



بررسی عددی چگونگی تشکیل پرش هیدرولیکی چندضلعی و ساختار جریان سیال در آن

علی اسماعیلی^۱ و محمد پسندیده فرد^{۲*}

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲ استاد گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۰۲، تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۲/۲۸، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۵/۰۵

چکیده

در این پژوهش به شبیه‌سازی عددی سه بعدی پدیده پرش هیدرولیکی چندضلعی با استفاده از روش عددی حجم سیال پرداخته شده است. در هنگام برخورد یک جت سیال با سطح مشاهده می‌شود که یک پرش هیدرولیکی شعاعی در اطراف محل برخورد رخ می‌دهد. در سیالات با لزجت پایین (مثل آب) شکل این پرش به صورت دایروی است و در سیالات با لزجت بالا (مثل اتیلن گلیکول) یک ساختار چندضلعی در هنگام پرش هیدرولیکی رخ می‌دهد که این ساختار ناشی از وجود امواج مکانیکی در اطراف ناحیه برخورد سیال با سطح می‌باشد. نتایج شبیه‌سازی عددی با نتایج تجربی محققان پیشین مقایسه شده است که تطابق خوبی از نظر کیفی (شکل و ساختار پرش هیدرولیکی ایجاد شده) و کمی (شعاع پرش هیدرولیکی) در آن دیده می‌شود. در نهایت بر اساس شبیه‌سازی عددی مشاهده گردید که ابتدا پرش هیدرولیکی به صورت دایروی گسترش یافته و پس از برخورد موج حاصل از پرش با موانع پایین دست جریان، به مرور شکل چندضلعی در پرش ایجاد شده و به حالت پایدار می‌رسد. همچنین خطوط جریان در این پدیده نشان می‌دهد که وجود جریان‌های با سرعت بالا در نقاطی از حوزه حل موجب تشکیل گوشه‌هایی در پرش هیدرولیکی شده و پرش چندضلعی ایجاد می‌گردد.

کلمات کلیدی: پرش هیدرولیکی چند ضلعی؛ روش حجم سیال؛ روش عددی؛ سه بعدی.

Numerical Investigation of Polygonal Hydraulic Jump Formation Mechanism and Its Flow Structure

A. Esmaceli¹, M. Passandeh-Fard^{2,*}

¹ Ph.D. Student, Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran.

² Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran.

Abstract

This article contains a numerical simulation of polygonal hydraulic jump using the volume-of-fluid (VOF) method. This phenomenon occurs when a circular jet of a high viscous liquid impinges perpendicularly onto a flat surface. In fact, when a liquid jet hits a surface, a circular hydraulic jump appears around the stagnation point. In a fluid with low viscosity (such as water), the shape of this jump is circular and in a high viscosity fluid (e.g., ethylene glycol), a polygonal structure forms. This structure is due to the presence of mechanical waves around the collision area, which is considered in the numerical method. In this paper, the results of the numerical model are validated with available experimental studies for the shape and structure of the generated hydraulic jump and its radius. Finally, based on numerical results, it is observed that a circular hydraulic jump spreads at the beginning, and after its corresponding wave collides with downstream obstacles, a polygonal shape is gradually formed and stabilized. In addition, the streamlines show that the existing of high-speed flows in some points of the solution domain generates corners in the jump shape leading to the formation of a polygonal hydraulic jump.

Keywords: Polygonal Hydraulic Jump; Volume of Fluid Method; 3D Numerical Solution.

۱- مقدمه

است، کشش سطحی و دبی جریان را از پارامترهای مهم در تغییر ابعاد مختلف این پدیده معرفی می‌کند.

مهمترین موضوع در پرش هیدرولیکی دایروی پیش بینی شعاع پرش و ساختار آن است. شعاع پرش فاصله‌ی محل وقوع پرش از مرکز نقطه‌ی اصابت جت عمودی است و ساختار آن به رفتار سیال بعد از ایجاد پرش هیدرولیکی مربوط می‌شود. تئوری پرش هیدرولیکی دایروی غیر لزج ناشی از برخورد یک جت عمودی بر روی یک صفحه تخت افقی به طور مفصل توسط بیرخوف و زارانتونلو [۳] در سال ۱۹۵۷ ارائه شده است. طبق این تئوری در محل وقوع پرش هیدرولیکی نیروی فشاری باید با نرخ تغییر اندازه حرکت سیال برابر باشد. به همین علت با کند شدن جریان، ارتفاع سطح سیال افزایش می‌یابد. بعدها آزمایش‌های محققان زیادی نشان داد که این تئوری از دقت کافی برخوردار نیست زیرا تاثیر لزجت و گردابه‌های موجود در ناحیه وقوع پرش هیدرولیکی که بسیار در شکل‌گیری این پدیده مهم هستند، صرف‌نظر شده است. واتسون [۴] در سال ۱۹۶۴ تاثیر لزجت را در مسئله پرش هیدرولیکی دایروی در نظر گرفت و با استفاده از تئوری لایه مرزی، رابطه‌ای ضمنی برای تعیین شعاع پرش هیدرولیکی دایروی ارائه نمود. واتسون سپس با انجام آزمایش‌های متعددی اظهار نمود که تئوری ارائه شده توسط او در جریان آرام تطابق بسیار خوبی با نتایج تجربی دارد ولی در جریان درهم دارای مطابقت کمتری است. در سال ۲۰۰۳ بوش و آریستوف [۵] با در نظر گرفتن کشش سطحی در این پدیده به صورت تحلیلی و مقایسه‌ی آن با نتایج آزمایشگاهی توانستند دقت تئوری واتسون را بهبود بخشند. در حقیقت آن‌ها با انجام محاسبات ریاضی پیچیده و بهره‌گیری از برخی فرضیات ساده‌سازی، رابطه‌ای برای نیروهای موجود در سطوح سیال منحنی بدست آورده و با اضافه کردن آن به معادلات بقای اندازه حرکت در نهایت توانستند روابط نهایی واتسون برای یافتن شعاع پرش را اصلاح نمایند.

از منظر دیگر، الگارد و همکاران [۶] در سال ۱۹۹۸ در آزمایش‌های خود حالتی جدید از پدیده پرش هیدرولیکی را مشاهده نمودند. آن‌ها دریافتند که در صورتی که در این پدیده از سیالاتی با لزجت بیشتر از آب استفاده شود شکل پرش هیدرولیکی ایجاد شده پس از برخورد جت سیال با آب

پدیده برخورد جت سیال با یک صفحه تخت در بسیاری از صنایع از جمله خنک‌کاری قطعات الکترونیکی و پره‌های توربین‌ها، فرآیندهای ورق‌کاری، پوشش‌دهی، شستن سطوح، ساخت شیشه، آینه‌های لیزری و ... کاربرد دارد و به همین علت از سال‌ها پیش مورد توجه محققان قرار گرفته است. هنگامی که یک جت سیال با مقطع دایره‌ای به صورت عمود به یک سطح افقی برخورد می‌کند، مشاهده می‌شود که تا شعاع معینی فیلمی از سیال بر روی سطح تشکیل شده و سپس با وقوع یک پرش هیدرولیکی ضخامت لایه سیال افزایش می‌یابد. با توجه به اینکه در لایه‌ی فیلمی سیال هم شعاع و هم ارتفاع سطح سیال کمتر خواهد بود، بنابراین در این ناحیه سرعت سیال بسیار بالاتر از سرعت از سیال پس از وقوع پرش هیدرولیکی می‌باشد. این سرعت بالا با تنش برشی روی دیواره و میزان انتقال حرارت از سطح نسبت مستقیم داشته و همین عوامل علت کاربردهای بسیار این پدیده است. در نتیجه پیش بینی زمان، مکان و ساختار ایجاد پرش هیدرولیکی در این پدیده بسیار مهم می‌باشد. در همین راستا پژوهش‌های زیادی برای شناخت پدیده پرش هیدرولیکی در اثر برخورد جت سیال با یک صفحه تخت صورت گرفته است و محققان بسیاری الگوها و رابطه‌های گوناگونی را برای شبیه‌سازی و پیش بینی چگونگی وقوع این پدیده ارائه داده‌اند.

شکل هندسی تشکیل شده پس از ایجاد یک پرش هیدرولیکی روی سطح نیز مورد بررسی بسیار قرار گرفته است. بر اساس پژوهش‌های پیشین اگر جت سیال با لزجت نسبتاً کم به صورت عمود با سطح برخورد کند، پرش هیدرولیکی در همی زوایا دارای شعاع یکسان بوده و یک ناحیه دایره شکل از فیلم سیال بر روی سطح ایجاد خواهد شد. اما در شرایطی که سیال به صورت مایل به سطح برخورد کند و یا لزجت سیال افزایش یابد شکل فیلم سیال ایجاد شده بر روی سطح از حالت دایره‌ای خارج شده و اشکال دیگری را تشکیل می‌دهد [۱].

برای اولین بار ریلی [۲] در سال ۱۹۱۴ در آزمایش‌های خود پرش هیدرولیکی دایره‌ای را مشاهده نموده و بر روی تاثیر عوامل مختلف روی این پدیده بحث کرد. او که به صورت کیفی تحلیل‌های خود را در این زمینه ارائه کرده

پرش هیدرولیکی غیر دایروی تبدیل خواهد شد. همچنین در سال ۲۰۱۱ پسندیده فرد و همکاران [۱۱] با شبیه‌سازی عددی این پدیده با روش حجم سیال^۱ در هندسه دوبعدی و متقارن محوری دریافتند با افزایش لزجت سیال پایداری پرش بیشتر شده و وابستگی آن نسبت به ارتفاع سیال پایین دست کاهش می‌یابد. همچنین آن‌ها در مقاله خود بیان کردند با افزایش ارتفاع سیال پایین دست، شعاع پرش هیدرولیکی دایروی کاهش یافته تا جایی که در شعاعی خاص پرش از حالت پایدار خود خارج خواهد شد. همچنین آن‌ها تاثیر وجود جاذبه در تشکیل پدیده پرش هیدرولیکی را بررسی نموده و بیان کردند با کاهش شتاب گرانشی شعاع پرش بزرگ‌تر شده تا جایی که به طور کلی از بین می‌رود.

یک سال بعد مارتنز و همکاران [۱۲] با نوشتن معادلات پایستگی جرم و مومنوم در اطراف محل وقوع پرش و همچنین تعادل نیروهای هیدرواستاتیکی و تنش‌های ویسکوز در جهت شعاعی و محوری، به صورت تحلیلی مدلی برای شبیه‌سازی شکل پرش هیدرولیکی چندضلعی ارائه دادند. اما آن‌ها بیان کردند که مدل ارائه شده توسط آن‌ها در چندضلعی‌های با تعداد اضلاع بالا (نزدیک به دایره) با نتایج تجربی تطابق خوبی دارد.

در سال ۲۰۱۵ لاپوس و بوش [۱۳] با برابر قرار دادن نیروهای ناشی از فشار و کشش سطحی در اطراف محل وقوع پرش، با روش تحلیلی رابطه‌ای برای پیش بینی تعداد اضلاع در پرش هیدرولیکی چند ضلعی ارائه کردند. آن‌ها در مدل خود یک ساختار موجی شکل در پدیده در نظر گرفته اند.

تاکنون شبیه‌سازی عددی پدیده پرش هیدرولیکی چندضلعی انجام نشده است و تنها مدل‌سازی تحلیلی شکل پرش هیدرولیکی چندضلعی توسط برخی محققان پیشین صورت گرفته است. بنابراین در این پژوهش با استفاده از روش حجم سیال به شبیه‌سازی سه بعدی پرش هیدرولیکی دایروی پرداخته و با توجه به اینکه تشکیل پرش چندضلعی بر اساس پژوهش‌های پیشین بر اثر وجود یک موج مکانیکی در جریان سیال پدید می‌آید، با افزودن یک اغتشاش در سرعت سیال پدیده پرش هیدرولیکی چندضلعی شبیه‌سازی شده است.

به یک ساختار چندضلعی تبدیل خواهد شد. بر اساس نتایج ارائه شده توسط آن‌ها که با استفاده از سیالی با لزجت تقریباً ۱۱ برابر آب انجام گرفته است، تعداد اضلاع چندضلعی ایجاد شده در پرش هیدرولیکی به ارتفاع سیال پایین دست، دبی خروجی از نازل و ارتفاع نازل تا صفحه هدف وابسته است.

بوش و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۶ با ارائه نتایج آزمایشگاهی خود بر اساس اعداد بدون بعد، وابستگی تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی را به قطر جت، ارتفاع سیال پایین دست، لزجت سینماتیکی، کشش سطحی سیال و دبی جریان به دست آوردند. یکی از عوامل مهم در مبحث پرش هیدرولیکی، پایداری شکل پرش در حالت‌های مختلف جریان است. در همین راستا در سال ۲۰۱۵ تیمورتاش و مخلص [۱] بر روی تاثیر عوامل مختلف بر پایداری پرش هیدرولیکی پرداختند و در تحقیقات خود به شکل جدیدی از این پدیده که در مقاله خود پرش هیدرولیکی دوار نامیدند، اشاره کردند. آن‌ها بیان کردند که ماهیت پدیده پرش هیدرولیکی چند ضلعی و همچنین پرش هیدرولیکی دوار بر اثر ایجاد یک موج مکانیکی در جهت مماسی حول ناحیه پرش رخ می‌دهد.

با توسعه روش‌های عددی، محققین بسیاری به شبیه‌سازی پدیده پرش هیدرولیکی در حالت‌های مختلف پرداختند. یوکوی و ژیانو [۸] در سال ۱۹۹۹ پرش هیدرولیکی دایروی را به صورت دوبعدی با استفاده از روش‌های عددی شبیه‌سازی کرده و شکل پرش هیدرولیکی و عوامل موثر بر تغییر آن را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در نتایج خود به این نکته اشاره کردند که شکل پرش متاثر از ناحیه پرفشار بعد از وقوع پرش هیدرولیکی می‌باشد. همچنین آن‌ها در سال ۲۰۰۲ [۹] در پژوهشی عامل مهم دیگر در تعادل فشار در اطراف محل وقوع پرش را کشش سطحی معرفی کرده و تاثیر آن را در وقوع پرش هیدرولیکی در شبیه‌سازی عددی خود نشان دادند.

در سال ۲۰۰۸ کاسیموف [۱۰] نیز با شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی دایروی با استفاده از روش‌های عددی بیان کرد که یک مقدار بحرانی برای کشش سطحی سیال وجود دارد که به ازای مقادیر بیشتر از آن یک پرش هیدرولیکی دایروی پایا نمی‌تواند وجود داشته باشد. این بدین معناست که پرش هیدرولیکی به یکی از دو حالت پرش هیدرولیکی ناپایا و یا

¹ Volume of Fluid

۲- معادلات حاکم و شبیه‌سازی عددی

در این پژوهش، با حل معادلات ناویراستوکس ابتدا به شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی دایروی پرداخته شده است. همچنین از روش نسبت حجمی سیال جهت مدل سازی سطح آزاد استفاده می‌شود. در این شبیه‌سازی با توجه به پایین بودن عدد رینولدز، معادلات برای جریان آرام حل شده‌اند. همچنین سیال، نیوتنی و تراکم ناپذیر فرض شده‌است و با توجه به این که دمای سیال در کل مدل سازی‌های انجام شده ثابت است، کشش سطحی، چگالی و ویسکوزیته ثابت در نظر گرفته شده‌اند.

معادلات حاکم بر جریان سیال، معادلات پیوستگی و مومنوم می‌باشند که بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \vec{g} + \frac{1}{\rho} \vec{F}_b \quad (2)$$

در این رابطه \vec{V} بردار سرعت، t زمان، ρ چگالی سیال، P فشار، $\vec{\tau}$ تانسور تنش، \vec{g} بردار شتاب جاذبه و \vec{F}_b بردار نیروی حجمی است. تانسور تنش ($\vec{\tau}$) برای سیال نیوتنی به صورت زیر قابل تعریف است که در آن μ ویسکوزیته دینامیک^۱ سیال را نشان می‌دهد.

$$\vec{\tau} = \mu \left[(\vec{\nabla} \vec{V}) + (\vec{\nabla} \vec{V})^T \right] \quad (3)$$

در مطالعات مربوط به جریان‌های سطحی، به منظور ردیابی سطح آزاد سیال، یک معادله اضافی نیاز می‌باشد. روش بکارگرفته شده در این پژوهش، الگوریتم یانگز [۱۴] می‌باشد. در روش نسبت حجمی سیال، حرکت مرز مشترک بین دو سیال به وسیله معرفی یک کمیت اسکالر در حوزه حل انجام می‌گیرد که با f تعریف می‌شود و مقدار آن در واقع نسبتی از حجم هر سلول محاسباتی در حوزه حل را نشان می‌دهد که توسط مایع اشغال شده است که در هر سلول با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f = \frac{\text{حجم اشغال شده از سلول توسط مایع}}{\text{حجم سلول}} \quad (4)$$

بنابراین مقدار آن برای گاز صفر، برای مایع یک و برای مخلوطی از مایع و گاز بین صفر و یک می‌باشد. مقدار این

کمیت اسکالر به طور مستقیم در معادله مومنوم ظاهر نمی‌شود اما تأثیر آن در هر سلول بر مقدار چگالی و ویسکوزیته بر اساس روابط زیر به دست می‌آید:

$$\rho = f \rho_l + (1 - f) \rho_g \quad (5)$$

$$\mu = f \mu_l + (1 - f) \mu_g \quad (6)$$

که در آن زیرنویس‌های g و l به ترتیب نشان‌دهنده فازهای گاز و مایع هستند. در مراحل محاسباتی طی شده، پس از محاسبه مقادیر سرعت با استفاده از معادله مومنوم، مقادیر f بر اساس معادله انتقال زیر در حوزه حل جابه‌جا می‌شوند:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) f = 0 \quad (7)$$

کشش سطحی، موجب ایجاد اختلاف فشار بین دو نقطه مجاور در داخل و خارج از سطح آزاد سیال می‌شود. نیروی حاصل از کشش سطحی به خصوص در مقیاس‌های کوچک (mm) و سرعت‌های پایین عامل تأثیرگذار و مهمی بر رفتار سیال است و به واسطه همین نیرو است که قطرات معلق در هوا تمایل به شکل کروی دارند. از مدل ارائه شده توسط لاندل [۱۵] به منظور مدلسازی ریاضی تأثیر کشش سطحی، شرط مرزی زیر را با فرض ثابت بودن کشش سطحی و صفر در نظر گرفتن تنش‌های برشی در سطح آزاد می‌توان بدست آورد. بر اساس این مدل می‌توان گفت:

$$P_l - P_g = \sigma \kappa \quad (8)$$

که در آن P فشار، σ کشش سطحی و κ انحنای سطح می‌باشد. حال با روش نیروی سطحی پیوسته^۲ و یا به اختصار CSF، با بازنویسی نیروی حاصل از کشش سطحی به صورت یک نیروی حجمی (\vec{F}_{ST}) آن را وارد معادله مومنوم می‌کند. بر اساس این دیدگاه، آلینف و همکاران [۱۶] معادله ۹ را برای بدست آوردن این نیرو ارائه کردند.

$$\vec{F}_{ST} = \frac{A_{cell}}{\Omega_{cell}} \sigma \kappa \hat{n} \quad (9)$$

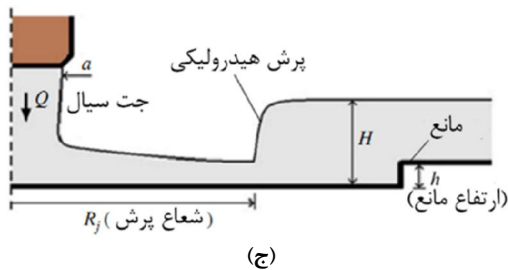
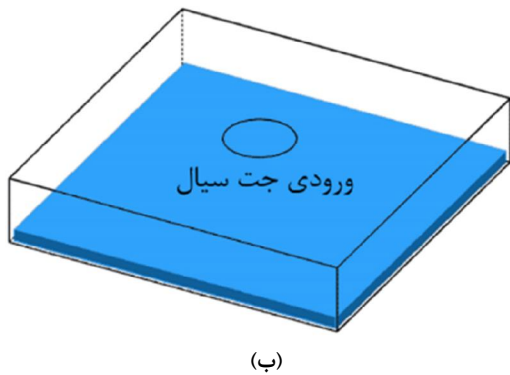
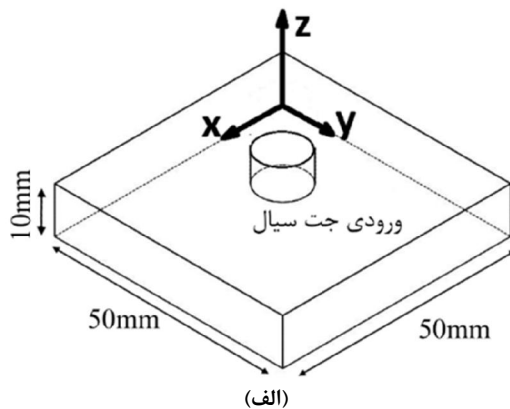
که در آن A_{cell} اندازه سطح آزاد سیال موجود در هر سلول و Ω_{cell} حجم آن سلول است. لازم به ذکر است که κ و \hat{n} بر اساس مقادیر f به این صورت محاسبه می‌شوند:

² Continuum Surface Force

¹ Dynamic Viscosity

سه در یک مقدار شعاع پرش هیدرولیکی بر هم منطبق می‌شوند.

به همین علت، شبکه ۷۶۸۰۰ سلولی به جهت کاهش هزینه‌ها و زمان حل برای حل‌های بعدی استفاده شده است. لازم به ذکر است که در الگوریتم یانگز [۱۴] اگر سلول‌ها به صورت مکعبی تعریف شوند، خطای حل کمتر خواهد شد.



شکل ۱- الف) حوزه حل عددی، ب) شرایط اولیه حوزه حل و ج) شکل شماتیک دو بعدی نصف جریان سیال و پرش هیدرولیکی

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}f}{|\vec{\nabla}f|} \quad (10)$$

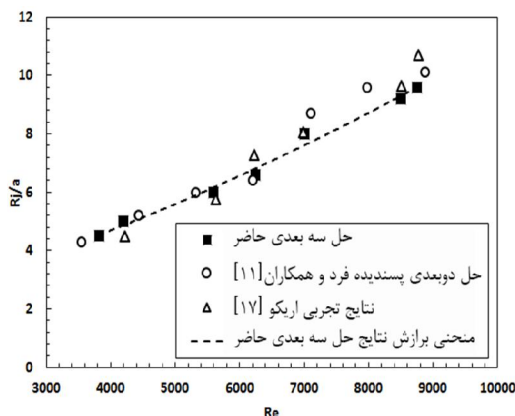
$$\kappa = -\vec{\nabla} \cdot \hat{n} \quad (11)$$

۳- حوزه حل و شرایط مرزی

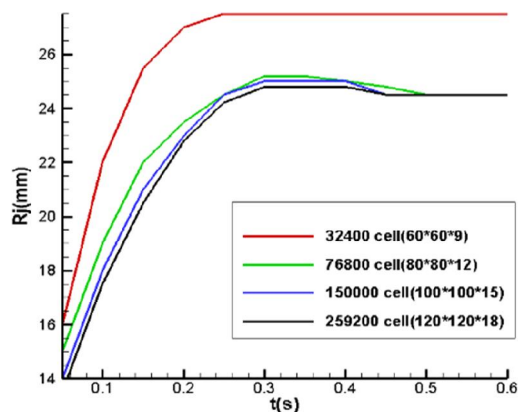
در این پژوهش برخورد جت سیال عمودی با سطح، مورد مطالعه قرار گرفته است. لذا از یک حوزه حل مکعب مستطیلی که جت سیال از وجه بالایی وارد حوزه حل می‌شود، استفاده شده است. ابعاد حوزه حل نشان داده شده در شکل ۱ به صورت $10\text{mm} \times 50\text{mm} \times 50\text{mm}$ می‌باشد و قطر جت سیال ورودی 10mm است (شکل ۱-الف). برای وجه پایینی مکعب مستطیل مرز دیوار با شرط عدم لغزش فرض شده است. برای وجوه جانبی حوزه حل نیز تا ارتفاع 2mm یک دیواره به عنوان مانع و بالاتر از آن مرز خروج جریان فرض شده است. بنابراین باتوجه به شکل مکعب مستطیلی حوزه حل، مانع نیز به صورت مستطیلی در نظر گرفته شده است. در حقیقت علت قرار دادن این مانع، قابلیت تنظیم ارتفاع سیال پایین دست می‌باشد و فاصله مانع پایین دست با محل برخورد جت سیال با سطح، تاثیری در نتایج نهایی حل عددی ندارد. در صورتی که شبیه‌سازی از ابتدای برخورد جت سیال با سطح مدل شود، باید ابتدا سیال فضای کف حوزه حل را تا ارتفاع مانع موجود در مرزهای جانبی، پر کند و پس از آن فرآیند پرش هیدرولیکی اتفاق می‌افتد. بنابراین با توجه به تجربیات قبلی [۱۱] به منظور کاهش زمان حل، در ابتدای شروع حل لایه‌ای به ضخامت 2mm از سیال در کف حوزه حل در نظر گرفته شده است (شکل ۱-ب).

۴- ارائه نتایج و صحنه گذاری حل

با توجه به اینکه در روش‌های عددی استقلال نتایج از شبکه بندی بسیار مهم است، لذا مدل موجود را برای ۴ شبکه بندی مختلف حل شده است که در هر مورد تعداد سلول‌های شبکه بندی نسبت به شبکه درشت‌تر دو برابر شده است. آنچه در این مسئله و کاربردهای آن مهم است، شعاع پرش هیدرولیکی می‌باشد. بنابراین همانطور که در شکل ۲ دیده می‌شود، با اینکه در زمان‌های ابتدای شروع حل بین سه شبکه ریزتر اختلافاتی دیده می‌شود ولی در حالت پایدار هر



شکل ۳- مقایسه نتایج حل عددی سه بعدی حاضر با نتایج حل عددی پسندیده فرد و همکاران [۱۱] و نتایج تجربی اریکو [۱۷]

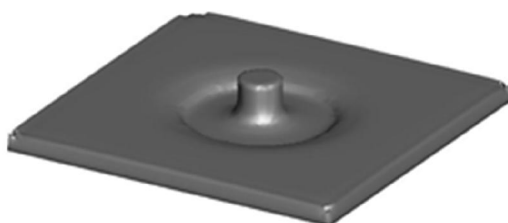


شکل ۲- نمودار تغییرات شعاع پرش هیدرولیکی نسبت به زمان در ۴ شبکه بندی مختلف، در این شبیه‌سازی‌ها دبی سیال ۳۰ ml/s، شعاع جت سیال ۵mm، ارتفاع مانع پایین دست ۲mm و سیال عامل، آب انتخاب شده است.

۴-۱- پرش هیدرولیکی دایروی

با توجه به کارهای زیادی که در زمینه پرش هیدرولیکی دایروی توسط محققان پیشین صورت گرفته است، به جهت صحت‌گذاری بر روش عددی استفاده شده در مرحله اول به شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی دایروی پرداخته شد. از طرف دیگر برای شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی چندضلعی، باید در ابتدا پرش هیدرولیکی دایروی شبیه‌سازی شود. بنابراین در این بخش به بررسی شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی دایروی با استفاده از روش عددی حاضر و مقایسه با نتایج محققان پیشین پرداخته شده است. همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، تطابق خوبی بین نتایج بدست آمده از نتایج حل عددی سه بعدی (حل حاضر) و حل عددی دوبعدی که در سال ۲۰۱۱ توسط پسندیده فرد و همکاران [۱۱] انجام گرفته بود، وجود دارد. با مقایسه این دو حل عددی با نتایج تجربی اریکو [۱۷] می‌توان گفت که حل حاضر در برخی موارد دارای تطابق بیشتری با نتایج تجربی نسبت به حل دوبعدی می‌باشد.

در شکل ۴ نمونه‌ای از نتایج پرش هیدرولیکی دایروی شکل گرفته در اثر برخورد جت سیال با سطح که توسط روش عددی حاضر شبیه‌سازی شده است مشاهده می‌شود. این تصویر پس از گذشت یک ثانیه از پدیده و رسیدن پدیده به حالت پایدار گرفته شده است.



شکل ۴- نمونه‌ای از نتایج حل عددی سه بعدی برخورد جت سیال به صورت عمود با سطح و تشکیل پرش هیدرولیکی دایروی

همچنین شکل پرش ایجاد شده با نتایج دوبعدی پسندیده فرد و همکاران [۱۱] به صورت کیفی با نتایج حل عددی سه بعدی مقایسه شده است. در این شبیه‌سازی‌ها که برای سیال آب انجام شده است قطر جت سیال ۵mm، ارتفاع مانع پایین دست سیال ۲mm و دبی سیال ۳۰ ml/s در نظر گرفته شده است. در شکل ۵ نتایج شکل جریان پرش ایجاد شده در حل عددی پسندیده فرد و همکاران [۱۱] در طی چند زمان مختلف از پدیده آمده است.

در شکل ۶ نیز در همان شرایط و زمان‌ها شکل ایجاد شده از حل سه بعدی حاضر آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، شکل جریان سیال ایجاد شده در زمان‌های مختلف و محل وقوع پرش هیدرولیکی تطابق نسبتاً خوبی با نتایج دوبعدی دارد.

زاویه‌ی خاص شروع به رشد می‌کند. در برخورد یک جت سیال با سطح نیز چنین ناپایداری‌هایی در جریان به وجود می‌آید و اگر توسط سیال میرا نشود موجب وجود جت‌هایی از سیال در جهت شعاعی می‌گردد که در شکل پرش هیدرولیکی گوشه‌هایی را ایجاد می‌کند و پرش هیدرولیکی به شکل یک چندضلعی در خواهد آمد.

در سال ۲۰۰۰ باسمن و همکاران [۱۸] در یک پژوهش عددی به شبیه‌سازی پدیده برخورد قطره با سطح پرداخته و با توجه به توضیحات بالا برای مدلسازی اغتشاش ایجاد شده در لحظه برخورد قطره با سطح معادله زیر را پیشنهاد کردند:

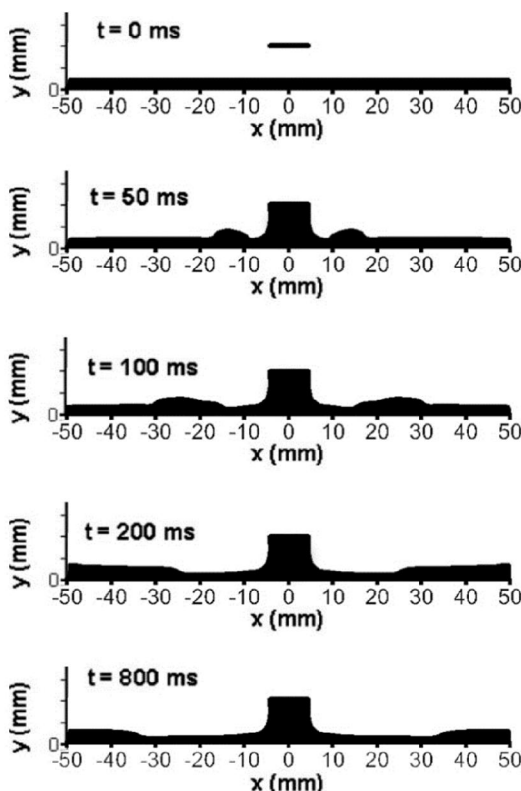
$$u_{r,p} = u_{r,up} \left(1 + A_p \exp \left(-\beta_p \left(\frac{z}{D_0} \right)^2 \right) \right) \cos(N\theta) \quad (12)$$

۲-۴- پرش هیدرولیکی چندضلعی

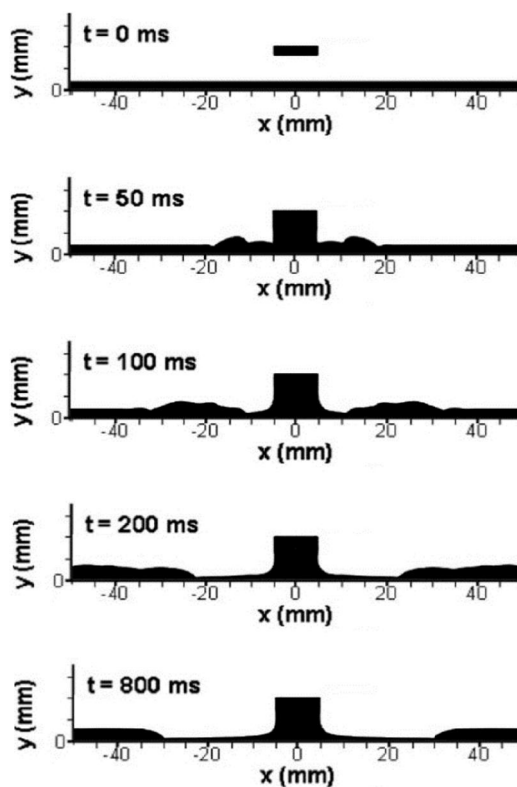
با اطمینان از صحت حل عددی برای شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی دایروی، به منظور شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی چند ضلعی، همانطور که در بخش مقدمه بیان شد، لازم است یک موج مکانیکی به جریان اضافه نمود.

در هنگام برخورد یک قطره در حال سقوط با یک سطح، با توجه به افزایش فشار ناگهانی در قطره، سیال به صورت لایه‌ی نازکی بر روی سطح در جهت شعاعی پخش می‌شود. پارامترهای بسیاری باعث می‌شود که در لبه‌ی حمله‌ی این لایه‌ی سیال ناپایداری‌هایی دیده شود که موجب ایجاد موج-هایی در جهت مماسی گردد.

اگر این ناپایداری‌ها افزایش یابد و لایه سیال همچنان در حال پخش شدن باشد، سیال به صورت انگشت‌هایی در چند



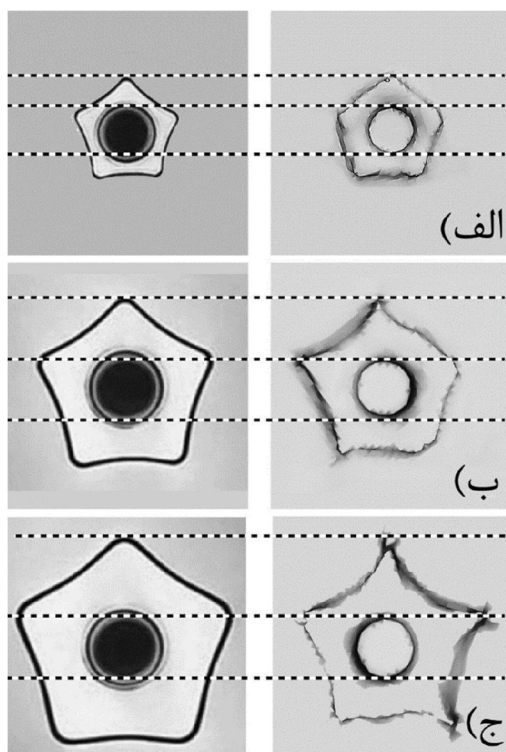
شکل ۶- نتایج حل عددی سه بعدی حاضر در زمان‌های مختلف برای سیال آب، دبی سیال ۳۰ ml/s، شعاع جت سیال ۵ mm و ارتفاع مانع پایین دست سیال ۲ mm



شکل ۵- نتایج حل عددی دوبعدی پسندیده فرد و همکاران [۱۱] در زمان‌های مختلف برای سیال آب، دبی سیال ۳۰ ml/s، شعاع جت سیال ۵ mm و ارتفاع مانع پایین دست سیال ۲ mm

مشاهده می‌شود، در شرایط مشابه تطابق خوبی بین نتایج عددی و تجربی دیده می‌شود. در شکل جت سیال اتیلن گلیکول دارای شعاع ۱/۱۵mm و ارتفاع مانع پایین دست سیال ۶mm است. دبی سیال نیز به ترتیب برای موارد (الف) تا (ج) مقادیر ۴۰/۸ml/s، ۴۶/۸ml/s و ۵۲/۳ml/s می‌باشد. همانطور که در شکل دیده می‌شود در این حالت‌ها پرش هیدرولیکی پنج ضلعی است.

برای مقایسه بهتر نتایج عددی و تجربی، طول بی‌بعد بزرگترین شعاع در پرش هیدرولیکی چند ضلعی برای چند حالت مختلف در شکل ۸ رسم شده است.



شکل ۷- نتایج حل عددی مقایسه کیفی نتایج شبیه‌سازی عددی پرش هیدرولیکی چندضلعی (ستون سمت راست) با نتایج تجربی تیمورتاش و مخلصی [۱] (ستون سمت چپ) برای شعاع جت سیال ۵/۱۵mm، ارتفاع مانع پایین دست سیال ۶mm، دبی سیال الف) ۴۰/۸ml/s، ب) ۴۶/۸ml/s و ج) ۵۲/۳ml/s

که در آن زیرنویس τ بیانگر مولفه شعاعی و زیرنویس‌های p و up به ترتیب بیانگر مغشوش شده و مغشوش نشده می‌باشد. D_0 قطر قطره یا جت سیال و N تعداد انگشت‌های ایجاد شده در هنگام رشد نوسانات جریان می‌باشد. A_p دامنه اغتشاش بر روی سطح جامد می‌باشد که مقدار آن در پژوهش باسمن و همکاران [۱۸] عدد یک قرار داده شده است که در اینجا نیز از همین مقدار استفاده شده است. β_p نیز نرخ میرا شدن اغتشاش با افزایش ارتفاع از سطح جامد است که با توجه به اینکه باسمن و همکاران [۱۸] مقدار این عدد را ۴۰۰۰ در نظر گرفته‌اند در اینجا نیز همین مقدار تنظیم شده است. با توجه به توضیحات قبل و شباهت مدل برخورد قطره با سطح با جریان موجود در پرش هیدرولیکی چندضلعی، در این پژوهش نیز از این مدل جهت ایجاد یک موج مکانیکی در جریان استفاده شده است، به این صورت که با اصلاح مولفه‌های سرعت پس از حل کامل معادلات ناوراستوکس و تعیین مقادیر سرعت در هر سلول، این موج در شبیه‌سازی اعمال می‌گردد.

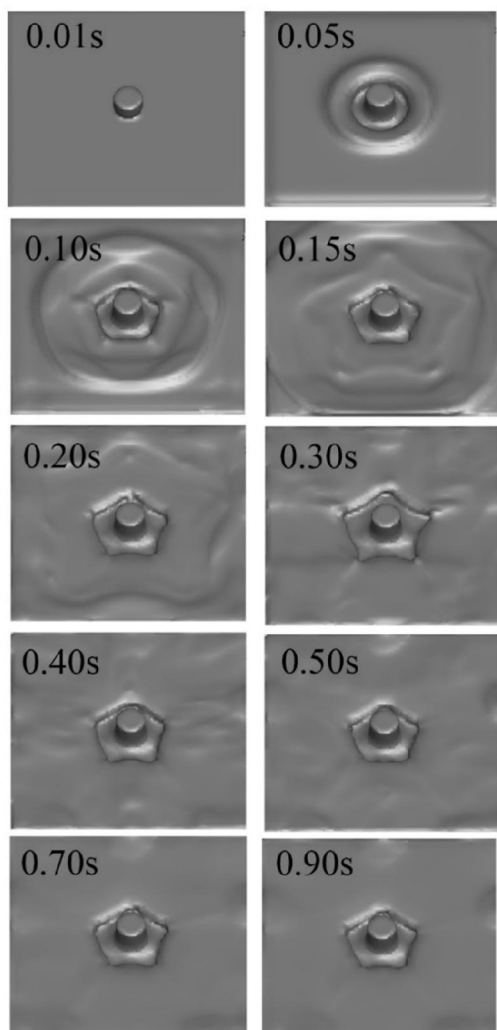
از طرفی برای محاسبه تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی از رابطه ارائه شده توسط سوختانلو و همکاران [۱۹] استفاده شده است:

$$N = [0.69Q^{1.23}d^{-0.87}h_{obstacle}^{-0.89}] \quad (13)$$

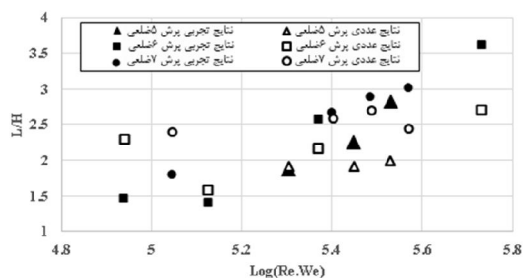
که در این رابطه Q دبی حجمی، $h_{obstacle}$ ارتفاع مانع و d قطر نازل می‌باشد. لازم به ذکر است که این رابطه برای سیال عامل اتیلن گلیکول دارای لزجت سینماتیکی ۰/۱۲st، چگالی $1/1g/cm^3$ و کشش سطحی $5/47dyn/cm$ بوده و با استفاده از روش‌های آماری از نتایج تجربی بدست آمده است. بنابراین این رابطه برای سیال دیگری لزوماً قابل استفاده نیست. از آنجا که در شبیه‌سازی‌های انجام شده در پژوهش حاضر نیز از سیال عامل اتیلن گلیکول استفاده شده است، این رابطه در شبیه‌سازی‌ها به کار برده شده است. ضمناً رابطه ضمنی دیگری نیز توسط محققان پیشین برای تخمین تعداد اضلاع پرش ارائه نشده است. با اضافه شدن این موج به برنامه عددی موجود، می‌توان پدیده پرش هیدرولیکی چندضلعی را شبیه‌سازی نمود. پس از انجام شبیه‌سازی‌ها، نتایج حاصل به صورت کمی و کیفی با نتایج آزمایش‌های تجربی تیمورتاش و مخلصی [۱] مقایسه شده است. همانطور که در شکل ۷

در نهایت ثابت می‌ماند و به صورت یک شکل پایدار چند ضلعی دیده می‌شود.

در شکل ۱۲ خطوط جریان سیال در زمان رسیدن شکل پرش به حالت پایدار رسم گردیده است. مشاهده می‌شود که در محل‌هایی که شعاع پرش هیدرولیکی دارای بیشترین مقدار است (رئوس شش ضلعی)، سیال خروجی سرعت



شکل ۹- روند تشکیل پرش هیدرولیکی پنج ضلعی در طی زمان، شعاع جت سیال ۵/۱۵mm، ارتفاع مانع پایین دست سیال ۲/۷mm و دبی سیال ۵۵ml/s



شکل ۸- مقایسه طول بی بعد پرش هیدرولیکی چندضلعی در نتایج عددی حاضر و نتایج تجربی تیمورتاش و مخلصی [۱]

همانطور که مشاهده می‌شود، روش عددی استفاده شده می‌تواند با تقریب نسبتاً خوبی پرش هیدرولیکی چند ضلعی را مدل کند.

در شکل‌های ۹ تا ۱۱ تغییرات شکل پرش هیدرولیکی چند ضلعی برای سیال اتیلن گلیکول در زمان‌های مختلف، برای سه شکل پرش ۵ضلعی، ۶ضلعی و ۸ضلعی نشان داده شده است.

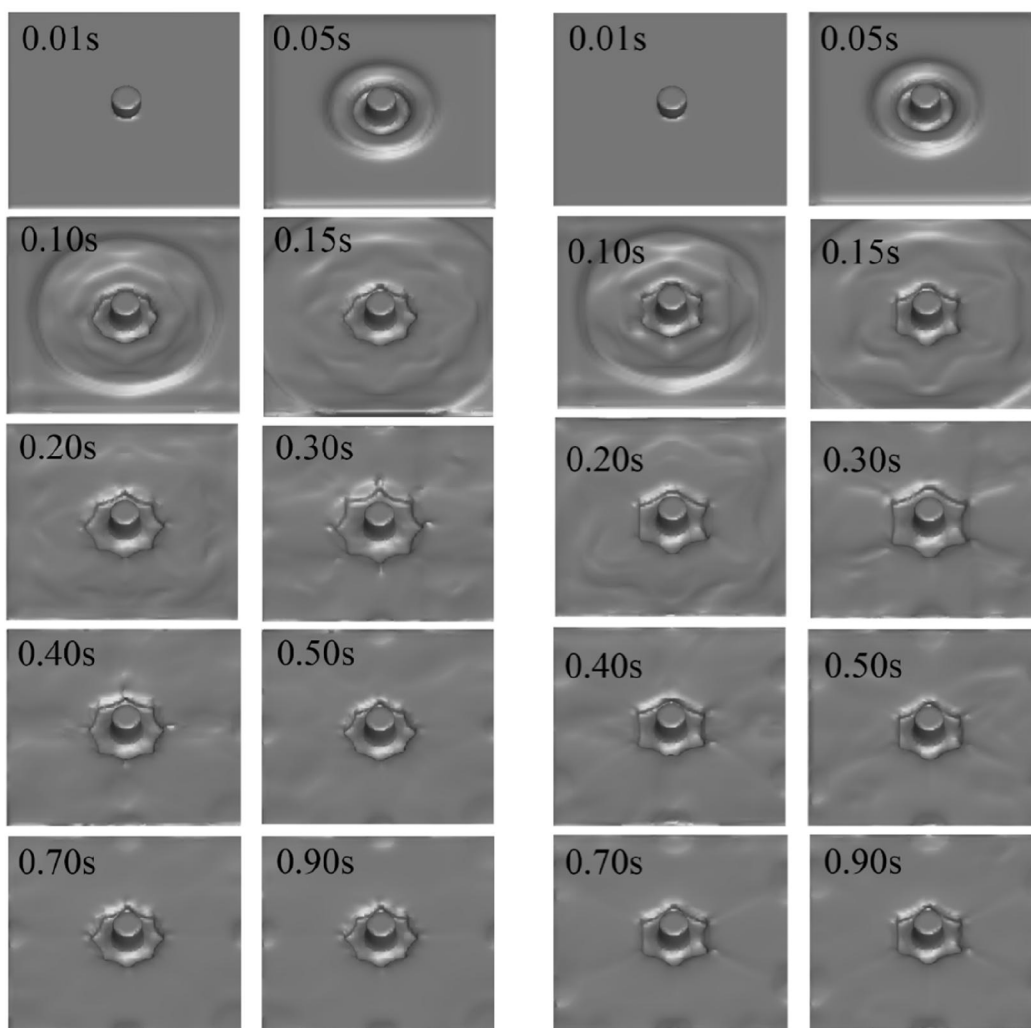
در پژوهش‌های پیشین که عموماً به صورت تجربی انجام شده است، با توجه به عدم امکان اندازه‌گیری سرعت در سطح، عدد رینولدز جریان بر اساس قطر نازل محاسبه گردیده است.

در اینجا نیز عدد رینولدز جریان در نازل در سه حالت شکل‌های ۹ تا ۱۱ به ترتیب ۵۶۷، ۶۷۰ و ۷۷۳ می‌باشد که بیانگر آرام بودن جریان سیال است. لازم به ذکر است که در پژوهش حاضر که امکان اندازه‌گیری سرعت در همه نقاط حوزه حل موجود است، اگر عدد رینولدز بر مبنای جریان موجود بر روی سطح نیز محاسبه گردد، باز هم در محدوده‌ی جریان آرام قرار دارد. همچنین جریان در پژوهش‌های گذشته نیز آرام در نظر گرفته شده است.

با بررسی شکل‌های ۹ تا ۱۱ مشاهده می‌شود که پس از برخورد جت سیال ابتدا پرش هیدرولیکی ایجاد شده به صورت دایره‌ای تشکیل شده و رشد می‌کند. سپس به دلیل وجود موج مکانیکی که توضیح داده شد، به تدریج شکل پرش هیدرولیکی از حالت دایره‌ای به چند ضلعی تغییر کرده و به رشد خود ادامه می‌دهد. با برخورد موج سیال به دیواره‌ها و برگشت آن، شعاع پرش هیدرولیکی اندکی کاهش یافته و

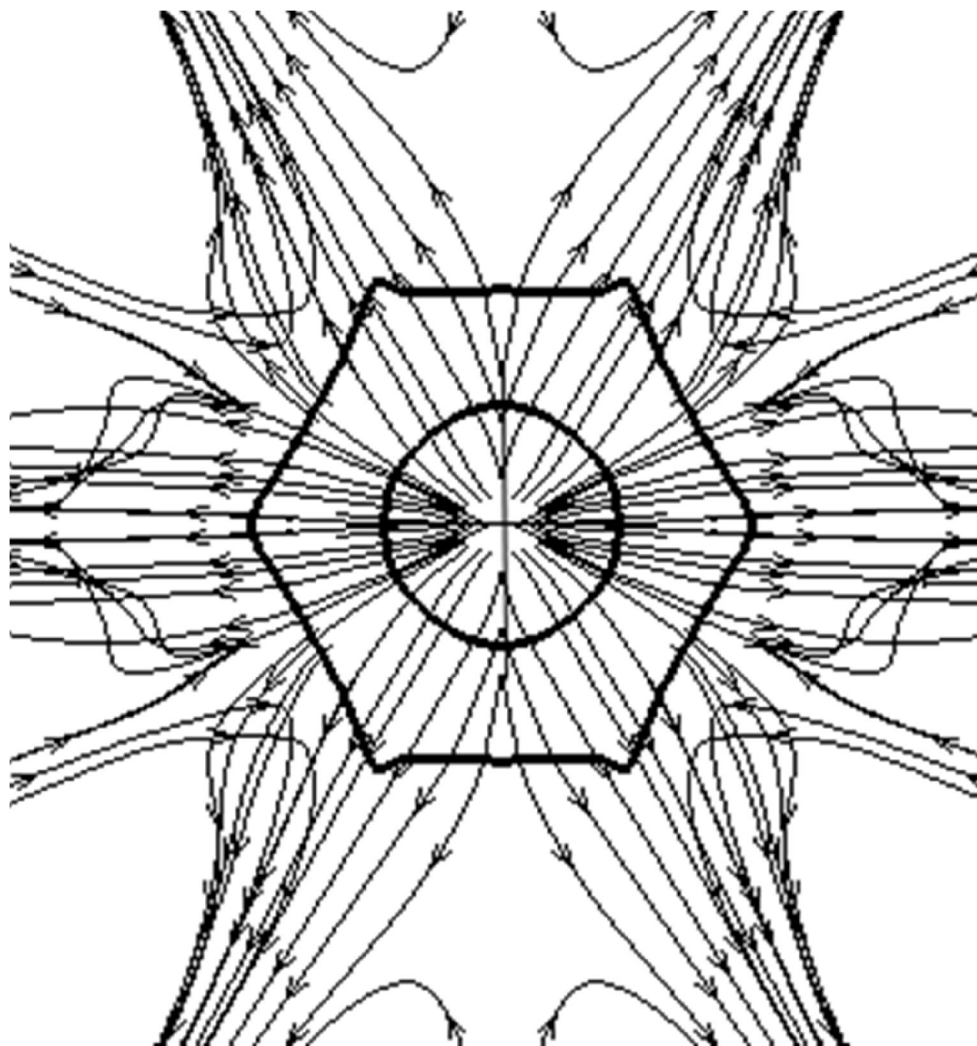
دارای انحنا به داخل می‌گردد. به عبارت دیگر جریان برگشتی از سمت دیواره‌های موجود در مرزهای حوزه‌ی حل به وسط اضلاع چند ضلعی می‌رسد و باعث عقب‌تر رفتن اضلاع می‌گردد.

سرعت کمتر بوده و در برخی مواقع حتی در جهت مخالف نیز می‌باشد که باعث ایجاد یک چندضلعی با اضلاع صاف یا بیشتری نسبت به سایر نقاط خواهد داشت. با توجه به پایستگی جرم در نقاط میانی (وسط اضلاع شش ضلعی)



شکل ۱۱- روند تشکیل پرش هیدرولیکی هشت ضلعی در طی زمان، شعاع جت سیال ۵/۱۵mm، ارتفاع مانع پایین دست سیال ۲/۷mm و دبی سیال ۶۵ml/s

شکل ۱۰- روند تشکیل پرش هیدرولیکی شش ضلعی در طی زمان، شعاع جت سیال ۵/۱۵mm، ارتفاع مانع پایین دست سیال ۲/۷mm و دبی سیال ۶۵ml/s



شکل ۱۲- خطوط جریان در اطراف یک پرش هیدرولیکی چندضلعی

۵- جمع بندی

همانطور که در بخش‌های قبل بیان شد، به منظور شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی چندضلعی ابتدا پرش هیدرولیکی دایروی در محیط سه بعدی توسط روش عددی حجم سیال شبیه‌سازی شد. در این روش معادلات بقای ممنتوم و جرم به همراه معادله انتقال کسر حجمی سیال حل شده و کشش سطحی به عنوان یک نیروی حجمی در سلول‌های موجود در مرز سیال و جامد در معادله ممنتوم اضافه گردیده است. سپس به جهت شبیه‌سازی پرش چندضلعی با توجه به

ماهیت موجی شکل بودن آن، یک اغتشاش شعاعی در سرعت سیال وارد گردیده است. پس از مقایسه نتایج عددی با آزمایش‌های تجربی انجام شده توسط محققان پیشین مشاهده شد تطابق خوبی از نظر ابعادی بین شبیه‌سازی عددی حاضر و نتایج تجربی دیده می‌شود. همچنین سیر تشکیل پرش هیدرولیکی چندضلعی شامل تشکیل پرش هیدرولیکی دایروی، افزایش شعاع دایره پرش، تبدیل تدریجی دایره به چندضلعی، برگشت موج و کاهش شعاع پرش و در نهایت پایداری شکل پرش هیدرولیکی چندضلعی در نتایج دیده شد.

۶- تقدیر و تشکر

بخشی از محاسبات این تحقیق در مرکز محاسبات سنگین دانشگاه فردوسی مشهد، انجام شد که بدینوسیله تشکر می‌شود.

۸- مراجع

- [1] Teymourtash AR, Mokhlesi M (2015) Experimental investigation of stationary and rotational structures in non-circular hydraulic jumps. *J Fluid Mech* 762: 344-360.
- [2] Rayleigh L (1914) On the theory of long waves and bores. *Proc R Soc London, Ser A* 90(619): 324-328.
- [3] Birkhoff G, Zarantonello E (1957) *Jets, Wakes, and Cavities*. Academic New York: 294-295.
- [4] Watson E (1964) The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane. *J Fluid Mech* 20(3): 481-499.
- [5] Bush JW, Aristoff JM (2003) The influence of surface tension on the circular hydraulic jump. *J Fluid Mech* 489: 229-238.
- [6] Ellegaard C, Hansen AE, Haaning A, Hansen K, Marcussen A, Bohr T, Hansen JL, Watanabe S (1998) Creating corners in kitchen sinks. *Nature* 392(6678): 767-768.
- [7] Bush JW, Aristoff JM, Hosoi A (2006) An experimental investigation of the stability of the circular hydraulic jump. *J Fluid Mech* 558: 33-52.
- [8] Yokoi K, Xiao F (1999) A numerical study of the transition in the circular hydraulic jump. *Phys Lett A* 257(3): 153-157.
- [9] Yokoi K, Xiao F (2002) Mechanism of structure formation in circular hydraulic jumps: Numerical studies of strongly deformed free-surface shallow flows. *Physica D-Nonlinear Phenomena* 161(3): 202-219.
- [10] Kasimov AR (2008) A stationary circular hydraulic jump, the limits of its existence and its gasdynamic analogue. *J Fluid Mech* 601: 189-198.
- [11] Passandideh-Fard M, Teymourtash AR, Khavari M (2011) Numerical study of circular hydraulic jump using volume-of-fluid method. *J Fluid Mech* 133(1): 011401.
- [12] Martens EA, Watanabe S, Bohr T (2012) Model for polygonal hydraulic jumps. *Phys Rev E* 85(3): 036316.
- [13] Labousse M, Bush JW (2015) Polygonal instabilities on interfacial vorticities. *Eur Phys J E* 38(10): 113.
- [14] Youngs DL (1982) Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion. Numerical methods for fluid dynamics. Academic Press, New York, USA.
- [15] Landau LD, Lifschitz EM (1987) *Fluid Mechanics*. 2nd edn. Oxford: Pergamon Press.
- [16] Aleinov I, Puckett E (1995) Computing surface tension with high-order kernels. In Proceedings of the 6th International Symposium on Computational Fluid Dynamics 13-18.

۷- علائم و نشانه‌ها

A	اندازه سطح آزاد سیال، m^2
F	نیرو بر واحد حجم، kg/m^2s^2
f	کسر حجمی سیال
\vec{g}	بردار شتاب جاذبه، m/s^2
\hat{n}	بردار یکه نرمال بر سطح آزاد سیال
P	فشار، $kg/m.s^2$
t	زمان، s
\vec{V}	بردار سرعت، m/s
μ	لزجت دینامیکی، $kg/m.s$
ρ	چگالی، kg/m^3
$\vec{\tau}$	تنسور تنش، $kg/m.s^2$
K	انحنای سطح، $1/m$
σ	کشش سطحی، kg/s^2
Ω	حجم سلول محاسباتی، m^3
زیرنویس‌ها	
b	حجمی
$cell$	سلول
g	گاز
l	مایع
ST	کشش سطحی

- [19] Soukhtanlou E, Teymourtash AR, Mahpeykar MR (2018) Proposal of experimental relations for determining the number of sides of polygonal hydraulic jumps. *Modares Mechanical Engineering* 18(1): 207-216. (in Persian)
- [17] Errico M (1987) A study of the interaction of liquid jets with solid surfaces. Ph.D. thesis. Department of Chemical Engineering, University of California, San Diego, Calif, USA.
- [18] Bussmann M (2000) A three-dimensional model of an impact droplet. PhD thesis. University of Toronto.