



DOR:

کاربرد روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته هم‌مکان در حل معادلات حاکم بر سیالات غیرنیوتنی با مدل هرشل - بالکلی

محمد نقیان^۱ و خسرو حسینی^{۲*}

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی عمران، دانشگاه سمنان

^۲ دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه سمنان

یادداشت تحقیقاتی، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۰۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۱/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۱۷

چکیده

یکی از روش‌های بدون شبکه، روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته (DLSM) است. در این روش از نقاط گرهی برای تخمین توابع شکل و گسسته‌سازی معادلات استفاده می‌شود. با افزودن نقاطی تحت عنوان نقاط هم‌مکان، روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته هم‌مکان (CDLSM) شکل می‌گیرد که در گسسته‌سازی معادلات استفاده می‌شوند. در این تحقیق برای تخمین توابع شکل از روش درونیاب شعاعی نقاط (RPIM) برای حل معادلات دو بعدی حاکم بر سیالات غیر نیوتنی استفاده شده است. برای شبیه‌سازی رفتار سیال غیرنیوتنی از مدل هرشل بالکلی کمک گرفته شده است. برای صحت‌سنجی نتایج از سه مثال عددی جریان بین دو صفحه موازی، جریان در حفره مربعی و نیم‌دایره‌ای با عدد رینولدز ۱۰۰ استفاده شده است. در نتایج ارائه شده، معیار (MSE) میانگین مربعات خطا بررسی شده که بطور میانگین برای سه مسئله مذکور به ترتیب برابر 7.1×10^{-5} ، 1.3×10^{-6} و 1.6×10^{-6} حاصل شده است. زمان محاسباتی مسئله جریان در حفره مربعی ۱۰۰۰ ثانیه بوده است؛ همچنین حل مسئله جریان در حفره نیم‌دایره‌ای برای هر تکرار ۰/۶۵ ثانیه زمان برده است.

کلمات کلیدی: حداقل مربعات گسسته هم‌مکان؛ روش درونیاب شعاعی نقاط؛ سیالات غیرنیوتنی؛ مدل هرشل بالکلی.

Using Collocation Discrete Least Squares Meshless Method in Solving Governing Equations for Non-Newtonian Fluids by Herschel- Bulkley Model

M. Naghian¹, Kh. Hosseini^{2*}

¹ Ph.D. Student, Civil. Eng., Semnan Univ., Semnan, Iran.

² Assoc. Prof., Civil. Eng., Semnan Univ., Semnan, Iran.

Abstract

One of the meshless methods is Discrete Least Squares Meshless (DLSM) method in which, the nodal points are used for estimating the shape functions and discretization of equations. Collocation Discrete Least Squares Meshless (CDLSM) method is formed by adding points as collocation points which are used in discretization of equations. In this research, Radial Point Interpolation Method (RPIM) has been used to estimate the shape functions in solving governing equations of two-dimensional non Newtonian fluid. Herschel-Bulkley model is used to simulate rheological behavior of fluid. Verification tests are achieved by three experimental bench marks such as flow between two parallel plates, lid driven square cavity and lid-driven arc-shape cavity for $Re=100$. Mean square error (MSE) is determined between the numerical and experimental results and conducted to 7.1×10^{-5} , 1.3×10^{-6} , 1.6×10^{-6} for the three mentioned problems, respectively. The computational time consumed for simulating the lid driven square cavity problem was 1000 seconds, respectively. Also, solving lid-driven arc-shape cavity problem for each iteration took 0.65 seconds, respectively.

Keywords: Collocation Discrete Least Squares; Radial Point Interpolation Method; Non-Newtonian fluids; Herschel- Bulkley Model.

۱- مقدمه

بررسی و مطالعه پدیده‌های حاکم بر طبیعت منجر به ایجاد معادلات ریاضی می‌شود که در مواردی حل دقیق آنها میسر نبوده و از پیچیدگی زیاد برخوردار هستند. عدم توانایی حل بسیاری از معادلات حاکم بر پدیده‌ها در رشته‌های مختلف مهندسی، باعث استفاده از روش‌های مختلف عددی در حل آنها شده است که می‌توان به روش‌های تفاضل محدود، اجزا محدود و احجام محدود اشاره کرد.

در روش‌های فوق، میدان محاسباتی مسئله بوسیله ابزاری به نام شبکه گسسته شده و نحوه این شبکه‌بندی در حل مسئله بسیار حائز اهمیت است. شبکه‌بندی در مسائل دوبعدی و سه‌بعدی دارای هندسه‌های پیچیده، سبب افزایش هزینه و زمان محاسبات می‌شود و نیازمند حافظه زیاد رایانه است.

اخیراً روش‌هایی تحت عنوان روش‌های بدون شبکه به روش‌های عددی حل معادلات افزوده شده که در آنها نیازی به شبکه‌بندی میدان محاسباتی نبوده و دامنه مسئله بوسیله نقاط یا گره گسسته‌سازی می‌شود. این روش‌ها دارای دو قسمت کلی می‌باشند: تشکیل توابع شکل و گسسته‌سازی معادلات.

بعنوان نقطه شروع روش‌های بدون شبکه می‌توان به کاربرد روش هیدرودینامیک ذرات هموار^۱ (SPH) در مدل-سازی پدیده‌های نجومی توسط گینگولد و همکاران [۱] و [۲] در سال ۱۹۷۷ اشاره کرد. در ادامه، با گسترش توابع شکل و نحوه گسسته‌سازی معادلات، روش‌های بدون شبکه متعددی ارائه گردید. در سال ۱۹۹۹ دیلتس [۳] با استفاده از توابع شکل حداقل مربعات متحرک^۲ (MLS) روش MLSPH را ارائه کرد. در سال ۱۹۹۸ روش پتروف گالرکین محلی^۳ (MLPG) توسط آتلوری و ژو [۴] ارائه گردید. از این روش لین و آتلوری [۵] در سال ۲۰۰۱ در حل معادلات ناویراستوکس تراکم‌ناپذیر استفاده کردند. در سال ۲۰۰۵ وانگ و همکاران [۶]، روش بدون شبکه محلی درونیایی شعاعی نقاط را در شبیه‌سازی فشار منفذی آب

بکار بردند. در سال ۲۰۰۶ می‌دوی و تانر [۷] برای شبیه‌سازی سیال غیرنیوتنی با رابطه توانی از روش بدون شبکه تابع پایه‌ای شعاعی استفاده کردند. کاربرد روش درونیایی شعاعی نقاط^۴ برای تخمین توابع شکل در مسائل مکانیک سیالات منجر به ارائه پاسخ‌های دقیقتری می‌شود که در این تحقیق نیز از این روش استفاده شده است [۸]. روش ترکیبی بدون شبکه و اجزا محدود در سال ۲۰۰۷ توسط دووان و لی [۹] در شبیه‌سازی سیال غیرنیوتنی غیرهم‌دما بکارگرفته شد. شامخی و صادقی [۱۰] در سال ۲۰۰۹، از روش بدون شبکه درونیایی نقاط برای شبیه‌سازی جریان سیال غیرنیوتنی در جریان در حفره مربعی استفاده کردند.

در سال ۲۰۱۵ روش هم‌مکانی تابع پایه‌ای شعاعی در حل مسائل حرارت و سطح آزاد توسط هون و همکاران [۱۱] استفاده شد. شایان و همکاران [۱۲]، از روش لاتیس بولتزمن بدون شبکه در مدل‌سازی عددی جریان خارجی لزج تراکم-ناپذیر، استفاده کردند.

در سال ۲۰۱۶ میکائیلی و بهجت [۱۳]، روش بدون شبکه گالرکین را در تحلیل سه‌بعدی خمش ورق هدفمند ضخیم بکار بردند. آنها در تحقیق خود برای تقریب تابع شکل از روش حداقل مربعات متحرک استفاده کردند.

الیویرا و پورتلا [۱۴] در سال ۲۰۱۶ برای مسائل الاستیسیته از فرم ضعیف محلی روش بدون شبکه هم-مکانی استفاده کردند. در سال ۲۰۱۷ زامولو و نوییل [۱۵]، از روش هم‌مکانی تابع پایه‌ای شعاعی در مسئله انتقال حرارت استفاده کردند. جوزفین و ویکتور [۱۶] از روش تابع پایه‌ای شعاعی در مدل‌سازی جریان سطحی غیرنیوتنی یخ استفاده کردند. در سال ۲۰۱۸ جعفری و شکیباییان [۱۷]، روش بدون شبکه نیمه‌ضمنی ذرات متحرک را در شبیه‌سازی سیالات غیرنیوتنی با استفاده از مدل $\mu(I)$ بکار بردند.

کاناخام و شواتونگ [۱۸] در سال ۲۰۱۹ با افزایش تعداد نقاط به تطریف تطبیقی در روند حل معادلات پواسون و معادلات جابجایی-پخش و معادلات برگر پرداختند. چانگ و

^۱ Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

^۲ Moving Least Squares

^۳ Meshless Local Petrov-Galerkin

^۴ Radial Point Interpolation Method

۲- معادلات حاکم بر جریان پایدار

معادلات کوشی، معادلات حاکم بر حرکت سیالات غیرنیوتنی می‌باشند. معادلات کوشی شامل معادلات پیوستگی و ممنتوم، با روابط (۱) تا (۵) تعریف می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۱)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (۲)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (۳)$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (۴)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (۵)$$

در روابط فوق، u و v مولفه‌های افقی و قائم سرعت، p مقدار فشار، τ_{ij} مولفه‌های تانسور تنش، μ ویسکوزیته ظاهری و ρ چگالی سیال می‌باشند. مقدار ویسکوزیته ظاهری تابعی از نرخ کرنش سیال است. رابطه بین تنش و کرنش بوسیله مدل‌های رئولوژیکی بیان می‌شود که یکی از این مدل‌ها، مدل هرشل-بالکلی بوده و با معادله (۶) تعریف می‌شود:

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 + m(|\dot{\gamma}|)^{n-1} \dot{\gamma} & , |\tau| > \tau_0 \\ \tau_0 & , |\tau| \leq \tau_0 \end{cases} \quad (۶)$$

در این رابطه n و m پارامترهای مدل می‌باشند؛ همچنین τ_0 حداقل تنش حدافل لازم برای جاری شدن سیال است. $|\dot{\gamma}|$ نرخ کرنش و τ تنش برشی می‌باشند. چنانچه بخواهیم تنش را بر اساس مولفه‌های تانسور تنش بیان کنیم، از معادله (۷) استفاده می‌شود:

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{xx}^2 + \frac{1}{2} \tau_{xy}^2 + \frac{1}{2} \tau_{yy}^2} \quad (۷)$$

نرخ کرنش نیز توسط معادله (۸) به شکل رابطه (۸) تعریف می‌شود:

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \quad (۸)$$

با اعمال معادلات (۴) و (۵) در معادلات کوشی، می‌توان معادلات حرکت را بصورت زیر بازنویسی کرد:

همکاران [۱۹] با استفاده از روش بدون شبکه هم‌مکانی، به حل مسائل غیرخطی مرزی متحرک پرداختند.

در سال ۲۰۰۵ روش بدون شبکه حدافل مربعات گسسته^۱ توسط افشار و ارزانی [۲۰] در حل معادله پواسون استفاده شد. در سال ۲۰۱۰ این روش با افزایش نقاط هم‌مکان تحت عنوان روش بدون شبکه حدافل مربعات گسسته هم‌مکان^۲ در حل معادلات ناویراستوکس توسط فیروزجایی و افشار [۲۱] استفاده شد. در این روش، نقاط گرهی برای تخمین توابع شکل و نقاط هم‌مکان برای گسسته‌سازی معادلات استفاده می‌شود. لشکرلوک و جباری [۲۲] در سال ۲۰۱۲ روش CDLSM را در مدل-سازی سیالات تراکم‌ناپذیر بکار بردند. لشکرلوک و همکاران [۲۳] در سال ۲۰۱۵، برای تحلیل تنش‌های برشی ناشی از پیچش در مقاطع منشوری، روش CDLSM را بکار بردند. روش CDLSM در سال ۲۰۱۷ توسط نقیان و همکاران [۲۴] در شبیه‌سازی جریانهای آشفته استفاده شد. تحقیقات روش CDLSM نشان می‌دهد، افزایش نقاط هم‌مکان باعث افزایش دقت در حل مسئله می‌شود.

برای ارزیابی هر روش عددی جدید نیاز است که آن روش در حوزه‌های مختلف استفاده شده و با بررسی نتایج، نقاط ضعف و قوت آن مشخص شود. با توجه به اینکه روش CDLSM به تازگی معرفی شده و در تحقیقات محدودی بکار رفته، برای بررسی کارایی آن نیاز به توسعه بیشتر و کاربرد در مسائل متنوع‌تر و مختلف دارد.

رفتار برخی جریان سیالات را می‌توان با مدل‌های غیرنیوتنی شبیه‌سازی کرد. در این‌گونه سیالات رابطه بین تنش برشی و گرادیان سرعت، غیرخطی است. در این تحقیق برای نخستین‌بار کاربرد روش بدون شبکه حدافل مربعات گسسته هم‌مکان در شبیه‌سازی سیالات غیرنیوتنی، با مدل هرشل-بالکلی پرداخته شده و معادلات در حالت دوبعدی گسسته شده‌اند؛ همچنین برای ارزیابی کارایی مدل عددی مورد نظر، از سه مثال عددی جریان در حفره‌های مربعی و نیم‌دایره‌ای و جریان بین صفحات موازی استفاده شده است.

¹ Discrete Least Square Meshless

² Collocation Discrete Least Square Meshless

$$R_k^t = B(u_k) - g(x_k) \\ = \sum_{i=1}^{n_n} B(N_i(x_k)) \cdot u_i - g(x_k) \quad , \quad k: 1 \sim m_t \quad (16)$$

$$R_k^u = u_k - \bar{u} = \sum_{i=1}^{n_n} N_i(x_k) \cdot u_i - \bar{u} \quad , \quad k: 1 \sim m_u \quad (17)$$

در روابط (۱۵) تا (۱۷) مقادیر m_t و m_u به ترتیب تعداد نقاط هم‌مکان در مرزهای نیومن و دریشه است. حال می‌توان تابع J که بیانگر مجموع مربعات باقیمانده است را به شکل رابطه (۱۸) تعریف کرد:

$$J = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{m_m} (R_k^d)^2 + a_t \cdot \sum_{k=1}^{m_t} (R_k^t)^2 + a_u \cdot \sum_{k=1}^{m_u} (R_k^u)^2 \right) \quad (18)$$

در این رابطه پارامترهای a_t و a_u ضرایب پهنالی برای اعمال شرایط مرزی نیومن و دریشه می‌باشند که تغییر مقادیر آنها در جواب مسئله و روند حل، تأثیر زیادی دارد. چنانچه تابع J مینیمم شود، دستگاه معادلاتی تشکیل می‌شود که فرم کلی آنرا می‌توان با رابطه (۱۹) نمایش داد:

$$KU = F \quad (19)$$

در این رابطه، K ماتریس سختی و F ماتریس مقادیر معلوم یا ماتریس دست راست تعریف می‌شود و هر درایه این ماتریس‌ها با روابط (۲۰) و (۲۱) بدست می‌آید:

$$K_{ij} = \sum_{k=1}^{m_m} L(N_i(x_k)) \cdot L(N_j(x_k)) \\ + a_t \cdot \sum_{k=1}^{m_t} B(N_i(x_k)) \cdot B(N_j(x_k)) \\ + a_u \cdot \sum_{k=1}^{m_u} N_i(x_k) \cdot N_j(x_k) \quad , \quad i, j: 1 \sim N \quad (20)$$

$$F_i = \sum_{k=1}^{m_m} L(N_i(x_k)) \cdot f(x_k) \\ + a_t \cdot \sum_{k=1}^{m_t} B(N_i(x_k)) \cdot g(x_k) \\ + a_u \cdot \sum_{k=1}^{m_u} N_i(x_k) \cdot \bar{u} \quad , \quad i: 1 \sim N \quad (21)$$

در روابط فوق، N تعداد کل نقاط گرهی است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\ + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\ + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

۳- روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته هم‌مکان

۳-۱- معرفی روش

در این تحقیق از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته هم‌مکان استفاده شده است. در این روش در حوزه مسئله از دو نوع نقاط استفاده می‌شود. نقاط گرهی برای تخمین تابع شکل و نقاط هم‌مکان برای گسسته‌سازی معادلات. در این روش هر نقطه گرهی، خودش یک نقطه هم‌مکان نیز است.

معادلات دیفرانسیلی (۱۱) تا (۱۳) را در نظر می‌گیریم:

$$A(u) = f \quad in \Omega \quad (11)$$

$$B(u) = g \quad in \Gamma_t \quad (12)$$

$$u = \bar{u} \quad in \Gamma_u \quad (13)$$

در روابط فوق، A و B عملگرهای دیفرانسیلی، f نیروهای خارجی، g و \bar{u} به ترتیب مقادیر مشخص مرز نیومن و دریشه، Ω حوزه مورد نظر، Γ_t مرز نیومن و Γ_u مرز دریشه است. مقدار تابع u در نقطه هم‌مکان x_k با معادله (۱۴) تعریف می‌شود:

$$u(x_k) = \sum_{i=1}^{n_n} N_i(x_k) \cdot u_i \quad , \quad k: 1 \sim m_m \quad (14)$$

در این رابطه، m_m تعداد نقاط هم‌مکان، n_n تعداد نقاط گرهی در حوزه تاثیر و $N_i(x_k)$ مقدار تابع شکل گره i است. حال اگر مقادیر باقیمانده درحوزه مسئله، مرز نیومن و مرز دریشه را به ترتیب با R_k^d ، R_k^t و R_k^u نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$R_k^d = L(u_k) - f(x_k) \\ = \sum_{i=1}^{n_n} L(N_i(x_k)) \cdot u_i - f(x_k) \quad , \quad k: 1 \sim m_m \quad (15)$$

۴- الگوریتم حل

یکی از روش‌های گسسته‌سازی معادلات کوشی روش گام جزئی است که در حالت کلی به نوع افزایشی و غیرافزایشی تقسیم‌بندی می‌شود. با مساوی قرار دادن پارامتر مربوط به این روش (ξ) با اعداد صفر و یک به ترتیب حالت‌های غیرافزایشی و افزایشی استفاده خواهد شد. در روش گام جزئی نیمه-افزایشی، مقدار این پارامتر بین صفر و یک انتخاب می‌شود. در این روش ابتدا مقادیر میدان سرعت برای گام زمانی میانی بدست آمده، سپس معادله پواسون فشار حل می‌شود و در نهایت مقادیر میدان سرعت برای گام زمانی بعدی بدست می‌آید. اگر اندیس‌های i و $i+1$ و j به ترتیب مربوط به گام زمانی فعلی و بعدی و میانی باشند، گسسته‌سازی معادلات به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{u^j - u^i}{\Delta t} + u^i \frac{\partial u^j}{\partial x} + v^i \frac{\partial u^j}{\partial y} &= -\xi \frac{\partial p^i}{\partial x} \\ &+ 2 \frac{\partial \mu^i}{\partial x} \frac{\partial u^j}{\partial x} + \frac{\partial \mu^i}{\partial y} \left(\frac{\partial u^j}{\partial y} + \frac{\partial v^i}{\partial x} \right) \\ &+ \mu^i \left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^j}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{v^j - v^i}{\Delta t} + u^i \frac{\partial v^j}{\partial x} + v^i \frac{\partial v^j}{\partial y} &= -\xi \frac{\partial p^i}{\partial y} \\ &+ 2 \frac{\partial \mu^i}{\partial x} \frac{\partial v^j}{\partial y} + \frac{\partial \mu^i}{\partial x} \left(\frac{\partial u^i}{\partial y} + \frac{\partial v^j}{\partial x} \right) \\ &+ \mu^i \left(\frac{\partial^2 v^j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^j}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

با استفاده از معادلات (۲۹) و (۳۰)، مقادیر میدان سرعت میانی محاسبه شده و می‌توان با استفاده از معادله پواسون فشار، مقدار فشار را برای گام زمانی بعدی را از رابطه (۳۱) بدست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p^{i+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{i+1}}{\partial y^2} &= \xi \left(\frac{\partial^2 p^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^i}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^j}{\partial x} + \frac{\partial v^j}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

در نهایت میدان سرعت برای گام زمانی $i+1$ با روابط (۳۲) و (۳۳) محاسبه می‌شود:

$$u^{i+1} = u^j - \Delta t \left(\frac{\partial p^{i+1}}{\partial x} - \xi \frac{\partial p^i}{\partial x} \right) \quad (32)$$

$$v^{i+1} = v^j - \Delta t \left(\frac{\partial p^{i+1}}{\partial y} - \xi \frac{\partial p^i}{\partial y} \right) \quad (33)$$

۳-۲- معرفی تابع شکل درونیاب شعاعی نقاط RPIM

در روش‌های بدون شبکه، روش‌های مختلفی برای تخمین توابع شکل ارائه شده است. در این تحقیق از روش RPIM استفاده شده است. این روش از یک تابع چند جمله‌ای به همراه یک تابع پایه‌ای شعاعی تشکیل می‌شود. برای بیان این روش ابتدا، متغیری مانند u را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n_n} R_i(x) \cdot a_i + \sum_{j=1}^{m_k} P_j(x) \cdot b_j \quad (22)$$

در این رابطه، m_k تعداد جملات تابع چند جمله‌ای، R_i تابع پایه‌ای شعاعی و P بردار چند جمله‌ای است. ضرائب a و b مجهولاتی هستند که باید محاسبه شوند. تعداد مجهولات برابر $n_n + m_k$ است که از رابطه (۲۳)، تعداد n_n معادله حاصل می‌شود.

$$U_s = R_0 a + P_m b = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T \quad (23)$$

برای یکتایی جواب، m_k معادله دیگر از رابطه (۲۴) حاصل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n_n} P_j(x_i) \cdot a_i = P_m^T a = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_k \quad (24)$$

در این تحقیق از تابع چند جمله‌ای درجه ۲ استفاده شده است که دارای ۶ جمله بوده و مقدار m_k برابر ۶ است. برای تابع پایه‌ای شعاعی نیز از رابطه (۲۵) استفاده شده است [۸]:

$$R_i(x) = (d_c^2 + r_i^2)^{1.02} \quad (25)$$

در این رابطه R_i فاصله نقطه مورد نظر x تا گره x_i ، d_c شعاع تاثیر بوده و به گونه‌ای انتخاب می‌شود که در حوزه تاثیر نقطه مورد نظر، ۲۷ نقطه گرهی وجود داشته باشد. ماتریس مجهولات و توابع شکل درونیاب شعاعی نقاط به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\tilde{N}^T(x) = [R^T(x) \ P^T(x)] G^{-1} \quad (27)$$

در نهایت ماتریس تابع شکل N را می‌توان با رابطه (۲۸) نمایش داد:

$$N^T(x) = [N_1(x) \ N_2(x) \ \dots \ N_n(x)] \quad (28)$$

۵- مثال‌های عددی و تفسیر نتایج

روش عددی بکار گرفته شده در این تحقیق مورد صحت سنجی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده، در هر مورد مطالعاتی با نتایج تحقیقات دیگر محققان مقایسه شده است. برای بررسی دقت نتایج از معیار MSE (میانگین مربعات خطا) استفاده شده است. پارامترهایی که در نتایج موثر هستند، مانند تعداد نقاط گرهی، تعداد نقاط هم‌مکان، مقدار ضرائب پنالتی، گام زمانی، پارامتر روش گام جزئی نیمه-افزایشی و ... با سعی و خطا انتخاب شده‌اند. در مثال‌های عددی، روند حل مسئله، تا رسیدن به جواب دائمی ادامه داده شده است. این معیار با رابطه (۳۴) در نظر گرفته شده است:

$$CI = \frac{\sum_{d=1}^j (u_d^{i+1} - u_d^i)}{j} \quad (34)$$

در رابطه فوق، CI شاخص همگرایی، j تعداد نقاط هم-مکان، u^i و u^{i+1} سرعت افقی در گام زمانی i و $i+1$ می‌باشند. در تمامی مسائل مقدار CI برابر 10^{-5} لحاظ شده است.

۵-۱- جریان سیال بین دو صفحه موازی

یکی از مثال‌های عددی جهت صحت‌سنجی مدل‌های عددی، جریان سیال بین دو صفحه موازی می‌باشد. این مسئله از ۴ مرز تشکیل شده است. مرزهای دیواره در قسمت فوقانی و تحتانی که مقادیر سرعت در آنها صفر است، مرزهای ورودی و خروجی در سمت‌های چپ و راست. هدف از این مسئله، تعیین پروفیل سرعت افقی با توجه به جریان ورودی با سرعت افقی یکنواخت واحد است. طول کانال ۲۰ و ارتفاع آن ۲ متر در نظر گرفته می‌شود. سرعت افقی در مرز ورودی برابر واحد در نظر گرفته می‌شود. هندسه مسئله و شرایط مرزی آن در شکل ۱ نشان داده شده است.

این مسئله برای دو حالت n برابر ۰/۵ و ۱ حل شده و اثر تغییر پارامترهای مدل و افزایش نقاط نشان داده شده است. ابتدا برای حالت n برابر ۰/۵ از ۵۲۹۷ نقطه گرهی و ۲۰۸۳۳ نقطه هم‌مکان استفاده شده است. تعداد نقاط گرهی و هم-مکان برای حالت n برابر ۱ به ترتیب برابر ۱۳۹۶ و ۵۲۹۷ نقطه بوده است. برای هر دو مقدار n ضریب پنالتی a_i و a_u برابر 10^4 و مقدار m برابر واحد انتخاب شده است.

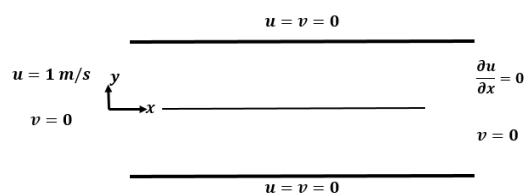
پروفیل سرعت افقی در وسط کانال ($x=10$) استخراج شده و با نتایج ارائه شده در دالیمونته و سورنا [۲۵] مقایسه شده و در شکل ۲ نمایش داده شده است.

به منظور بهبود نتایج در حالت $n=0.5$ ، می‌توان تعداد نقاط گرهی و هم‌مکان را افزایش داد. برای این منظور از ۱۱۲۱۵ نقطه گرهی و ۳۲۶۷۸ نقطه هم‌مکان استفاده شده است. در شکل ۳ پروفیل سرعت افقی در $x=10$ در حالت افزایش نقاط ارائه شده است؛ همچنین روند همگرایی مسئله در حالت‌های مختلف در شکل ۴ نشان داده شده است.

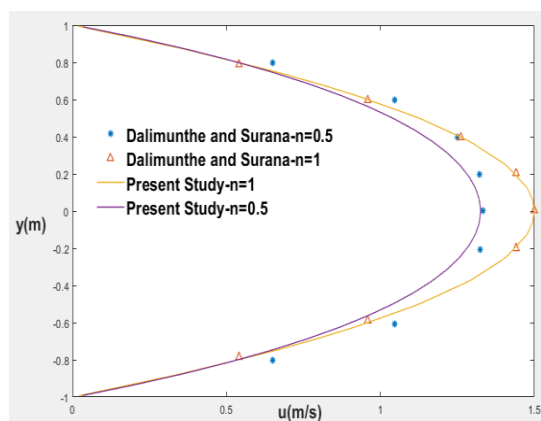
مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد نقاط، دقت مدل نیز افزایش یافته و خروجی‌های مدل تطابق مناسبی با نتایج حاصل از تحقیق دالیمونته و سورنا داد.

طبق شکل ۴، با افزایش تعداد نقاط، زمان حل مسئله افزایش یافته است.

پارامترهای مربوط به روش گام جزئی نیمه‌افزایشی (۵)، مقدار گام زمانی (Δt)، تعداد تکرارها، زمان مربوط به حل هر تکرار و مقدار MSE در جدول ۱ خلاصه شده است.



شکل ۱- هندسه و شرایط مرزی مسئله جریان بین دو صفحه موازی ثابت



شکل ۲- سرعت افقی در $x=10$ در مسئله جریان بین دو صفحه موازی

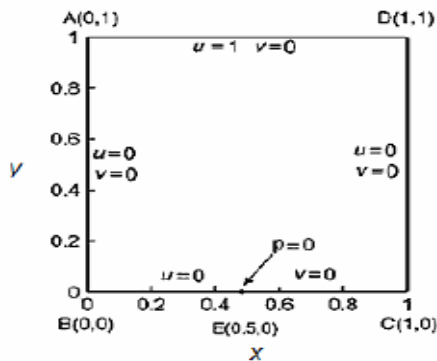
جدول ۱- زمان محاسبات و پارامترهای مسئله جریان بین دو صفحه موازی ثابت

| N | Δt | ξ | تعداد تکرار | زمان هر تکرار (ثانیه) | MSE |
|-------------------|------------|-------|-------------|-----------------------|-----------------------|
| ۱ | ۰/۰۰۱۵ | ۰/۵ | ۲۲۶ | ۰/۳ | $۱/۲ \times ۱۰^{-۴}$ |
| ۰/۵ | ۰/۰۱ | ۰/۵ | ۹۱ | ۱/۴ | ۰/۰۰۶ |
| ۰/۵ (افزایش نقاط) | ۰/۰۱ | ۰/۵ | ۲۳۷ | ۴/۲ | $۲/۱۳ \times ۱۰^{-۵}$ |

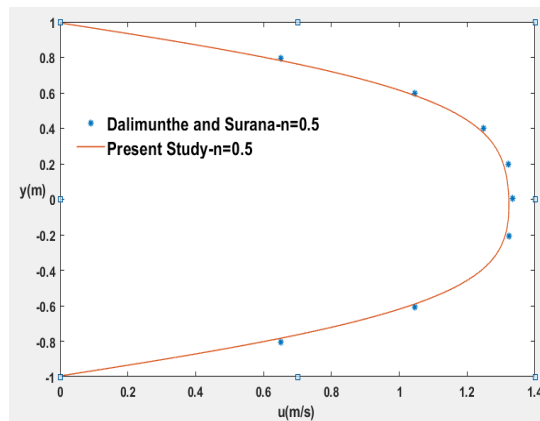
۵-۲- جریان در حفره مربعی

این مسئله شامل یک حفره مربعی به ابعاد واحد بوده و صفحه فوقانی آن با سرعت افقی واحد متحرک فرض شده و سایر صفحات ثابت می‌باشند. این مسئله به دلیل هندسه و شرایط مرزی ساده، کاربرد گسترده‌ای بعنوان یک مسئله بنچ‌مارک برای تحقیقات عددی دارد. هندسه این مسئله و شرایط مرزی آن در شکل ۵ نشان داده شده است.

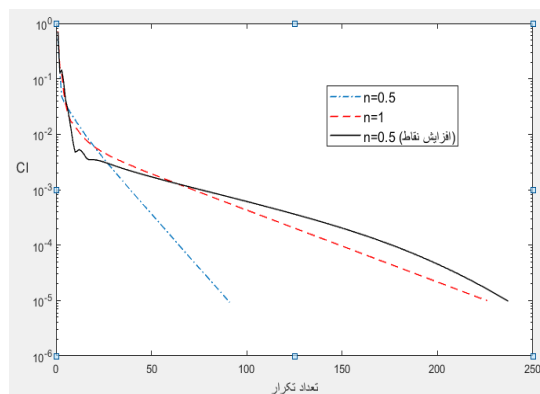
در این تحقیق، این مسئله برای عدد رینولدز ۱۰۰ با مدل غیرنیوتنی هرشل بالکلی حل شده و با نتایج حاصل از تحقیق بل و سورنا [۲۶] مقایسه شده است. آنها برای شبیه‌سازی از روش اجزای محدود استفاده کردند. نتایج مدل پارامترهای انتخابی مدل، در دو حالت ارائه شده‌اند؛ در حالت اول در حوزه مسئله، ۲۷۵۳ نقطه گرهی و ۱۰۸۴۹ نقطه هم-مکان بکار رفته است. پارامتر n برابر ۰/۵، مقادیر ضرائب پینالته a_u و a_t برابر $۱۰^۶$ ، پارامتر ξ و Δt به ترتیب برابر ۰/۹ و ۰/۰۱ انتخاب شده‌اند. مقدار m برابر ۰/۰۱ فرض شده است. جهت بهبود نتایج در حالت دوم، از ۶۳۳۷ نقطه گرهی و ۲۴۹۶۱ نقطه هم‌مکان استفاده شده است. مقدار گام زمانی و پارامتر روش گام جزئی به ترتیب ۰/۶ و ۰/۹ انتخاب شده‌اند.



شکل ۵- هندسه و شرایط مرزی مسئله جریان در حفره مربعی



شکل ۳- سرعت افقی در $x=1.0$ در مسئله جریان بین دو صفحه موازی بعد از افزایش تعداد نقاط در حالت $n=0.5$



شکل ۴- روند همگرایی مسئله جریان بین دو صفحه موازی

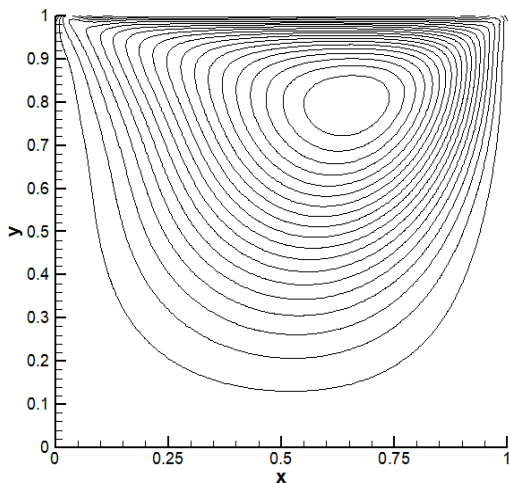
به ازای پارامتر n کوچکتر از یک برای رسیدن به جواب بهتر باید مقدار گام زمانی را بزرگتر انتخاب کرد؛ همچنین تعداد تکرارهای حل مسئله به ازای $n < 1$ روند افزایشی دارد؛ درحالیکه زمان حل هر تکرار در این حالت کمتر است. تاثیر مثبت افزایش تعداد نقاط در نتایج نیز در شکل‌های مربوط به پروفیل سرعت افقی مشهود است.

در جدول ۳ معیار خطای MSE برای حالت‌های مختلف ارائه شده است.

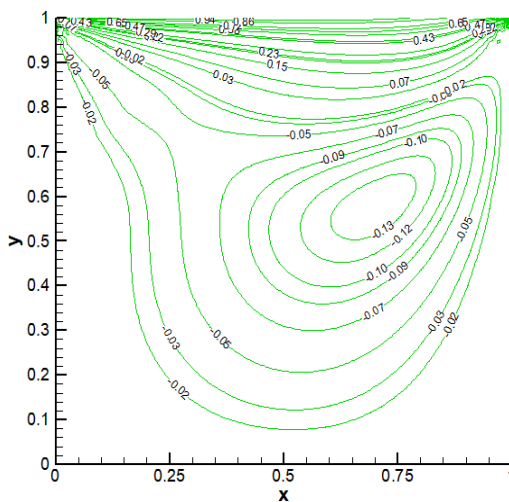
در شکل ۸ و ۹ خطوط جریان و خطوط هم‌تراز سرعت افقی برای حالت دوم نمایش داده شده و نمودار روند همگرایی حل مسئله نیز در شکل ۱۰ ارائه شده است.

جدول ۳- معیار MSE در مسئله حفره مربعی

| حالت | شکل ۶ | شکل ۷ |
|------|----------------------|----------------------|
| اول | $2/7 \times 10^{-5}$ | $5/2 \times 10^{-5}$ |
| دوم | $1/2 \times 10^{-6}$ | $1/4 \times 10^{-6}$ |



شکل ۸- خطوط جریان در مسئله حفره مربعی

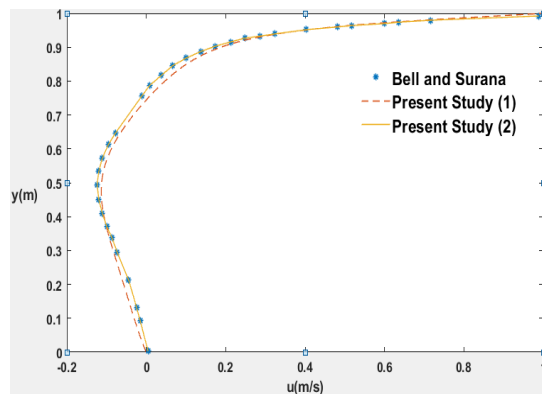


شکل ۹- خطوط هم‌تراز سرعت افقی در مسئله حفره مربعی

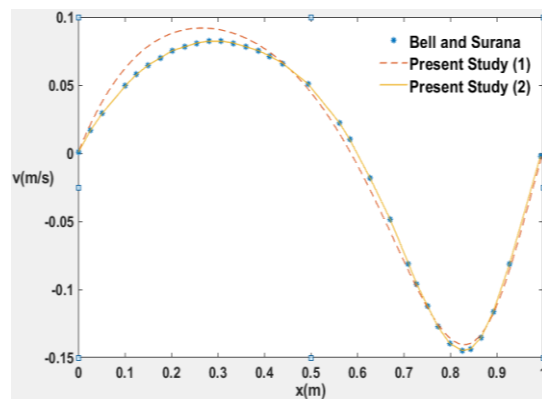
در این حالت مقادیر ضرائب پنالیتی برابر 10^8 در نظر گرفته شده‌اند. در جدول ۲ مقادیر ϵ ، مقدار گام زمانی Δt ، تعداد تکرارها و زمان مربوط به حل هر تکرار ارائه شده است. در شکل‌های ۶ و ۷ نمودار سرعت افقی در مقطع $x=0/5$ و نمودار سرعت عمودی در مقطع $y=0/5$ نمایش داده شده است و با نتایج تحقیق بل و سورنا مقایسه شده است. نتایج حاصل از مدل عددی در حالت دوم، بیانگر دقت مناسب در مقایسه با تحقیقات سابق است.

جدول ۲- پارامترهای و زمان محاسبات مسئله جریان در حفره مربعی

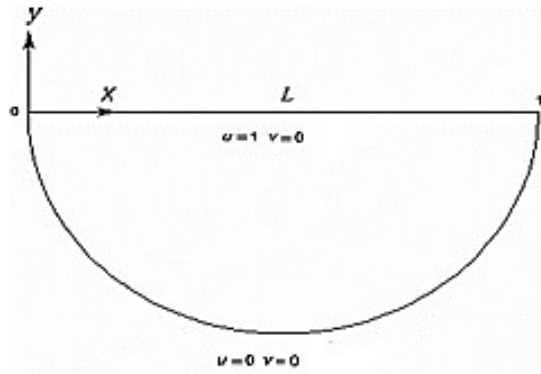
| حالت | Δt | ϵ | تعداد تکرار | زمان هر تکرار (ثانیه) |
|------|------------|------------|-------------|-----------------------|
| اول | ۰/۵ | ۰/۹۵ | ۱۷۵ | ۰/۵۷ |
| دوم | ۰/۶ | ۰/۹۸ | ۱۰۵۳ | ۰/۶۵ |



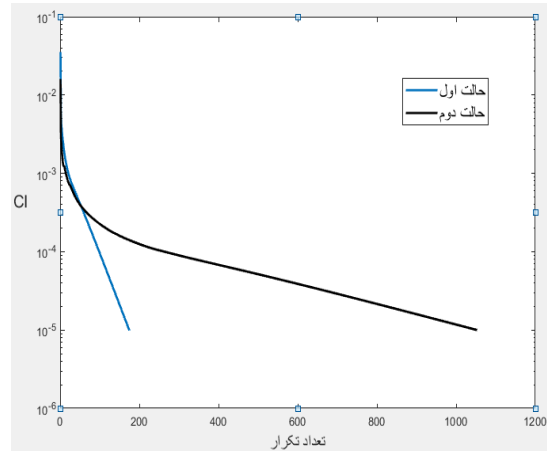
شکل ۶- سرعت افقی در $x=0/5$ در مسئله حفره مربعی



شکل ۷- سرعت عمودی در $y=0/5$ در مسئله حفره مربعی



شکل ۱۱- شکل هندسی و شرایط مرزی مسئله حفره نیم‌دایره‌ای



شکل ۱۰- روند همگرایی مسئله حفره مربعی

در حالت اول گسسته‌سازی دامنه محاسباتی این مسئله با استفاده ۲۱۴۵ نقطه گرهی و ۸۳۸۵ نقطه هم‌مکان صورت گرفته است. پارامترهای ضرائب پنالتی a_{ii} و a_i برابر 10^5 ، مقادیر ξ و Δt نیز به ترتیب برابر $0/95$ و $0/1$ انتخاب شده‌اند. در حالت دوم تعداد نقاط گرهی و هم‌مکان به ترتیب 5809 و 22851 در نظر گرفته شده است. ضرائب پنالتی برابر 10^8 و گام زمانی برابر $0/5$ لحاظ شده است. مقدار پارامتر روش گام جزیی نیمه‌افزایشی همان $0/95$ در نظر گرفته شده است.

در جدول ۴ پارامترهای فوق و تعداد تکرار و زمان حل هر تکرار نشان داده شده است:

جدول ۴- پارامترهای و زمان محاسبات مسئله جریان در حفره نیم‌دایره‌ای

| حالت | Δt | ξ | تعداد تکرار | زمان هر تکرار (ثانیه) |
|------|------------|--------|-------------|-----------------------|
| اول | $0/1$ | $0/95$ | ۳۹ | $0/5$ |
| دوم | $0/5$ | $0/95$ | ۵۱ | $1/5$ |

در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ نتایج سرعت‌های افقی و عمودی به ترتیب در $x=0/5$ و $y=-0/25$ با نتایج حاصل از تحقیق مرکان و آتالیک [۲۷] مقایسه شده‌اند. آنها این مسئله را با روش تفاضل محدود حل کرده و از مدل توانی برای سیال غیرنیوتنی استفاده کرده‌اند.

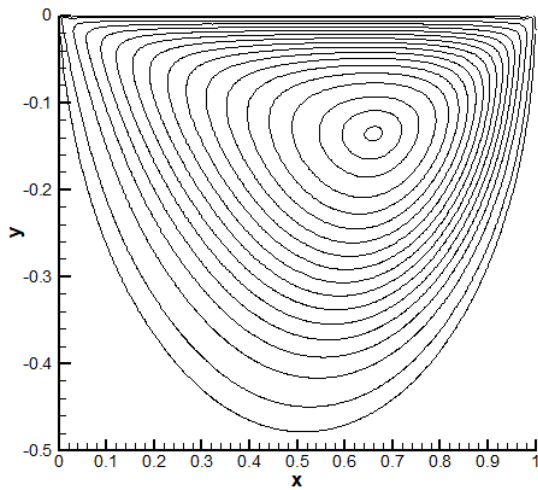
لشکر بلوک [۲۸] این مسئله را با مدل توانی و برای حالت $n=1$ و تعداد 2600 و 12000 نقطه گرهی حل کرده و زمان حل هر تکرار ایشان برای نقاط گرهی انتخاب شده به ترتیب

با تغییرات پارامترهای مدل و افزایش تعداد نقاط، هر چند زمان محاسبات افزایش می‌یابد، اما دقت مدل بیشتر می‌شود. با انتخاب تعداد نقاط بیشتر، خطوط جریان منظم‌تر خواهند شد. تحقیقات نشان می‌دهد با افزایش عدد رینولدز، ابعاد گردابه‌ها در تقاطع دیواره‌ها بزرگتر می‌شود. افزایش ضرائب پنالتی باعث افزایش دقت مدل در اعمال شرایط مرزی و نواحی نزدیکی آن می‌شود. البته افزایش بیش از حد این مقادیر گاهی سبب ناپایداری حل نیز می‌شود. بل و سورنا در گام‌های زمانی مختلف مسئله را حل کرده و بطور میانگین زمان محاسبات آنها بین 17500 تا 22500 ثانیه گزارش شده است. در این تحقیق زمان محاسبات به ازای $n=0/5$ برابر کمتر از 700 ثانیه است.

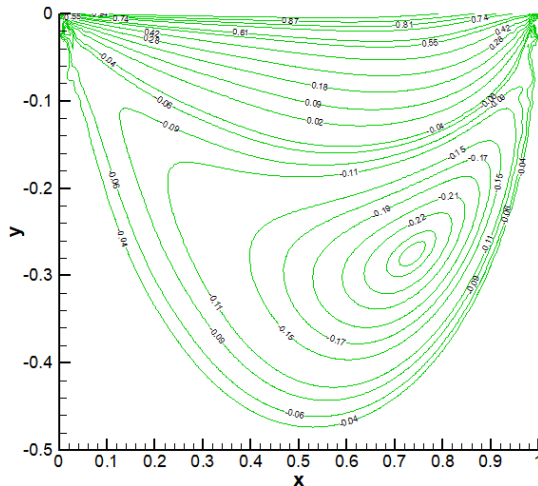
۵-۳- جریان در حفره نیم‌دایره‌ای

هندسه این مسئله شامل یک حفره نیم‌دایره به قطر واحد است که صفحه فوقانی آن با سرعت افقی واحد متحرک است. هندسه این مسئله در شکل ۱۱ نشان داده شده است. یکی از علت‌های استفاده از این مسئله، بررسی توانایی روش عددی در حل معادلات در دامنه محاسباتی با مرزهای منحنی شکل است.

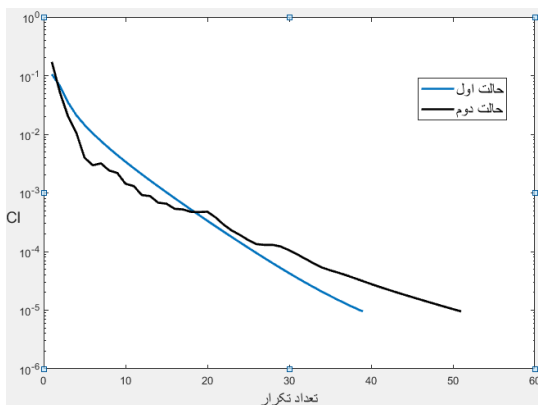
این مسئله برای عدد رینولدز 100 و مقدار n برابر $0/6$ حل شده است. پارامتر m مربوط به مدل هرشل-بالکلی برابر $0/01$ فرض گردیده است. همانند مسئله قبلی، نتایج در دو حالت بررسی شده‌اند.



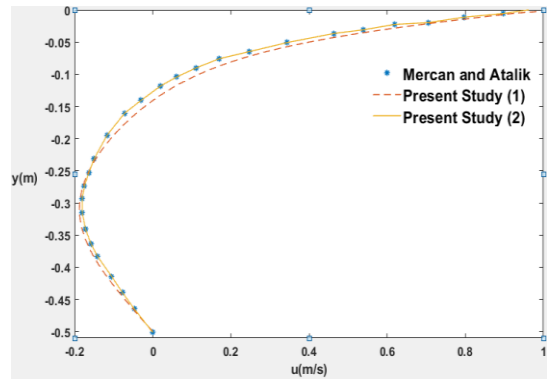
شکل ۱۴- خطوط جریان مسئله حفره نیم‌دایره‌ای



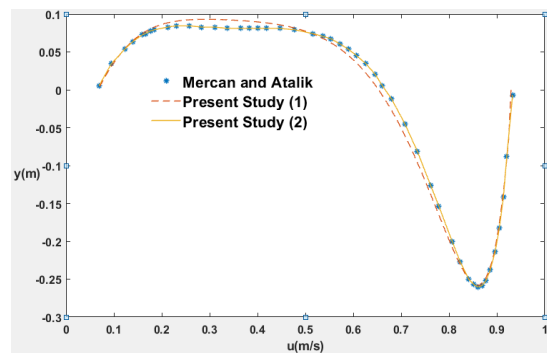
شکل ۱۵- خطوط هم‌سرعت افقی مسئله حفره نیم‌دایره‌ای



شکل ۱۶- روند همگرایی مسئله حفره نیم‌دایره‌ای



شکل ۱۲- سرعت افقی در $x=0.5$ در مسئله حفره نیم‌دایره‌ای



شکل ۱۳- سرعت عمودی در $y=-0.25$ در مسئله حفره نیم‌دایره‌ای

۰/۴۲ و ۳/۱۲ ثانیه گزارش شده است که در حالت دوم پاسخ‌های دقیقتری حاصل گردیده است.

خطوط جریان، خطوط هم‌تراز سرعت افقی (برای حالت دوم) و روند همگرایی مسئله در هر دو حالت در شکل‌های ۱۴ تا ۱۶ نمایش داده شده است. در نتایج حاصل از حل مدل عددی حاضر بویژه در حالت دوم، دقت قابل قبولی نسبت به نتایج مرکان و آتالیک مشاهده می‌شود.

معیار خطای MSE برای حالت‌های مختلف شکل‌های فوق محاسبه و در جدول ۵ ارائه شده است:

جدول ۵- معیار MSE برای مسئله حفره نیم‌دایره‌ای

| حالت | شکل ۱۲ | شکل ۱۱ |
|------|------------------------|----------------------|
| اول | $3/2 \times 10^{-5}$ | $4/6 \times 10^{-5}$ |
| دوم | $1/0.5 \times 10^{-6}$ | $2/1 \times 10^{-6}$ |

منظور صحت‌سنجی این روش عددی، نتایج حاصل از این روش با تحقیقات سابق مقایسه شد. برای این منظور از سه مثال عددی جریان بین دو صفحه موازی، جریان در حفره مربعی و جریان در حفره نیم‌دایره‌ای استفاده شد. تغییر پارامترهای مدل عددی در روند حل و نتایج حاصل اثرگذار بوده و مقادیر پارامترها با سعی و خطا به نحوی انتخاب شده‌اند که تطابق مناسبی بین خروجی مدل و نتایج تحقیقات سابق باشد. افزایش تعداد نقاط گرهی، سبب افزایش زمان تخمین توابع شکل و حل معادلات می‌شود؛ درحالی‌که افزایش تعداد نقاط هم‌مکان تنها سبب افزایش زمان تخمین توابع شکل شده و زمان حل معادلات مستقل از تعداد نقاط هم‌مکان است. مقدار پارامتر ϵ در شکل کانتورها تأثیر بسزایی دارد؛ بطوری‌که با کاهش این پارامتر، کانتورها شکلی نامنظم و شکسته خواهند داشت. افزایش این پارامتر باعث منظم شدن کانتورهای خروجی می‌شود. مقدار ضرائب پنالته نیز باید با سعی و خطا تنظیم شود و کاهش یا افزایش بیش از حد آن سبب واگرایی حل و یا کاهش دقت محاسبات می‌شود.

با کاهش مقدار n ، با توجه به کاهش رفتار غیرخطی سیال، حساسیت مسئله بیشتر بوده و تعداد سعی و خطاهای بیشتری برای رسیدن به جواب مطلوب لازم بوده است. در این شرایط با تغییر اندکی در مقدار پارامترها، در میادین سرعت تغییرات چشمگیری مشاهده شده است.

در مسئله جریان در حفره مربعی، زمان محاسبات، به ترتیب ۱۰۰ ثانیه بوده است، این درحالی است که در تحقیق بل و سورنا [۲۶]، زمان محاسباتی بین ۱۷۵۰۰ تا ۲۲۵۰۰ ثانیه گزارش شده است؛ همچنین هر تکرار در مسئله حفره نیم‌دایره‌ای، ۰/۶۵ ثانیه حل شده است.

بررسی نتایج در مسئله جریان در حفره نیم‌دایره‌ای نشان می‌دهد، روش عددی این تحقیق توانایی شبیه‌سازی جریان سیال غیرنیوتنی در مسائلی را نیز دارد که دارای مرزهای منحنی شکل هستند. در هر مسئله و برای حالت‌های مختلف حل شده معیار خطای میانگین مربعات خطا (MSE) برآورد شده و برای مسئله جریان بین دو صفحه، حفره مربعی و حفره نیم‌دایره‌ای به ترتیب برابر $7/1 \times 10^{-5}$ ، $1/3 \times 10^{-6}$ و $1/6 \times 10^{-6}$ حاصل شده است.

همانند مسئله محفظه مربعی، در این مسئله نیز در محل تقاطع دیواره‌ها، به دلیل وجود تمرکز تنش و آشفتگی جریان، نامنظمی‌های موضعی در خطوط جریان ملاحظه می‌شود.

با تغییر پارامترهای مختلف در روند حل مسئله و نتایج آن، تغییرات چشمگیری مشاهده شده است. گام زمانی رابطه معکوسی با مقادیر سرعت دارد؛ بطوری‌که با افزایش گام زمانی، میدان سرعت کاهش می‌یابد؛ همچنین کاهش گام زمانی، سبب افزایش زمان حل می‌شود.

افزایش پارامتر ϵ سبب تشکیل کانتورهای منظم‌تر و کاهش آن سبب ایجاد شکستگی و نامنظمی در کانتورها می‌گردد. کاهش ضرائب پنالته سبب افزایش سرعت حل می‌شود، اما خروجی مقادیر مرزها مناسب نمی‌باشند؛ همچنین افزایش بیش از حد این ضرائب، باعث ناپایداری حل و یا واگرایی حل می‌شود.

در نقاطی که مقدار ویسکوزیته برابر صفر است، مقادیر سرعت بی‌نهایت است؛ لذا در این تحقیق، یک مقدار حداقل برای ویسکوزیته فرض شده تا در هیچ نقطه‌ای این پارامتر به صفر نرسد و در نتیجه سرعت بینهایت نگردد. این مسئله می‌تواند در حل میدان جریان نیز تأثیر گذاشته و برخی خطاهای موجود در نتایج، ناشی از این فرض باشد.

افزایش تعداد نقاط گرهی زمان حل را زیاد می‌کند. با افزایش تعداد نقاط هم‌مکان زمان تشکیل توابع شکل افزایش می‌یابد، اما در زمان حل معادلات تغییری ایجاد نمی‌کند؛ چرا که ابعاد ماتریس سختی مستقل از تعداد نقاط هم‌مکان است و فقط به تعداد نقاط گرهی وابسته است. با کاهش نقاط گرهی و هم‌مکان، دقت حل کاهش می‌یابد و افزایش آنها هرچند دقت را ارتقا می‌بخشد، ولی افزایش بیش از حد نقاط، تأثیری در دقت مسئله نداشته و برای رسیدن به دقت مورد نظر باید سایر پارامترها را تغییر داد.

۶- نتیجه گیری

در این تحقیق، به حل معادلات حاکم بر سیالات غیرنیوتنی با مدل هرشل بالکلی در حالت دوبعدی با استفاده از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته هم‌مکان پرداخته شد. به

۷- مراجع

- المان گلرکین در شرایط مرزی مختلف. *مجله مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها* ۱۲۰-۱۰۹: ۶(۲).
- [14] Oliveira T, Portela A (2016) Weak-form collocation—A local meshless method in linear elasticity. *Eng Anal Bound Elem* 73: 144-160.
- [15] Zamolo R, Nobile E (2017) Numerical analysis of heat conduction problems on 3D general-shaped domains by means of a RBF Collocation Meshless Method. *J Phys Conf Ser* 923.
- [16] Ahlkrone J, Shcherbakov V (2017) A meshfree approach to non-Newtonian free surface ice flow: Application to the Haut Glacier d'Arolla. *J Comput Phys* 330: 633-649.
- [17] Nodoushan EJ, Shakibaenia A (2019) Multiphase mesh-free particle modeling of local sediment scouring with μ (I) rheology. *J Hydroinformatics* 21(2): 279-294.
- [18] Kaennakham, S., & Chuathong, N. (2019). An automatic node-adaptive scheme applied with a RBF-collocation meshless method. *Appl. Math. Comput*, 348, 102-125.
- [19] Ku CY, Xiao JE, Liu CY (2019) On Solving Nonlinear moving boundary problems with heterogeneity using the collocation meshless method. *Water* 11(4): 835.
- [20] Arzani H, Afshar MH (2006) Solving Poisson's equations by the discrete least square meshless method. *WIT Trans Modelling Simul* 42: 23-31.
- [21] Firoozjaee AR, Afshar MH (2011) Steady-state solution of incompressible Navier-Stokes equations using discrete least-squares meshless method. *Int J Numer Methods Fluids* 67(3): 369-382.
- [22] Lashckarbolok M, Jabbari E (2012) Collocated discrete least squares (CDLS) meshless method for the stream function-vorticity formulation of 2D incompressible Navier-Stokes equations. *Sci Iran* 19(6): 1422-1430.
- [۲۳] لشکرکربولک م، نیکمهر ا، نوروزی ب، عابدینی ا (۱۳۹۴) تحلیل تنش‌های برشی ناشی از پیچش مقاطع منشوری با استفاده از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش. *مجله مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها* ۵۴-۴۷: ۴(۴).
- [24] Naghian M, Lashkarbolok M, Jabbari E (2017) Numerical simulation of turbulent flows using a least squares based meshless method. *Int J Civ Eng* 15(1): 77-87.
- [25] Dalimunthe HS, Surana KS (1996) p-Version least squares finite element formulation for three-dimensional, incompressible, non-isothermal, non-Newtonian fluid flow. *Comput Struct* 58(1): 85-105.
- [1] Gingold RA, Monaghan JJ (1977) Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. *Mon. Notices Royal Astron Soc* 181(3): 375-389.
- [2] Lucy LB (1977) A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *AJ* 82: 1013-1024.
- [3] Dilts GA (1999) Moving-least-squares-particle hydrodynamics—I. Consistency and stability. *Int J Numer Meth Eng* 44(8): 1115-1155.
- [4] Atluri SN, Zhu T (1998) A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Comput Mech* 22(2): 117-127.
- [5] Lin H, Atluri SN (2001) The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for solving incompressible Navier-Stokes equations. *Compos Comp Model Eng* 2(2): 117-142.
- [6] Wang JG, Yan L, Liu GR (2005) A local radial point interpolation method for dissipation process of excess pore water pressure. *Int J Numer Method H* 15(6): 567-587.
- [7] Mai-Duy N, Tanner RI (2005) Computing non-Newtonian fluid flow with radial basis function networks. *Int J Numer Methods Fluids* 48(12): 1309-1336.
- [8] Wang JG, Liu GR (2001) Radial point interpolation method for no-yielding surface models. In *Proceedings of the first MIT conference on computational fluid and solid mechanics* (538-540).
- [9] Duan Q, Li X (2007) An ALE based iterative CBS algorithm for non-isothermal non-Newtonian flow with adaptive coupled finite element and meshfree method. *Comput Methods in Appl Mech Eng* 196(49-52): 4911-4933.
- [10] Shamekhi A, Sadeghy K (2009) Cavity flow simulation of Carreau-Yasuda non-Newtonian fluids using PIM meshfree method. *Appl Math Model* 33(11): 4131-4145.
- [11] Hon YC, Šarler B, Yun DF (2015) Local radial basis function collocation method for solving thermo-driven fluid-flow problems with free surface. *Eng Anal Bound Elem* 57: 2-8.
- [۱۲] شایان ا، دادوند ع، میرزایی ا (۱۳۹۴) شبیه سازی عددی جریان خارجی لزج تراکم‌ناپذیر با استفاده از روش لاتیس بولتزمان بدون شبکه. *مجله مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها* ۱۸۹-۱۷۵: ۴(۴).
- [۱۳] میکاییلی ص، بهجت ب (۱۳۹۵) تحلیل سه‌بعدی خمش ورق هدفمند ضخیم با استفاده از روش بدون

[۲۸] لشکرپلوک م (۱۳۹۲) حل معادلات حاکم بر حرکت دوبعدی سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان با استفاده از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش. رساله دکترای مهندسی آب، مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران.

[26] Bell BC, Surana KS (1994) p-version least squares finite element formulation for two-dimensional, incompressible, non-Newtonian isothermal and non-isothermal fluid flow. *Int J Numer Methods Fluids* 18(2): 127-162.

[27] Mercan H, Atalik K (2011) Flow structure for Power-Law fluids in lid-driven arc-shape cavities. *Korea Aust Rheol J* 23(2): 71-80.