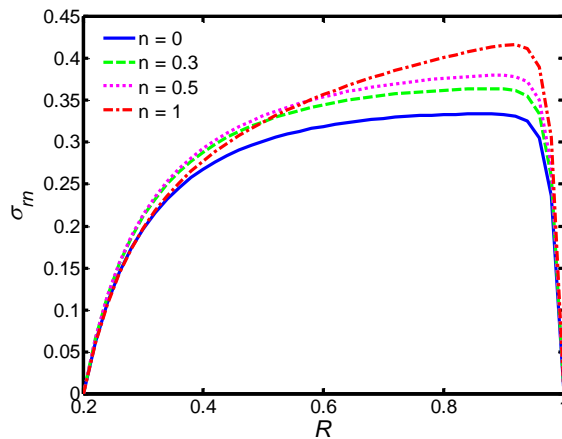
شکل ۸- الف) تغییر مکان، ب) تنش شعاعی و ج) پتانسیل الکتریکی بر حسب شعاع بی‌بعد و تأخیر زمان گرادیان دمایی با شرایط مرزی گیردار- آزاد



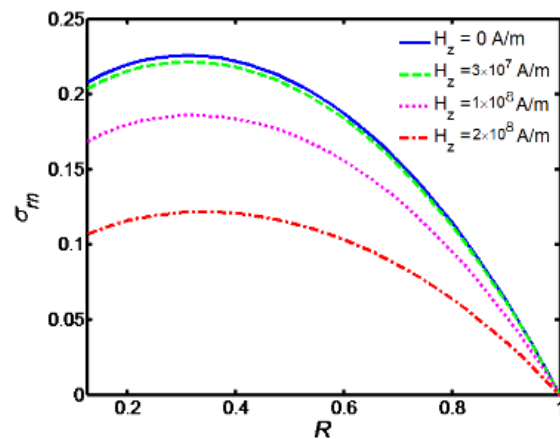
(الف)



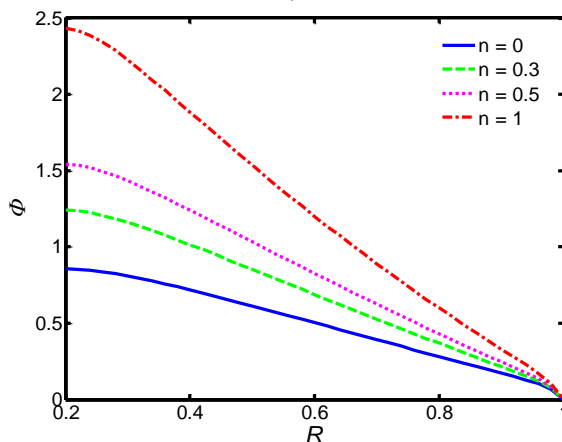
(الف)



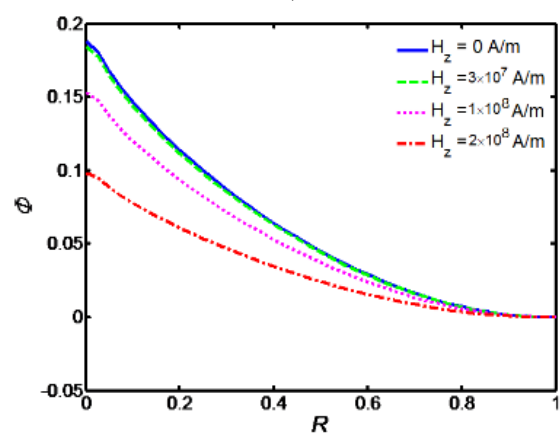
(ب)



(ب)



(ج)



(ج)

شکل ۱۱- الف) تغییر مکان (ب) تنش شعاعی (ج) پتانسیل الکتریکی برحسب شعاع بی‌بعد و ضریب ناهمگنی با شرایط مرزی آزاد- آزاد

شکل ۱۰- الف) تغییر مکان، (ب) تنش شعاعی و (ج) پتانسیل الکتریکی برحسب شعاع بی‌بعد و میدان مغناطیسی بدون میدان حرارتی با شرایط دیسک توپر

۵- نتیجه گیری

در این بررسی پاسخ ترمومغناطیس دیسک دوار با مواد مدرج تابعی بر اساس مدل هدایت حرارتی غیرفوریه تحت میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی بررسی گردید. خصوصیات مکانیکی مواد دیسک دوار طبق تابع توانی در جهت شعاع به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. در این بررسی تأثیر تغییرات پارامترهای مختلف از جمله ضریب ناهمگنی، شدت میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی و اثرات میدان حرارتی بر رفتار دیسک دوار با مواد مدرج تابعی مورد مطالعه قرار گرفت؛ همچنین برای اعتبارسنجی مسئله از مقایسه پاسخ به‌دست آمده با پژوهش‌های قبلی استفاده شده است. علاوه‌براین در ادامه به‌طور اختصار نتایج اصلی این مطالعه ارائه می‌شود.

با توجه به نتایج مشخص شد که با افزایش ضریب ناهمگنی تغییرات دمایی افزایش می‌یابد؛ همچنین وجود میدان مغناطیسی در دیسک، موجب کاهش تغییر مکان و همچنین کاهش تنش و سفت شدن سیستم می‌شود. علاوه-براین هر چه مقدار ضریب ناهمگنی n بیشتر باشد، تغییر مکان شعاعی ایجاد شده دارای مقادیر بیشتری بوده و افزایش ضریب ناهمگنی تا $n = 1$ باعث کاهش مقادیر خصوصیات مکانیکی می‌شود و در نتیجه باعث افزایش تغییر مکان و تنش می‌شود. در مورد اثرات دمای گذرا بررسی‌ها نشان داد که برای شرایط مرزی گیردار- آزاد، تغییر مکان شعاعی در حالت پایا در شعاع خارجی بی‌بعد نسبت به حالت گذرا بیشتر است و با افزایش زمان تغییر مکان به سمت تغییر مکان در حالت پایا میل می‌کند. برای شرایط مرزی گیردار- آزاد با افزایش تأخیر زمان گرادیان دمایی، تغییر مکان و تنش شعاعی در راستای شعاع بی‌بعد کاهش می‌یابد؛ همچنین نتایج بیانگر این است که تغییر مکان و تنش شعاعی برای شرایط مرزی گیردار- آزاد در راستای شعاع روندی نزولی با افزایش تأخیر زمان شار گرمایی دارد، در حالی که توزیع پتانسیل الکتریکی در این حالت در ابتدا کاهش و سپس افزایش جزئی دارد. از سویی دیگر مشخص شد که تغییر مکان در شرایط مرزی آزاد - آزاد نسبت به شرایط گیردار- آزاد مقادیر بیشتری دارد، زیرا تکیه‌گاه گیردار اجازه حرکت چرخشی و تغییر مکان را به دیسک نمی‌دهد.

۶- مراجع

- [1] Dai T, Dai HL (2017) Analysis of a rotating FGME circular disk with variable thickness under thermal environment. *Appl Math Model* 45: 900-924.
- [2] Dai HL., Zheng ZQ, Dai T (2017) Investigation on a rotating FGPM circular disk under a coupled hygrothermal field. *Appl Math Model* 46: 28-47.
- [3] Khanna K, Gupta VK, Nigam SP (2017) Creep Analysis in Functionally Graded Rotating Disc Using Tresca Criterion and Comparison with Von-Mises Criterion. *Mater Today-Proc* 4(2): 2431-2438.
- [4] Loghman A, Azami M (2016) A novel analytical-numerical solution for nonlinear time-dependent electro-thermo-mechanical creep behavior of rotating disk made of piezoelectric polymer. *Appl Math Model* 40(7): 4795-4811.
- [5] Dai T, Dai HL (2016) Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed. *Appl Math Model* 40(17): 7689-7707.
- [6] Zenkour A (2009) Stress distribution in rotating composite structures of functionally graded solid disks. *J Mater Process Tech* 209(7): 3511-3517.
- [7] Asghari M, Ghafoori E (2010) A three-dimensional elasticity solution for functionally graded rotating disks. *Compos Struct* 92(5): 1092-1099.
- [8] Kadhodayan M, Golmakani M (2014) Non-linear bending analysis of shear deformable functionally graded rotating disk. *Int J Nonlin Mech* 58: 41-56.
- [9] Akbari M, Ghanbari J (2015) Analytical solution of thermo-elastic stresses and deformation of functionally graded rotating hollow discs with radially varying thermo-mechanical properties under internal pressure. *Comput Mater Contin* 45: 187-201.
- [10] Shahzamanian M, Sahari B, Bayat M, Mustapha F, Ismarrubie Z (2010) Finite element analysis of thermoelastic contact problem in functionally graded axisymmetric brake disks. *Compos Struct* 92(7): 1591-1602.
- [11] Afsar A, Go J (2010) Finite element analysis of thermoelastic field in a rotating FGM circular disk. *Appl Math Model* 34(11): 3309-3320.
- [12] Bayat M, Saleem M, Sahari B, Hamouda A, Mahdi E (2008) Analysis of functionally graded rotating disks with variable thickness. *Mech Res Commun* 35(5): 283-309.

[۱۳] ترابی ک، افشاری ح (۲۰۱۸) تحلیل تنش‌های مکانیکی-حرارتی در دیسک‌های دوار با ضخامت و

- [26] Ghazizadeh HR, Azimi A, Maerefat M (2012) An inverse problem to estimate relaxation parameter and order of fractionality in fractional single-phase-lag heat equation. *Int J Heat Mass Tran* 55(7): 2095-2101.
- [27] Sutradhar A, Paulino GH, Gray L (2002) Transient heat conduction in homogeneous and non-homogeneous materials by the Laplace transform Galerkin boundary element method. *Eng Anal Bound Elem* 26(2): 119-132.
- [28] Sutradhar A, Paulino GH (2004) The simple boundary element method for transient heat conduction in functionally graded materials. *Comput Method Appl M* 193(42): 4511-4539.
- [29] Khosravifard A, Hematiyan M, Marin L (2011) Nonlinear transient heat conduction analysis of functionally graded materials in the presence of heat sources using an improved meshless radial point interpolation method. *Appl Math Model* 35(9): 4157-4174.
- [30] Babaei M., Chen Z (2008) Hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow sphere. *Int J Thermophys* 29(4): 1457-1469.
- [31] Babaei MH, Chen Z (2010) Transient hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow cylinder. *J Thermophys Heat Tr* 24(2): 325-330.
- [32] Keles I, Conker C (2011) Transient hyperbolic heat conduction in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties. *Eur J Mech A-Solid* 30(3): 449-455.
- [33] Arani AG, Amir S (2011) Magneto-thermo-elastic stresses and perturbation of magnetic field vector in a thin functionally graded rotating disk. *J Solid Mech* 3(4): 392-407.
- [34] Arani AG, Loghman A, Shajari, Amir AS (2010) Semi-analytical solution of magneto-thermo-elastic stresses for functionally graded variable thickness rotating disks. *J Mech Sci Technol* 24(10): 2107-2118.
- [35] Galic D, Horgan C (2003) The stress response of radially polarized rotating piezoelectric cylinders. *J Appl Mech* 70(3): 426-435.
- [36] Ruhi M, Angoshtari A, Naghdabadi R (2005) Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials. *J Therm Stresses* 28(4): 391-408.
- [37] Loghman A, Abdollahian M, Jazi AJ, A Arani G (2013) Semi-analytical solution for electromagnetothermoelastic creep response of functionally graded piezoelectric rotating disk. *Int J Therm Sci* 65: 254-266.
- [38] Tzou D (1995) A unified field approach for heat conduction from macro-to micro-scales. *J Hest Transf* 117(1): 8-16.
- خواص متغیر در راستای شعاعی. نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر ۴۶-۳۳ (۱): ۵۰.
- [14] Bhowmick S, Misra D, Saha KN (2008) Approximate solution of limit angular speed for externally loaded rotating solid disk. *Int J Mech Sci* 50(2): 163-174.
- [15] You L, Wang J, Tang B (2009) Deformations and stresses in annular disks made of functionally graded materials subjected to internal and/or external pressure. *Meccanica* 44(3): 283-292.
- [16] Çallioğlu H, Bektaş NB, Sayer M (2011) Stress analysis of functionally graded rotating discs: analytical and numerical solutions. *Acta Mech Sinica* 27(6): 950-955.
- [17] Peng XL, Li XF (2012) Effects of gradient on stress distribution in rotating functionally graded solid disks. *J Mech Sci Technol* 26(5): 1483-1492.
- [18] Peng XL, Li XF (2010) Thermal stress in rotating functionally graded hollow circular disks. *Compos Struct* 92(8): 1896-1904.
- [۱۹] لقمان ع، اعظمی م، تورنگ ح (۲۰۱۶) تحلیل الکترومگنتو ترمومکانیک دیسک دوار پلیمری هوشمند تقویت شده با نانولوله های کربنی چندجداره با رفتار غیرخطی. نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۱۰۸-۹۷ (۲): ۹۷
- [20] Nie G, Batra R (2010) Stress analysis and material tailoring in isotropic linear thermoelastic incompressible functionally graded rotating disks of variable thickness. *Compos Struct* 92(3): 720-729.
- [21] Bayat M., Saleem M, Sahari B, Hamouda AMS, Mahdi E (2009) Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads. *Int J Pres Ves Pip* 86(6): 357-372.
- [22] Çallioğlu H. (2011) Stress analysis in a functionally graded disc under mechanical loads and a steady state temperature distribution. *Sadhana* 36(1): 53.
- [23] Jahromi BH, Nayeb-Hashemi H, Vaziri A (2012) Elasto-plastic stresses in a functionally graded rotating disk. *J Eng Mater-T ASME* 134(2): 021004.
- [24] Rahideh H, Malekzadeh P, Haghghi MG (2012) Heat conduction analysis of multi-layered FGMs considering the finite heat wave speed. *Energ Convers Manage* 55: 14-19.
- [25] Akbarzadeh A, Chen Z (2013) Heat conduction in one-dimensional functionally graded media based on the dual-phase-lag theory. *P I Mech Eng C-J Mec* 227(4): 744-759.

- Mechanical Engineering Congress and Exposition 173-178.
- [42] Bayat M, Sahari B, Saleem M, Ali A, Wong S (2009) Bending analysis of a functionally graded rotating disk based on the first order shear deformation theory. *Appl Math Model* 33(11): 4215-4230.
- [43] Reddy J, Wang C, Kitipornchai S (1999) Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates. *Eur J Mech A-Solid* 18(2): 185-199.
- [39] Kordkheili SH, Naghdabadi R (2007) Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk. *Compos Struct* 79(4): 508-516.
- [40] Asgari M, Akhlaghi M (2010) Transient thermal stresses in two-dimensional functionally graded thick hollow cylinder with finite length. *Arch Appl Mech* 80(4): 353-376.
- [41] Macwan SP, Hu Z, Delfanian F (2011) Experimental Verification of Model Pressurized Thick-Walled Cylinder With Numerical and Theoretical Methods. in: *ASME 2011 International*