مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۸/ دوره ۹/ شماره ۳/ صفحه ۹۵-۱۰۸

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2019.7127.2643

حلّ تحلیلی هدایت گرمایی غیرفوریه ای نامتقارن در استوانه‌های توپر و بلند ارتوتروپیک

علی کیفری خیبری[۱]، محمّدباقر نظری[۲] و محمّد جعفری[۳،*]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده مکانیک

[۲] استادیار، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده مکانیک

[۳] دانشیار، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده مکانیک

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۰۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۱۰/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۵/۰۵

چکیده

در این مقاله، یک حلّ تحلیلی برای توزیع دمای نامتقارن در یک استوانه توپر کامپوزیتی تک لایه با در نظر گرفتن تئوری کاتانو ارائه شده است. توزیع دمای ناشی از تحریک اولیه نامتقارن در استوانه با حلّ معادله هدایت گرمایی هذلولوی حاکم با روش جداسازی متغیّرها استخراج شده است. از طرف دیگر، معادله هدایت گرمایی حاکم، با روش تفاضل محدود نیز حل شده است تا نتایج حلّ تحلیلی با استفاده از آن اعتبار سنجی شود. تاثیر حرکت موج گرما از سطح بیرونی به سمت مرکز استوانه و هم‌زمان حرکت موج دیگری از مرکز استوانه به سمت لایه بیرونی و تداخل آن‌ها با یکدیگر، روی توزیع دما بررسی شده است؛ همچنین، تاثیر زاویه الیاف روی توزیع دما در جهت‌های شعاعی و محیطی، مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه به بررسی توزیع دما برحسب زمان پرداخته شده است که مشاهده می‌شود، توزیع دما در یک نقطه برحسب زمان، دارای رفتار نوسانی است. به‌دلیل نوسانی بودن شرط اولیه، قبل از رسیدن توزیع دما به حالت پایا، این امکان وجود دارد که توزیع دما به توزیع دمای فوریه همگرا نشود؛ همچنین توزیع دما در زمان‌های مختلف در راستای شعاعی و محیطی، مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: حلّ تحلیلی؛ استوانه ارتوتروپیک؛ هدایت گرمایی غیرفوریه ای؛ تفاضل محدود.

An Analytical Solution for Asymmetric non-Fourier Heat Conduction in a Long Solid Orthotropic Cylinder

A. Keyfari Kheybari[1], M. B. Nazari[1], M. Jafari[1,*]

[1] Faculty of mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

Abstract

In this paper, an analytical solution for the asymmetric temperature distribution in a long orthotropic cylinder, considering Cattaneo theory, is presented. The temperature distribution, due to the non-axisymmetric initial condition, is obtained by using the separation of variable method. In order to verify analytical results, the governing equations are solved numerically using finite difference method. In presented results, the effect of the motion of heat wave from the external face to the center of the cylinder, simultaneously moving the other wave from the center to the external surface, as well as their interference on the temperature distribution is studied. Additionally, the effect of fiber angle on the temperature distribution in both radial and circumferential directions is investigated. Furthermore, the temperature distribution in terms of time is investigated. The results show that the temperature distribution in terms of time at one point has a periodic behavior. The time history of the non-Fourier temperature, which has a wavy form in contrast to the Fourier one, is presented. According to the results, the non-Fourier temperature distribution does not converge to the Fourier one before reaching to the steady state. Also, the temperature distribution at different times in radial and circumferential directions has been investigated.

Keywords: Analytical Solution; Orthotropic Cylinder; Non-Fourier Heat Conduction; Finite Difference.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۲۳-۳۲۳۰۰۲۴۰ فکس: ۰۲۳-۳۲۳۰۰۲۵۷

آدرس پست الکترونیک: m_jafari821@shahroodut.ac.ir

۱- مقدمه

بسیاری از قطعات استوانه‌ای از جمله لوله‌ها و مخازن تحت فشار در تجهیزات مهندسی مدرن مثل راکتورهای هسته‌ای، دستگاه‌های تولید و انتقال اشعه ایکس و لیزر و مخازن گازهای مایع در صنایع هوافضا، تحت هدایت گرمایی سریع قرار می‌گیرند. در چنین مواردی، تئوری کلاسیک هدایت گرمایی به‌اندازه کافی دقیق نیست. طبق تئوری کلاسیک، اگر جسمی تحت اغتشاش گرمایی در یک ناحیه محدود قرار گیرد، اثر آن بلافاصله در فواصل دور احساس می‌شود که از نظر فیزیکی قابل قبول نیست؛ همچنین، توزیع دمای فوریه در برخی از موارد مثل هدایت گرمای گذرا در بازه‌های زمانی خیلی کوچک، هدایت گرما در دماهای پایین نزدیک صفر مطلق مانند کاربردهای کرانجیک، هدایت گرما با نرخ زیاد در محیط‌های رقیق و هدایت گرما در ساختارهایی در ابعاد میکرون به‌اندازه کافی دقیق نیستند و نتایج غیرقابل قبولی ارائه می‌نمایند. علّت این امر ، ناسازگاری مدل هدایت فوریه با فیزیک واقعی انتشار گرما است. مهم‌ترین نقص قانون فوریه، منجر شدن به‌سرعت بی‌نهایت انتقال انرژی گرمایی است. برای حلّ مشکل مذکور، ورنات [۱] و کاتانو [۲]، تئوری هدایت گرمایی هذلولوی[1] را به‌طور مستقل ارائه کردند. در پدیده‌های با سرعت گرمایش بالا، با توجّه به نتایج آزمایشگاهی و مشاهده موج‌گونه انتشار گرما، مدل هذلولوی برای تحلیل موج گرمایی پیشنهاد شد [۳] که در آن یک ثابت تأخیر زمانی[2] برای شار گرمایی در نظر گرفته شده است.

در سال‌های اخیر برخی تحقیقات روی انحراف از معادله کلاسیک هدایت گرمایی فوریه متمرکز شده‌اند. درنظرگرفتن اثرهای غیرفوریه‌ای در توصیف فرآیند انتقال گرما و پیش-بینی توزیع دما، قابل‌اعتمادتر خواهد بود. تعدادی از مقالات، معادلات مربوط به این مدل را در حالت یک‌بعدی به روش تحلیلی بررسی کرده‌اند و تعداد معدودی به بررسی این مدل در حالات دوبعدی و سه‌بعدی پرداخته‌اند.

لواندوفسکا و مالینوفسکی [۴]، این معادله را برای یک‌لایه نازک را به‌وسیله روش تبدیل لاپلاس با کمک اصل سوپرپوزیشن حل کردند که از هر دو طرف گرم می‌شود و نتایج تحلیلی، با حلّ عددی مقایسه شده است. موسایی معادله هایپربولیک انتقال حرارت را برای محیط متناهی با یک منبع حرارتی دلخواه [۵]، با شرایط اولیّه دلخواه [۶]، با استفاده از سری فوریه کسینوسی حل کرد و نتایج به‌دست آمده با روش عددی مقایسه شده است. تانگ و اراکی [۷]، معادله غیر فوریه‌ای انتقال حرارت را برای یک پره تحت شرایط مرزی متناوب بررسی کردند. آن‌ها در این تحقیق پروفیل دما را برای ضخامت لایه جلویی برای زمان‌های رهایش مختلف با استفاده تبدیلات لاپلاس ارائه کردند. ژانگ و همکاران [۸]، معادله یک‌بعدی انتقال حرارت غیرفوریه‌ای را با منبع حرارتی بررسی کردند و معادله‌های تحلیلی وابسته به زمان را با معکوس لاپلاس به‌دست آوردند و با حلّ انتقال حرارت فوریه‌ای بدون منبع حرارتی در مختصات استوانه‌ای مقایسه کردند. جیانگ [۹] از روش تبدیل لاپلاس برای بررسی انتقال حرارت هدایتی هذلولوی در یک کره توخالی استفاده کرد که مرزهای آن تحت تأثیر یک تغییر ناگهانی دما قرار دارد. دانشجو و همکاران[۱۰]، تحلیل حرارت غیر فوریه‌ای یک سیلندر توخالی (FGM) را که تابع منبع دمایی وابسته به زمان است را به روش فضای حالت تکمیل شده جدید با در نظر گرفتن تئوری تقریبی کامپوزیت‌ها در دامنه لاپلاس حل نمودند و برای تبدیل به حوزه زمان از معکوس لاپلاس عددی با در نظر گرفتن پدیده (Gibb) استفاده کردند و سپس نتایج به‌دست آمده را با مطالعات گذشته مقایسه نمودند. بیشری[۱۱] مدل انتقال حرارت غیرفوریه‌ای را برای یک جسم محدود تحت شار حرارتی، مورد استفاده قرار داد. وی برای حل از روش تبدیل انتگرال محدود استفاده کرد و دریافت در مواردی که زمان آسایش به سمت صفر میل کند، توزیع دمای به‌دست آمده از معادله انتقال حرارت هذلولوی با پاسخ دمایی به‌دست آمده از معادله کلاسیک فوریه یکسان خواهد بود. ژیان‌هو و همکاران [۱۲]، یک مدل موج حرارتی متقارن دوبعدی را برای انتقال حرارت منتقل شده توسط لیزر در بافت‌های بیولوژیکی آسیب دیده ارائه کردند. آن‌ها نشان دادند که اثرهای غیرفوریه‌ای، هنگامی که زمان آسایش مقدار بزرگی داشته باشد، از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. میدان دمای متقارن سه‌بعدی در انتقال حرارت غیرفوریه‌ای داخل یک کره توخالی با شرایط مرزی مستقل از زمان به‌صورت

[1] Hyperpolic Heat Conduction
[2] Relaxation Time

تحلیلی توسط موسایی [۱۳] بررسی شد و روش حل استفاده شده، روش استاندارد جداسازی متغیرها بوده است. احمدی-کیا و ریسمانیان [۱۴]، یک روش تحلیلی در حلّ انتقال حرارت هذلولوی در یک پره که تحت شرایط مرزی پریودیک قرار دارد را با روش تبدیل لاپلاس ارائه نمودند. نتایج به‌دست آمده از مدل انتقال حرارت هذلولوی، به‌خوبی رفتار موجی شکل غیرفوریه‌ای را در پره‌های کوچک تحت پدیده‌های سریع نشان می‌داد. بامداد و همکاران [۱۵]، اثرهای غیرفوریه‌ای را در سطوح گسترش‌یافته مطالعه کردند. نتایج آن‌ها نشان می‌داد که برای کلیّه پره ها در زمان‌های اولیّه، موقعیت نقطه ناپیوستگی وابسته به زمان، زمان آسایش و سطح مقطع پره است. سد و چا [۱۶]، هدایت یک‌بعدی متقارن برای نواحی داخلی و خارجی یک استوانه دایروی شکل را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس، مورد تحلیل قرار دادند. لام و فانگ [۱۷]، یک روش تحلیلی ارائه دادند که در آن با ترکیب روش‌های برهم‌نهی و تئوری ساختار یک حلّ برای انتقال حرارت غیرفوریه‌ای در یک ورقه مستطیلی با مرزهای عایق و تولید حرارت داخلی به‌دست آمد. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که دقّت حل آن ها، به تعداد جملات سری فوریه به‌دست آمده بستگی دارد. سعدالدّین و ترابی [۱۸]، توزیع دمای یک قطعه استوانه‌ای را که تحت عملیات اسپارک قرار گرفته است، به‌صورت تحلیلی به‌دست آوردند. آن‌ها برای به‌دست آوردن دمای استوانه، از مختصات استوانه‌ای و از روش جداسازی متغیرها استفاده کردند. مروری بر این مقاله‌ها نشان می‌دهد که مطالعه‌های گوناگونی در زمینه‌های مختلف انجام شده است.

بررسی انتقال حرارت در مواد گوناگون همواره مورد توجّه دانشمندان بوده است. هدایت حرارتی از جمله شاخه‌های علم انتقال حرارت است. یکی از مسائلی که دانشمندان با آن مواجه بودند، نحوه انتقال حرارت در مواد مرکّب بوده است. بنابراین نیاز به یک مدل که بتواند پیش‌بینی درستی از توزیع دما در جسم داشته باشد، کاملاً محسوس است. در هرکدام از کارهای انجام شده، جنبه‌های مختلف انتقال حرارت هدایتی غیرفوریه‌ای مورد مطالعه قرارگرفته است و نتایج به‌دست آمده کاملاً مفید هستند ؛ اما نیاز به تحلیل انتقال حرارت غیرفوریه‌ای در موادّ مرکب به وضوح مشاهده می‌شود. حل معادله انتقال حرارت را در سه گروه مختلف می‌توان دسته بندی کرد: تحلیلی، اختلاف محدود و المان محدود.

با توجه به دشواری‌های موجود در روش تحلیلی، برای حل معادلات انتقال حرارت غیرفوریه‌ای، پژوهشگران کمتر از این روش برای تعیین توزیع دما استفاده می‌کنند و بیشتر از روش‌های عددی استفاده می‌نمایند. در این تحقیق با توجه به دقت بالای حل تحلیلی نسبت به سایر روش‌ها برای حل معادله انتقال حرارت غیرفوریه‌ای و تعیین توزیع دمای متناسب با آن از روش تحلیلی جداسازی متغیرها، بسط توابع ویژه، قوانین بسل تعمیم‌یافته و قضیه اشتورم-لیویل برای استوانه‌ی توپر بلند ارتوتروپیک تحت شرط اولیه نامتقارن استفاده شده است؛ همچنین، معادله هدایت گرمایی حاکم، با روش تفاضل محدود نیز حل شده است تا نتایج حلّ تحلیلی با استفاده از آن اعتبار سنجی شود.

۲- هدایت گرمایی غیرفوریه‌ای

رابطه ساختاری شار گرمایی مدل کاتانو-ورنات به‌صورت رابطه (۱) بیان می‌شود.

$$q(x,t+\tau)=-k\nabla T(x,t) \qquad (۱)$$

در این رابطه q بردار شار گرمایی، k ضریب انتقال حرارت هدایتی و τ زمان آسایش است با بسط تیلور شار گرمایی حول زمان (t)، به‌صورت رابطه (۲) تبدیل خواهد شد.

$$q(x,t)+\tau\frac{\partial q(x,t)}{\partial t}=-k\nabla T(x,t) \qquad (۲)$$

اگر $\tau=0$ باشد؛ گرما با سرعت نامحدود منتشر می‌شود که با قانون فوریه منطبق است.

رابطه حاکم بر هدایت گرمایی با جایگزینی رابطه شار گرمایی (۲) در قانون بقای انرژی به‌صورت رابطه (۳) به‌دست می‌آید:

$$\nabla\cdot\left(k\nabla T+\tau\frac{\partial q}{\partial t}\right)+g=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۳)$$

در این رابطه، ρ چگالی، c ظرفیت گرمایی و g منبع گرمایی است.

۳- هدایت گرمایی در مواد مرکّب

معادله انتقال حرارت ناپایا غیرفوریه‌ای در لمینیت استوانه‌ای اورتوتروپیک به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود [۱۰]:

$$k_{22}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial T}{\partial r}\right]+[\mathrm{m}_1^2k_{11}+\mathrm{n}_1^2k_{22}]\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} +[\mathrm{n}_1^2k_{11}+\mathrm{m}_1^2k_{22}]\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} +2m_1n_1(k_{11}-k_{22})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial z} =\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+\rho c\tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (۴)$$

با توجه به این نکته که استوانه در نظر گرفته شده طویل است، بنابراین معادله (۴) را می‌توان به‌صورت رابطه (۵) بازنویسی کرد.

$$k_{22}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial T}{\partial r}\right]+[m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}]\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} =\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+\rho c\tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (۵)$$

۴- حلّ تحلیلی هدایت گرمایی غیر فوریه ای کاتانو

در این قسمت، یک حلّ تحلیلی برای معادله هدایت گرمایی غیرفوریه‌ای تحت شار گرمایی نامتقارن کاتانو برای شرایط مرزی مشخّص ارائه شده است. شرایط مرزی متقارن محوری برای یک استوانه توپر، به‌صورت روابط (۶) و (۷) در نظر گرفته شده است.

$$T(0,\varphi,t)=\mathrm{Finite} \quad (۶)$$

$$T(R,\varphi,t)=T_\infty \quad (۷)$$

که در آن، R شعاع استوانه توپر است؛ همچنین شرایط اولیه به‌صورت روابط (۸) و (۹) در نظر گرفته شده است:

$$T(r,\varphi,0)=P(r,\varphi)+T_\infty \quad (۸)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(r,\varphi,0)=0 \quad (۹)$$

با توجه به هندسه استوانه‌ی کامل، توزیع دما و گرادیان آن در جهت φ با دوره تناوب 2π فرض می‌شوند.

$$T(r,\varphi,t)=T(r,\varphi+2\pi,t) \quad (۱۰)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}T(r,\varphi,t)=\frac{\partial}{\partial\varphi}T(r,\varphi+2\pi,t) \quad (۱۱)$$

متغیّر جدید تغییر دمای θ به‌صورت زیر فرض می‌شود:

$$\frac{T-T_\infty}{T_0}=\theta \quad (۱۲)$$

در رابطه فوق T_0 پارامتر دمای اولیه است.

رابطه هدایت گرمایی (۵) برحسب θ با رابطه (۱۳) بیان می‌شود:

$$k_{22}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right]+[m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}]\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} = \rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}+\rho c\tau\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \quad (۱۳)$$

شرایط مرزی و شرایط اولیّه برحسب θ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\theta(0,\varphi,t)=\mathrm{Finite} \quad (۱۴)$$

$$\theta(R,\varphi,t)=0 \quad (۱۵)$$

$$\theta(r,\varphi,t)=\theta(r,\varphi+2\pi,t) \quad (۱۶)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\theta(r,\varphi,t)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\theta(r,\varphi+2\pi,t) \quad (۱۷)$$

$$\theta(r,\varphi,0)=P(r,\varphi) \quad (۱۸)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(r,\varphi,0)=0 \quad (۱۹)$$

با در نظر گرفتن متغیّرهای بی‌بعد زیر:

$$\bar{\mathrm{t}}=\frac{t}{\tau} \quad (۲۰)$$

$$\bar{\mathrm{r}}=\frac{r}{\mathrm{L}_0} \quad (۲۱)$$

$$\mathrm{L}_0=\sqrt{\frac{k_{22}\tau}{\rho c}} \quad (۲۲)$$

معادله هدایت گرمای غیرفوریه‌ای برحسب متغیرهای بی‌بعد به‌صورت رابطه (۲۳) است:

$$\frac{1}{\bar{\mathrm{r}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\mathrm{r}}}\left[\bar{\mathrm{r}}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{\mathrm{r}}}\right]+\left[\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right]\frac{1}{\bar{\mathrm{r}}^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} =\left(\frac{\partial\theta}{\partial\bar{\mathrm{t}}}+\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{\mathrm{t}}^2}\right) \quad (۲۳)$$

شرایط مرزی و شرایط اولیه برحسب متغیّرهای بی بعد به‌صورت روابط (۲۴-۲۹) است:

$$\theta(0,\varphi,\bar{\mathrm{t}})=\mathrm{finite} \quad (۲۴)$$

$$\theta(\bar{\mathrm{R}},\varphi,\bar{\mathrm{t}})=0 \quad (۲۵)$$

$$\theta(\bar{\mathrm{r}},\varphi,\bar{\mathrm{t}})=\theta(\bar{\mathrm{r}},\varphi+2\pi,\bar{\mathrm{t}}) \quad (۲۶)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\theta(\bar{\mathrm{r}},\varphi,\bar{\mathrm{t}})=\frac{\partial}{\partial\varphi}\theta(\bar{r},\varphi+2\pi,\bar{\mathrm{t}}) \quad (۲۷)$$

$$\theta(\bar{\mathrm{r}},\varphi,0)=P(\bar{\mathrm{r}},\varphi) \quad (۲۸)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\theta(\bar{\mathrm{r}},\varphi,0)=0 \quad (۲۹)$$

۴-۱- حل معادله به روش جداسازی متغیّرها

در اینجا، برای حل معادله (۲۳) از روش جداسازی متغیّرها استفاده می‌شود. فرم کلی توزیع دما به‌صورت رابطه (۳۰) در نظر گرفته می‌شود:

$$\theta(\bar{\mathrm{r}},\varphi,\bar{t})=\psi(\bar{\mathrm{r}},\varphi).w(\bar{\mathrm{t}}) \quad (۳۰)$$

با اعمال رابطه (۳۰) در معادله (۲۳)، معادله هدایت گرما به‌صورت رابطه (۳۱) تبدیل خواهد شد:

$$\frac{1}{\bar{\mathrm{r}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\mathrm{r}}}\left[\bar{\mathrm{r}}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathrm{r}}}w\right]+\left[\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right]\frac{1}{(\bar{\mathrm{r}})^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}w=\left(\frac{\partial w}{\partial\bar{\mathrm{t}}}\psi+\frac{\partial^2 w}{\partial(\bar{\mathrm{t}})^2}\psi\right) \quad (۳۱)$$

معادله (۳۱) برحسب ψ و w با رابطه (۳۲) قابل تفکیک است:

$$\frac{1}{\bar{\mathrm{r}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\mathrm{r}}}\left[\bar{\mathrm{r}}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathrm{r}}}\frac{1}{\psi}\right]+\left[\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right]\frac{1}{(\bar{\mathrm{r}})^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\frac{1}{\psi}\times\frac{1}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial\bar{\mathrm{t}}}+\frac{\partial^2 w}{\partial(\bar{\mathrm{t}})^2}\right)=-\lambda^2 \quad (۳۲)$$

باتوجه به شرایط مرزی همگن، باید ثابت λ به گونه‌ای انتخاب شود تا جواب به‌دست آمده به‌صورت هارمونیک باشد. مقدار λ منفی در نظر گرفته می‌شود؛ چرا که باید توزیع دما برحسب زمان دارای رفتار موجی شکل باشد. طرف راست معادله (۳۲) بصورت زیر است:

$$\frac{1}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial\bar{\mathrm{t}}}+\frac{\partial^2 w}{\partial(\partial\bar{\mathrm{t}})^2}\right)=-\lambda^2 \quad (۳۳)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial\bar{\mathrm{t}}}+\frac{\partial^2 w}{\partial(\bar{\mathrm{t}})^2}\right)+\lambda^2 w=0 \quad (۳۴)$$

حل معادله (۳۴) به‌صورت زیر است:

$$w(\bar{\mathrm{t}})=d_1\mathrm{e}^{\alpha\bar{t}} \quad (۳۵)$$

با قرار دادن رابطه (۳۵) در معادله (۳۴)،

$$\alpha_1,\alpha_2=\frac{-1}{2}\pm\mathrm{i}\sqrt{\lambda^2-\frac{1}{4}} \quad (۳۶)$$

$$w(\bar{\mathrm{t}})=H_1\mathrm{e}^{\alpha_1\bar{\mathrm{t}}}+H_2\mathrm{e}^{\alpha_1\bar{\mathrm{t}}} \quad (۳۷)$$

همچنین رابطه (۳۷) به‌صورت رابطه (۳۸) قابل بیان است:

$$w(\bar{\mathrm{t}})=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\bar{\mathrm{t}}}\left(H\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda^2-\frac{1}{4}}\cdot\bar{\mathrm{t}}\right)+S\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda^2-\frac{1}{4}}\cdot\bar{\mathrm{t}}\right)\right) \quad (۳۸)$$

طرف چپ معادله (۴۱) به‌صورت زیر است:

$$\frac{1}{\bar{\mathrm{r}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\mathrm{r}}}\left[\bar{\mathrm{r}}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathrm{r}}}\frac{1}{\psi}\right]+\left[\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right]\frac{1}{(\bar{\mathrm{r}})^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\frac{1}{\psi}=-\lambda^2 \quad (۳۹)$$

معادله (۳۹) را نیز می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{1}{\bar{\mathrm{r}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\mathrm{r}}}\left[\bar{\mathrm{r}}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathrm{r}}}\right]+\left[\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right]\frac{1}{(\bar{\mathrm{r}})^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}=-\lambda^2\psi \quad (۴۰)$$

با در نظر گرفتن فرم کلی زیر برای تابع $\psi(\bar{\mathrm{r}}\varphi)$ بصورت جداپذیر (۴۱) بیان می‌شود.

$$\psi(\bar{\mathrm{r}}.\varphi)=F(\bar{\mathrm{r}})\cdot G(\varphi) \quad (۴۱)$$

معادله (۴۰) به‌صورت زیر برحسب F و G قابل بیان است:

$$\frac{1}{\bar{\mathrm{r}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\mathrm{r}}}\left[\frac{\bar{\mathrm{r}}\partial F}{\partial\bar{\mathrm{r}}}G\right]+\left[\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right]\frac{1}{(\bar{\mathrm{r}})^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}F=-\lambda^2F\cdot G \quad (۴۲)$$

رابطه (۴۲) برحسب F و G با رابطه (۴۳) قابل جداسازی است:

$$(\bar{\mathrm{r}})^2\left(\frac{F''}{F}\right)+\bar{\mathrm{r}}\left(\frac{F'}{F}\right)+\lambda^2(\bar{\mathrm{r}})^2=-\left[\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right]\frac{G''}{G}=+\beta^2 \quad (۴۳)$$

رابطه (۴۳) را به‌صورت دو رابطه (۴۴-۴۵) می‌توان نوشت:

$$(\bar{\mathrm{r}})^2F''+\bar{\mathrm{r}}F'+(\lambda^2(\bar{\mathrm{r}})^2-\beta^2)F=0 \quad (۴۴)$$

$$-\left[\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right]\frac{G''}{G}=+\beta^2 \quad (۴۵)$$

با توجه به شرایط مرزی همگن، جواب مسأله در راستای φ باید هارمونیک باشد؛ بنابراین، مقدار β باید مثبت در نظر گرفته شود تا توزیع دما هارمونیک شود. با در نظر گرفتن:

$$\left[\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right]=\frac{1}{\gamma^2} \quad (۴۶)$$

و جایگذاری رابطه (۴۶) در معادله (۴۵):

$$G'' + (\gamma\beta)^2 G = 0 \tag{۴۷}$$

پس از حل، معادلات (۴۴) و (۴۷) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F = E \cdot J_\beta(\lambda\bar{\mathrm{r}}) + C \cdot Y_\beta(\lambda\bar{\mathrm{r}}) \tag{۴۸}$$

$$G = A \cdot \cos(\gamma\beta\varphi) + B \cdot \sin(\gamma\beta\varphi) \tag{۴۹}$$

که در این رابطه، ضرایب A، B ، C و E ثابت‌های مجهولی هستند که با اعمال شرایط مرزی و دیگر شرایط مسأله مشخص می‌شوند.

با توجّه به این‌که تک‌لایه استوانه‌ای از نظر هندسی حلقه‌ای کامل است، باید شرایط پیوستگی دما و شار گرمایی در ابتدا و انتهای حلقه برقرار باشد.

$$G(0) = G(2\pi), \tag{۵۰}$$

$$G'(0) = G'(2\pi) \tag{۵۱}$$

با اعمال رابطه (۴۹) در شرایط روابط (۵۰) و (۵۱)، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$A(\cos(\gamma\beta 2\pi) - 1) + B\sin(\gamma\beta 2\pi) = 0$$

$$A\sin(\gamma\beta 2\pi) + B(\cos(\gamma\beta 2\pi) - 1) = 0 \tag{۵۲}$$

شرط وجود جواب غیر صفر برای دستگاه معادلات همگن رابطه (۵۲)، به‌صورت زیر است:

$$(\cos(\gamma\beta 2\pi) - 1)^2 + \sin^2(\gamma\beta 2\pi) = 0 \tag{۵۳}$$

از حل معادله مثلثاتی (۵۳) مقادیر β به‌دست می‌آیند:

$$B_n = \frac{n}{\gamma} \rightarrow n = 0.1.2\ldots \tag{۵۴}$$

با جایگذاری رابطه (۵۴) در رابطه (۴۹) نتیجه (۵۵) حاصل می‌شود:

$$G_n = A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi) \rightarrow n = 0.1.2.\ldots \tag{۵۵}$$

با توجه به محدود بودن دما در مرکز استوانه، از معادله (۴۸) نتیجه می گیریم که:

$$C = 0 \tag{۵۶}$$

در این صورت، توزیع دما در راستای (r) به‌صورت زیر است:

$$F = E \cdot J_{\beta_n}(\lambda\bar{\mathrm{r}}) \tag{۵۷}$$

با توجه به شرط مرزی در شعاع بیرونی و اعمال آن در رابطه (۵۷) نتیجه (۵۸) حاصل می‌شود:

$$J_{\beta_n}(\lambda_{n,m}\bar{\mathrm{R}}) = 0 \tag{۵۸}$$

از ریشه‌های معادله فوق مقادیر $\lambda_{n,m}$ حاصل می‌شود. لازم به ذکر است، برای بدست آوردن این ریشه‌ها از نرم افزار متلب استفاده شده است.

اکنون شرایط اولیّه مسأله اعمال می شود. با توجه به رابطه (۲۹) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\bar{t}}(\bar{\mathrm{r}},\varphi,0) = 0 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial\bar{t}}.F.G = 0 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial\bar{\mathrm{t}}} = 0 \tag{۵۹}$$

با اعمال رابطه (۵۹) در رابطه (۳۸):

$$H = 2S\sqrt{\lambda_{n,m}^2 - \frac{1}{4}} \tag{۶۰}$$

با جایگذاری رابطه (۶۰) در رابطه (۳۸)، نتیجه (۶۱) حاصل می‌شود:

$$w(\bar{\mathrm{t}}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\bar{\mathrm{t}}}\left(2S\sqrt{\lambda_{n,m}^2 - \frac{1}{4}}\cos\left(\sqrt{\lambda_{n,m}^2 - \frac{1}{4}}\cdot\bar{\mathrm{t}}\right) + \sin\left(\sqrt{\lambda_{n,m}^2 - \frac{1}{4}}\cdot\bar{\mathrm{t}}\right)\right) \tag{۶۱}$$

با توجه به روابط (۳۰)، (۴۱)، (۵۵)، (۵۷) و (۶۱) توزیع دما به‌صورت رابطه (۶۲) خواهد بود:

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\bar{\mathrm{t}}}[2\sqrt{\lambda_{n,m}^2 - \frac{1}{4}}.\cos(\sqrt{\lambda_{n,m}^2 - \frac{1}{4}}.\bar{\mathrm{t}}) + \sin(\sqrt{\lambda_{n,m}^2 - \frac{1}{4}}.\bar{\mathrm{t}})] \times (j_{\beta_n}(\lambda_{n,m}.\bar{\mathrm{r}})) \times [U_{n,m}\cos(n\varphi) + V_{n,m}\sin(n\varphi)] \tag{۶۲}$$

با اعمال رابطه (۲۸) در رابطه (۶۲):

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[2\sqrt{\lambda_{n,m}^2 - \frac{1}{4}}] \times (J_{\beta_n}(\lambda_{n,m}.\bar{\mathrm{r}})) \times [U_{n,m}\cos(n\varphi) + V_{n,m}\sin(n\varphi)] = P(\bar{\mathrm{r}},\varphi) \tag{۶۳}$$

که با در نظر گرفتن:

$$G_n=\sum_{n=0}^{\infty}2\sqrt{\lambda_{n,m}^2-\frac{1}{4}}\times(U_{n,m}\cos(n\varphi)+V_{n,m}\sin(n\varphi)) \qquad (۶۴)$$

و با جایگذاری رابطه (۶۴) در رابطه (۶۳) به‌صورت (۶۵) می‌توان بیان کرد:

$$\theta=\sum_{m=1}^{\infty}G_n\cdot\left[J_{\beta_n}\left(\lambda_{n,m}\cdot\bar{\mathrm{r}}\right)\right]=P(\bar{\mathrm{r}},\varphi) \qquad (۶۵)$$

با توجه به تعامد بسل [۱۹] و اعمال آن در رابطه (۶۵) می‌توان نوشت:

$$\int_0^{\bar{\mathrm{R}}}\bar{\mathrm{r}}\cdot G_n\cdot\left(J^2{}_{\beta_n}\left(\lambda_{n,m}\cdot\bar{\mathrm{r}}\right)\right)d\bar{\mathrm{r}}=\int_0^{\bar{\mathrm{R}}}\bar{\mathrm{r}}\cdot P(\bar{\mathrm{r}},\varphi)\cdot\left(J_{\beta_n}\left(\lambda_{n,m}\cdot\bar{\mathrm{r}}\right)\right)d\bar{\mathrm{r}} \qquad (۶۶)$$

با توجه به رابطه (۶۶) می‌توان نوشت:

$$G_n=\frac{\int_0^{\bar{\mathrm{R}}}\bar{\mathrm{r}}\cdot P(\bar{\mathrm{r}},\varphi)\cdot\left(J_{\beta_n}\left(\lambda_{n,m}\cdot\bar{\mathrm{r}}\right)\right)d\bar{\mathrm{r}}}{\int_0^{\bar{\mathrm{R}}}\bar{\mathrm{r}}\left(J^2{}_{\beta_n}\left(\lambda_{n,m}\cdot\bar{\mathrm{r}}\right)\right)d\bar{\mathrm{r}}} \qquad (۶۷)$$

حال با توجّه معلوم بودن مقدار G_n، رابطه (۶۶) را به‌صورت رابطه (۶۸) می‌توان بیان کرد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(U_{n,m}\cos(n\varphi)+V_{n,m}\sin(n\varphi)\right)=\frac{G_n}{2\sqrt{\lambda_{n,m}^2-\frac{1}{4}}} \qquad (۶۸)$$

با استفاده از بسط فوریه، مجهول‌های $U_{n,m}$ و $V_{n,m}$ به‌دست می‌آید:

$$U_{0m}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{G_n(\varphi)}{2\sqrt{\lambda_{n,m}^2-\frac{1}{4}}}d\varphi \qquad (۶۹)$$

$$V_{0m}=0 \qquad (۷۰)$$

$$U_{nm}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{G_n(\varphi)}{2\sqrt{\lambda_{n,m}^2-\frac{1}{4}}}\cos(n\varphi)d\varphi \qquad (۷۱)$$

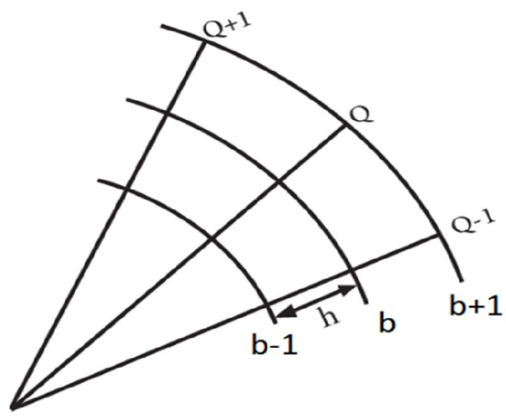
$$V_{nm}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{G_n(\varphi)}{2\sqrt{\lambda_{n,m}^2-\frac{1}{4}}}\sin(n\varphi)\,d\varphi \qquad (۷۲)$$

بعد از محاسبه ثابت‌های مجهول، روابط (۶۹) تا (۷۲) و جایگذاری در رابطه (۶۲)، رابطه توزیع دما حاصل خواهد شد.

۵- روش تفاضل محدود

روش تفاضل محدود یکی از روش‌های عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل است. در این روش، مشتق توابع با تفاضلات معادل آن‌ها تقریب زده می‌شود. اساس این روش برای حلّ معادلات، استفاده از تقریب تابع با روش بسط تیلور است.

چون معادلات روی دیسک به شعاع $\bar{\mathrm{r}}$ و زاویه φ تعریف شده است؛ استوانه در راستای شعاعی و محیطی به المان‌های کوچک تقسیم شده‌اند که در شکل ۱ قابل مشاهده است.



شکل ۱- المان بندی در جهت شعاعی و محیطی[۲۰]

دمای یک نقطه دلخواه روی دیسک، $\theta_{\mathrm{b},Q}$ در نظر گرفته شده است؛ هدف به‌دست آوردن $\theta_{b,Q}$ روی تمام نقاط دیسک است؛ اگر شعاع به N قسمت و محیط استوانه به a قسمت تقسیم شود، گام مکانی در راستای شعاع و محیط استوانه را به صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

$$\Delta\bar{\mathrm{r}}=\frac{\bar{\mathrm{r}}}{N} \qquad (۷۳)$$

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{a} \qquad (۷۴)$$

برای مشتق‌های برحسب شعاع از روش تفاضل مرکزی مرتبه ۲ استفاده شده است که به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۲۰]:

$$\frac{1}{\bar{\mathrm{r}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\mathrm{r}}}\left[\bar{\mathrm{r}}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{\mathrm{r}}}\right]=\frac{1}{\bar{\mathrm{r}}_b}\frac{1}{\Delta\bar{\mathrm{r}}}\left(\bar{\mathrm{r}}_{b+\frac{1}{2}}\times\frac{\theta_{b+1,Q}-\theta_{b,Q}}{\Delta\bar{\mathrm{r}}}-\bar{\mathrm{r}}_{b-\frac{1}{2}}\times\frac{\theta_{b,Q}-\theta_{b-1,Q}}{\Delta\bar{\mathrm{r}}}\right) \qquad (۷۵)$$

که در آن،

$$\bar{r}_b = b\Delta\bar{r} \tag{۷۶}$$

$$\bar{r}_{b+\frac{1}{2}} = b\Delta\bar{r} + \frac{\Delta\bar{r}}{2} \tag{۷۷}$$

$$\bar{r}_{b-\frac{1}{2}} = b\Delta\bar{r} - \frac{\Delta\bar{r}}{2} \tag{۷۸}$$

با جایگذاری روابط (۷۶) تا (۷۸) در رابطه (۷۵)، رابطه (۷۹) حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left[\bar{r}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{r}}\right] = \frac{1}{b\Delta\bar{r}^2}[\left(b+\frac{1}{2}\right)\theta_{b+1,Q} -2b\theta_{b,Q} + \left(b-\frac{1}{2}\right)\theta_{b-1,Q}] \tag{۷۹}$$

عبارت‌های دیگر معادله هدایت گرمایی به‌صورت زیر با روش تفاضل مرکزی مرتبه ۲ تقریب زده می‌شوند[۲۰]:

$$\frac{1}{(\bar{r})^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{b^2\Delta\bar{r}^2}\left[\frac{\theta_{b,Q+1} - 2b\theta_{b,Q} + \theta_{b,Q-1}}{\Delta\varphi^2}\right] \tag{۸۰}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\bar{t}} = \frac{\theta_{b,Q}^{n+1} - \theta_{b,Q}^{n-1}}{2\Delta\bar{t}} \tag{۸۱}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{t}^2} = \frac{\theta_{b,Q}^{n+1} - 2b\theta_{b,Q}^{n} + \theta_{b,Q}^{n-1}}{\Delta\bar{t}^2} \tag{۸۲}$$

با قرار دادن روابط (۷۹) تا (۸۲) در رابطه (۲۳)، فرم تفاضل محدود معادله هدایت گرمایی با رابطه (۸۳) به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{b\Delta\bar{r}^2}[\left(b+\frac{1}{2}\right)\theta_{b+1,Q}^{n} - 2b\theta_{b,Q}^{n} + \left(b-\frac{1}{2}\right)\theta_{b-1,Q}^{n}] + \left(\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right) \times \frac{1}{b^2\Delta\bar{r}^2}\left(\frac{\theta_{b,Q+1}^{n} - 2b\theta_{b,Q}^{n} + \theta_{b,Q-1}^{n}}{\Delta\varphi^2}\right) = \frac{\theta_{b,Q}^{n+1} - \theta_{b,Q}^{n-1}}{2\Delta\bar{t}} + \frac{\theta_{b,Q}^{n+1} - 2b\theta_{b,Q}^{n} + \theta_{b,Q}^{n-1}}{\Delta\bar{t}^2} \tag{۸۳}$$

با ضرب طرفین رابطه (۸۳) در $\Delta\bar{t}^2$ و با کمی ساده‌سازی، معادله حاکم بر دما به‌صورت رابطه (۸۴) بیان می‌شود:

$$\theta_{b,Q}^{n+1}\left(1+\frac{\Delta\bar{t}}{2}\right) + \theta_{b,Q}^{n-1}\left(1-\frac{\Delta\bar{t}}{2}\right) = \frac{\Delta\bar{t}^2}{b\Delta\bar{r}^2} \times \left[\left(b+\frac{1}{2}\right)\theta_{b+1,Q}^{n} - 2b\theta_{b,Q}^{n} + \left(b-\frac{1}{2}\right)\theta_{b-1,Q}^{n}\right] + \frac{\Delta\bar{t}^2}{b^2\Delta\bar{r}^2}[\left(\frac{\theta_{b,Q+1}^{n} - 2b\theta_{b,Q}^{n} + \theta_{b,Q-1}^{n}}{\Delta\varphi^2}\right) \times \left(\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right)] \tag{۸۴}$$

با معلوم بودن ($\theta_{b,Q}$) در زمان n و $n-1$ می‌توان مقدار ($\theta_{b,Q}^{n+1}$) را با استفاده از رابطه (۸۴) محاسبه کرد.

۵-۱- اعمال شرایط اولیه

در اینجا، $n=0$ برای زمان اولیه در نظر گرفته می‌شود. با توجّه به شرط اولیّه رابطه (۲۸) می‌توان بیان کرد:

$$\theta_{b,Q}^{0} = P\left(\bar{r}_b, \varphi_Q\right) \tag{۸۵}$$

با توجّه به شرط اولیّه رابطه (۳۸) می‌توان بیان کرد:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\bar{t}} = \frac{\theta^{n+1} - \theta^{n-1}}{2\Delta\bar{t}} = 0 \rightarrow$$

$$\theta^{n+1} = \theta^{n-1} \xrightarrow{n=0} \theta^1 = \theta^{-1} \tag{۸۶}$$

رابطه (۸۴) برای $n=0$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\theta_{b,Q}^{1}\left(1+\frac{\Delta\bar{t}}{2}\right) + \theta_{b,Q}^{-1}\left(1-\frac{\Delta\bar{t}}{2}\right) = \frac{\Delta\bar{t}^2}{b\Delta\bar{r}^2} \times \left(\left(b+\frac{1}{2}\right)\theta_{b+1,Q}^{0} - 2b\theta_{b,Q}^{0} + \left(b-\frac{1}{2}\right)\theta_{b-1,Q}^{0}\right) + [\frac{\Delta\bar{t}^2}{b^2\Delta\bar{r}^2}\left(\frac{\theta_{b,Q+1}^{0} - 2b\theta_{b,Q}^{0} + \theta_{b,Q-1}^{0}}{\Delta\varphi^2}\right)\left(\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right)] \tag{۸۷}$$

با قرار دادن $\theta^1 = \theta^{-1}$ در رابطه (۸۷) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\theta_{b,Q}^{1}\left(1+\frac{\Delta\bar{t}}{2}\right) + \theta_{b,Q}^{-1}\left(1-\frac{\Delta\bar{t}}{2}\right) = 2\theta_{b,Q}^{1} \tag{۸۸}$$

بنابراین، دما در $n=1$ به‌صورت زیر برحسب شرایط مرزی به‌دست می‌آید:

$$\theta_{b,Q}^{1} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\bar{t}^2}{b\Delta\bar{r}^2} \times \left(\left(b+\frac{1}{2}\right)\theta_{b+1,Q}^{0} - 2b\theta_{b,Q}^{0} + \left(b-\frac{1}{2}\right)\theta_{b-1,Q}^{0}\right) + [\frac{\Delta\bar{t}^2}{b^2\Delta\bar{r}^2}\left(\frac{\theta_{b,Q+1}^{0} - 2b\theta_{b,Q}^{0} + \theta_{b,Q-1}^{0}}{\Delta\varphi^2}\right)\left(\frac{m_1^2k_{11}+n_1^2k_{22}}{k_{22}}\right)] \tag{۸۹}$$

با دانستن $\theta_{b,Q}^{1}$ می‌توان با استفاده از رابطه (۸۴)، $\theta_{b,Q}^{n}$ را در زمان‌های بعدی ... $n = 2,3,$ به‌دست آورد.

۵-۲- اعمال شرایط مرزی

اعمال شرط مرزی در سطح بیرونی دیسک:

$$\theta_{r_O,Q}^{n} = 0 \tag{۹۰}$$

اعمال شرایط مرزی در مرکز استوانه کمی دشوار است. به این دلیل که در $\bar{r}=0$، عبارت ($\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left[\bar{r}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{r}}\right]$) به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. می‌توان برای حل این مشکل از روش زیر استفاده کرد[۲۰]. یک المان دایره‌ای به شعاع $\frac{\Delta\bar{r}}{2}$ انتخاب و معادله (۲۳) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\iint \frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left[\bar{r}\,\frac{\partial\theta}{\partial\bar{r}}\right]\right) + \left[\frac{m_1^2 k_{11}+n_1^2 k_{22}}{k_{22}}\right]\frac{1}{(\bar{r})^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}\bar{r}d\bar{r}d\varphi = \iint \frac{\partial\theta}{\partial\bar{t}}+\frac{\partial^2\theta}{\partial(\bar{t})^2}\bar{r}d\bar{r}d\varphi \tag{۹۱}$$

سمت چپ معادله (۹۱) به‌صورت (۹۲) در نظر گرفته می‌شود:

$$\iint \frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left[\bar{r}\,\frac{\partial\theta}{\partial\bar{r}}\right]\right) + \left(\frac{m_1^2 k_{11}+n_1^2 k_{22}}{k_{22}}\right)\frac{1}{(\bar{r})^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}\bar{r}d\bar{r}d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{r}}\frac{\Delta\bar{r}}{2}d\varphi = \sum_{Q=1}^{a}\frac{\theta_{1Q}^n-\theta_0^n}{\Delta\bar{r}}\Delta\bar{r}\Delta\varphi \tag{۹۲}$$

سمت راست معادله (۹۱) به‌صورت (۹۳) در نظر گرفته می‌شود:

$$\iint \frac{\partial\theta}{\partial\bar{t}}+\frac{\partial^2\theta}{\partial(\bar{t})^2}\bar{r}\cdot d\bar{r}\cdot d\varphi = \left[\frac{\partial\theta}{\partial\bar{t}}+\frac{\partial^2\theta}{\partial(\bar{t})^2}\right]_{\bar{r}=0}\cdot\left(\frac{\Delta\bar{r}}{2}\right)^2\pi = \left[\frac{\theta_{b,Q}^{n+1}-\theta_{b,Q}^{n-1}}{2\Delta\bar{t}}+\frac{\theta_{b,Q}^{n+1}-2b\theta_{b,Q}^{n}+\theta_{b,Q}^{n-1}}{\Delta\bar{t}^2}\right]\left(\frac{\Delta\bar{r}}{2}\right)^2\pi \tag{۹۳}$$

با قرار دادن روابط (۹۲) و (۹۳) در رابطه (۹۱) و ضرب طرفین رابطه به‌دست آمده در $\Delta\bar{t}^2$، دما در مرکز استوانه برابر خواهد شد با:

$$\theta_0^{n+1}\left(1+\frac{\Delta\bar{t}}{2}\right)+\theta_0^{n-1}\left(1-\frac{\Delta\bar{t}}{2}\right) = 2\theta_0^n+\left(\frac{2}{\Delta\bar{r}}\right)^2\cdot\frac{\Delta\varphi}{\pi}\sum_{Q=1}^{a}\left(\theta_{1,Q}^n-\theta_0^n\right) \tag{۹۴}$$

۶- نتایج

در این بخش یک استوانه بلند و توپر از مواد ارتوتروپیک در نظر گرفته می‌شود. ماده مرکب شامل، ۲۵ درصد اپوکسی با ۷۵ درصد الیاف گرافیت (کولار/اپوکسی) است[۲۲]. خواص ماده مرکب مورد نظر در جدول ۱ بیان شده است.

جدول ۱- خواص مادّه مرکّب کولار/ اپوکسی [۲۱-۲۲]

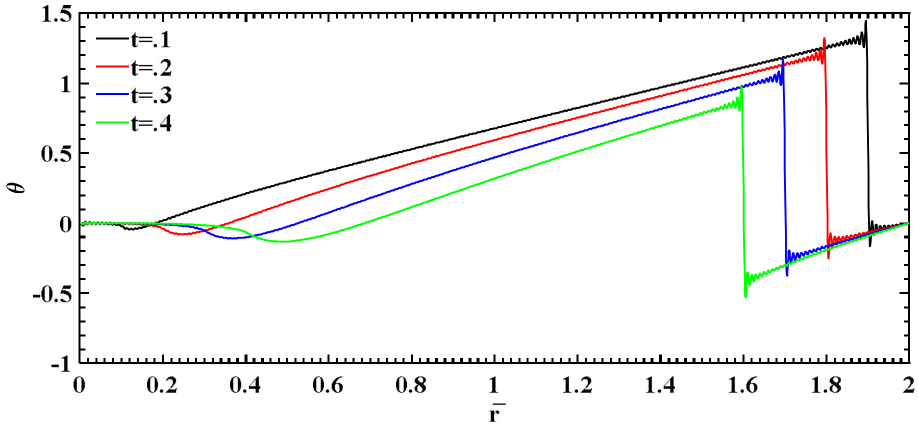
پارامترها	مقدار
k در جهت موازی الیاف (w/m.k)	۱۱/۱
k در جهت عمود بر الیاف (w/m.k)	۰/۸۷
درصد حجمی الیاف	۷۵

در این مسأله شعاع بی‌بعد استوانه ($\bar{R}$)، برابر با ۲ قرار داده شده است؛ همچنین زاویه قرارگیری الیاف، ۳۰ درجه و دمای محیط، (K) ۳۰۰ در نظر گرفته شده است. شرایط اولیه به‌صورت رابطه (۹۵) در نظر گرفته شده است:

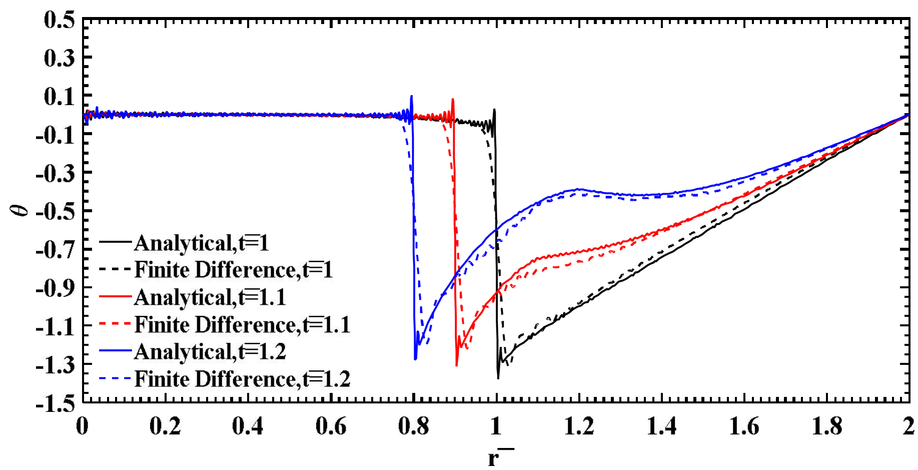
$$P(\bar{r},\varphi)=\bar{r}\cdot\sin(\varphi)\cdot T_0 \tag{۹۵}$$

در شکل ۲ نمودار دما برحسب شعاع برای تک لایه کامپوزیتی در زاویه ۴۵ درجه و زمان‌های ابتدایی رسم شده است. خطی بودن شرط اولیّه نسبت به شعاع در شکل ۲ در زمان‌های اولیّه قابل مشاهده است؛ همچنین موج گرما از لایه بیرونی به سمت مرکز استوانه و موجی دیگر از مرکز استوانه به سمت لایه بیرونی با سرعت واحد در فضای بی‌بعد حرکت می‌کند.

در شکل ۳ نمودار دما برحسب شعاع برای مدل هدایت غیرفوریه‌ای در زمان‌های مختلف و زاویه ۴۵ درجه، برای حل تحلیلی و عددی، با در نظر گرفتن ۴۰۰ جمله اول رابطه (۶۲) رسم شده است. ازآنجایی‌که برای به‌دست آوردن حل تحلیلی از یکسری توابع پیوسته استفاده شده و از طرفی توزیع دما شامل ناپیوستگی محدود در محل پیشانی موج است؛ با این‌که تعداد جملات قابل توجّه ای از سری درنظر گرفته شده است، نوساناتی در توزیع دما نزدیکی محل ناپیوستگی دیده می‌شود. در حلّ عددی نیز، ناپیوستگی محدود دما به‌طور دقیق مدل نمی‌شود، به‌طوری‌که تغییر دما،



شکل ۲- نمودار دما برحسب شعاع در زاویه ۴۵ درجه و زمان‌های اولیه



شکل ۳- توزیع دما برحسب شعاع در زمان‌های مختلف و زاویه ۴۵ درجه

در بازه کوچکی از مکان به‌جای ناپیوستگی محدود اتفاق می‌افتد. همان‌طور که مشاهده می‌شود؛ نتایج حل تحلیلی و عددی به یکدیگر نزدیک است.

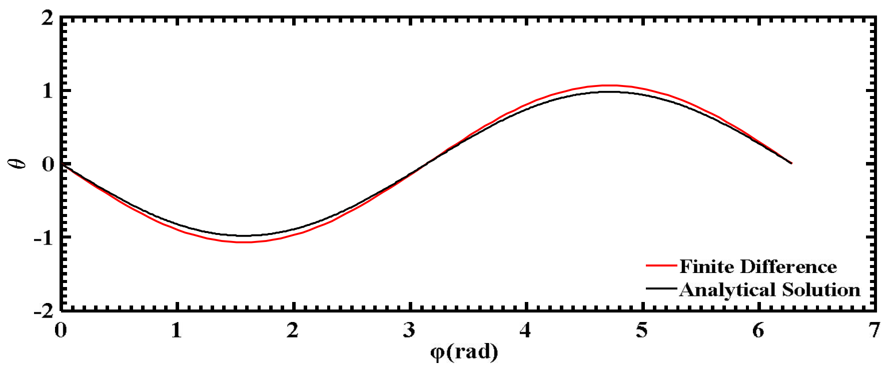
سرعت محدود موج گرما نیز به‌خوبی مشهود است. موج گرما، از سمت لایه بیرونی به سمت مرکز استوانه درحرکت است؛ همچنین، موج دیگری از سمت مرکز استوانه به سمت لایه بیرونی درحرکت است که تداخل این دو موج، باعث افزایش دما قبل از پیشانی موج بیرونی می‌شود. این افزایش دمای حاصل از تداخل دو موج در نمودار مربوط به زمان $\bar{t}$=۱/۱ و $\bar{t}$=۱/۲ مشخص شده است.

در شکل۴ نمودار دما در امتداد محیط استوانه در زمان $\bar{t} = 1$، و در شعاع میانی $\bar{r} = 1$ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود؛ دما در راستای محیطی استوانه دارای رفتار سینوسی است؛ چون تابع انتخابی در زمان اولیّه تابعی از $\sin(\varphi)$ است. دما در راستای محیطی رفتار موجی شکل ندارد؛ زیرا در شرط اولیه دما در این راستا ناپیوستگی وجود ندارد؛ همچنین مشاهده می‌شود که نمودار حل عددی نسبت به حلّ تحلیلی از دقت خوبی برخوردار است.

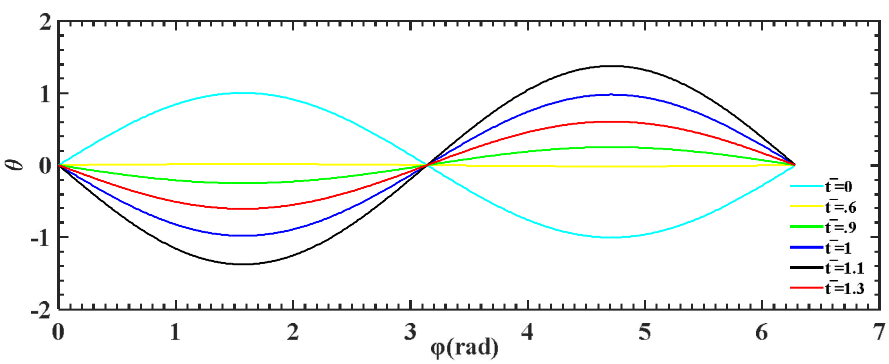
در شکل ۵ نمودار دما در امتداد محیط استوانه در زمان‌های مختلف رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در زمان‌های ابتدایی دما به خاطر اعمال شرط اولیّه و حرکت موج از مرکز استوانه به سمت لایه بیرونی، تغییر می‌کند؛ حرکت موج گرمایی داخلی، از زمان ابتدایی تا زمان رسیدن پیشانی موج گرمایی که از لایه بیرونی به سمت مرکز استوانه

درحرکت است، گرادیان دمای ناشی از اعمال شرط اولیه را مستهلک می‌کند و توزیع دما به سمت صفر میل می‌کند. با رسیدن پیشانی موج گرمای خارجی، در زمان ۱، گرادیان دما، بین نقاط مختلف افزایش پیدا می‌کند و با برگشت موج، گرادیان دما، باگذشت زمان مستهلک می‌شود و مجدداً کاهش پیدا می‌کند.

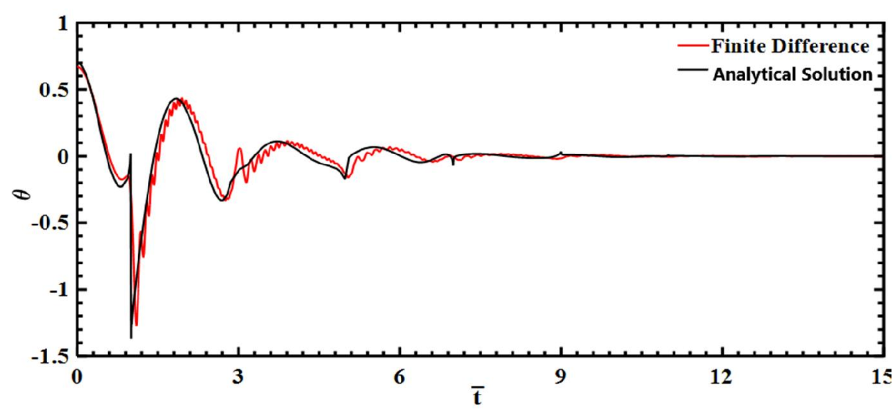
در شکل ۶ نمودار دما برحسب زمان در شعاع میانی $\bar{r}=1$ و در زاویه ۴۵ درجه رسم شده است. همان‌طور که مشاهده



شکل ۴- توزیع دما در راستای محیطی محیط در $\bar{r}=1$ و $\bar{t}=1$



شکل ۵- توزیع دما در راستای محیطی استوانه در $\bar{r}=1$



شکل ۶- توزیع دما برحسب زمان در $\bar{r}=1$ و $\varphi=45$

می‌شود؛ باگذشت زمان دما به سمت صفر همگرا می‌شود؛ چون در لحظه‌های اول شرایط اولیه باعث تغییر دما بوده است؛ بایستی با گذشت زمان رفتار دما به شکل پایا تبدیل شود. در ابتدا دما تا مقدار ۰/۷ افزایش یافته است و درنهایت تا مقدار پایا کاهش می‌یابد، این کاهش دما در حالت فوریه‌ای به‌صورت تدریجی و همیشه میزان دما بین صفر تا ۰/۷ است؛ اما در حالت غیرفوریه‌ای به‌صورت نوسانی و حتی ممکن است از این بازه خارج شود. به‌خاطر نوسانی بودن شرط اولیه، قبل از رسیدن توزیع دما به حالت پایا، توزیع به توزیع دمای فوریه همگرا نمی‌شود؛ همچنین مشاهده می‌شود، حل عددی نسبت به حل تحلیلی از دقت خوبی برخوردار است.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک حل تحلیلی برای هدایت گرمایی غیرفوریه‌ای تحت شار گرمایی نامتقارن برای استوانه توپر و بلند ارتوتروپیک تک‌لایه کامپوزیتی ارائه شـده است. نتایج حلّ تحلیلی با حلّ عددی حاصل از روش تفاضل محدود مقایسه شده است؛ که نتایج حاصل از دو روش به هم نزدیک می‌باشند. نتایج برای حالتی که استوانه در جداره خارجی تحت دمای معلوم و در زمان اولیّه، تحت دمایی به صورت تابعی از شعاع و محیط استوانه قرار داشته باشد، مورد بررسی قرار گرفته است. موج گرما از لایه بیرونی به سمت مرکز استوانه و هم‌زمان موجی دیگر از مرکز استوانه به سمت خارج استوانه حرکت می‌کند. باگذشت زمان، این دو موج گرما در یک نقطه به یکدیگر می‌رسند و تداخل این دو موج با یکدیگر باعث افزایش دما قبل از پیشانی موج خارجی می‌گردد. ازآنجایی‌که برای به‌دست آوردن حلّ تحلیلی از یکسری توابع پیوسته استفاده شده و از طرفی توزیع دما شامل ناپیوستگی محدود در محل پیشانی موج می‌باشد؛ با این‌که تعداد جمله‌های قابل توجّه ای از سری درنظر گرفته شده است نوساناتی در توزیع دما نزدیکی محل ناپیوستگی دیده می‌شود. در حل عددی، ناپیوستگی محدود دما به‌طور دقیق مدل نمی‌شود، به‌طوری‌که تغییر دما، در بازه‌ی کوچکی از مکان به‌جای ناپیوستگی محدود اتفاق می‌افتد؛ اما به‌طور کلّی نتایج حل تحلیلی و عددی به یکدیگر نزدیک است.

بررسی هدایت گرمایی در راستای محیط استوانه، بیانگر این است که رفتار دما برحسب محیط استوانه تابعی از شرایط مسأله است. دما در راستای محیطی رفتار موجی شکل ندارد؛ زیرا در شرط اولیه دما در این راستا ناپیوستگی وجود ندارد و فقط در راستای شعاعی موج گرما مشاهده می‌شود. این حالت در زاویه‌ی الیاف مختلف بررسی شده است؛ در زاویه‌ی الیاف ۹۰ درجه ضریب هدایت گرمایی در جهت شعاع و محیط استوانه یکسان می‌باشد و توزیع دمای مشابه توزیع دما در یک ماده ایزوتروپیک است. برای مواد اورتوتروپیک، در جهت الیاف دارای بیش‌ترین ضریب هدایت گرمایی است و هر چقدر زاویه‌ی الیاف به سمت صفر درجه میل می‌کند؛ میزان هدایت گرما نیز افزایش می‌یابد. همچنین، در بررسی هدایت گرمایی در راستای محیطی در زمان‌های مختلف بیانگر این است که در زمان‌های ابتدایی دما، به‌خاطر اعمال شرط اولیّه وحرکت موج از مرکز استوانه به سمت لایه بیرونی، تغییر می‌کند. موج گرمایی که از مرکز استوانه حرکت می‌کند؛ گرادیان دمای ناشی از اعمال شرط اولیه را مستهلک می‌کند؛ اما با رسیدن پیشانی موج گرمای خارجی، گرادیان دما در این نقاط افزایش پیدا می‌کند. هرچند با برگشت موج، گرادیان دما با گذشت زمان مستهلک می‌شود، همچنین در زمان‌های ابتدایی خطی بودن شرط اولیّه نسبت به شعاع قابل مشاهده است. تغییرات دما برحسب زمان در حالت غیرفوریه‌ای به‌صورت نوسانی است و ممکن است، به توزیع دمای فوریه‌ای قبل از حالت پایا همگرا نشود.

۸- فهرست علائم

A,B,C,E	ثابت‌های تابع شعاع و تابع محیط استوانه
c	ظرفیت گرمایی (*j/kg.k*)
F	تابع شعاع
G	تابع محیط استوانه (زاویه)
g	منبع گرمایی
H,S	ثابت‌های تابع زمان
j,y	توابع بسل نوع اول و دوم
k_{ij}	ضرایب هدایت گرمایی اصلی (*w/m.k*)
P	تابع دما در زمان اولیه

شعاع استوانه	R
شعاع بی‌بعد استوانه	$\bar{R}$
شار گرمایی (W)	q
تابع زمان	w
دما (K)	T
زمان (s)	$t,$
دمای محیط	T_∞
پارامتر دمای اولیه (K)	T_0
محورهای مختصات قطبی	r, φ, z
شعاع بی‌بعد	$\bar{r}$
زمان بی‌بعد	$\bar{t}$
دما (بی‌بعد)	θ
چگالی (kgm^{-3})	ρ
زمان آسایش (s)	τ

۹- مراجع

[1] Vernotte P (1958) Les paradoxes de la théorie continue de léquation de la chaleur. C R Acad Sci 246(22): 3154-3155.

[2] Cattaneo C (1958) A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation. C R Acad Sci 247(4) : 431-433.

[3] Ozisik MN, Tzou DY (1994) On the wave theory in heat conduction. J Heat Transf 116(3): 526-535.

[4] Lewandowska M, Malinowski L (2006) An analytical solution of the hyperbolic heat conduction equation for the case of a finite medium symmetrically heated on both sides. Int Commun Heat Mass 33(1): 61-69.

[5] Moosaie A (2007) Non-Fourier heat conduction in a finite medium with arbitrary source term and initial conditions. Forschung Ingenieurwesen 71(3-4): 163-169.

[6] Moosaie A (2008) Non-Fourier heat conduction in a finite medium with insulated boundaries and arbitrary initial conditions. Int Commun Heat Mass 35(1): 103-111.

[7] Tang D, Araki N (1996) Non-fourier heat conduction in a finite medium under periodic surface thermal disturbance. Int J Heat Mass Trans 39(8): 1585-1590.

[8] Zhang D, Li L, Li Z, Guan L, Tan X (2005) Non-fourier conduction model with thermal source term of ultra short high power pulsed laser ablation and temperature evolvement before melting. Physica B 364(1-4): 285-293.

[9] Jiang F (2006) Solution and analysis of hyperbolic heat propagation in hollow spherical objects. Heat Mass Trans 42(12): 1083-1091.

[10] Daneshjou K, Bakhtiari M, Parsania H, Fakoor M, (2016) Non-Fourier heat conduction analysis of infinite 2D orthotropic FG hollow cylinders subjected to time-dependent heatsource. Appl Therm Eng 98(1): 582-590.

[11] Abdel-Hamid B (1999) Modeling non-fourier heat conduction with periodic thermal oscillation using the infinite integral transform. Appl Math Modelg 23(12): 899-914.

[12] Zhou J, Zhang Y, Chen JK (2008) Non-fourier heat conduction effect on laser-induced thermal damage in biological tissues. Numer Heat Tr A-Appl 54(1): 1-19.

[13] Moosaie A (2009) Axisymetric non-fourier temperature field in a hollow sphere. Arch Appl Mech 79(8): 679-694.

[14] Ahmadikia H, Rismanian M (2011) Analytical solution of non-Fourier heat conduction problem on a fin under periodic boundary conditions. J Mech Sci Technol 25(11): 2919-2926.

[15] Bamdad K, Azimi A, Ahmadikia H (2012) Thermal performance analysis of arbitrary-profile fins with non-fourier heat conduction behavior. J Eng Math 76(1): 181-193.

[16] Sadd NH, Cha CY (1982) Axisymmetric non-Fourier temperatures in cylindrically bounded domains. Int J Nonlin Mech 17(3): 129-136.

[17] Lam TT, Fong E (2011) Application of solution structure theorem to non-fourier heat conduction problems: Analytical approach. Int J Heat Mass Trans 54(23): 4796-4806.

[18] Torabi M, Saedodin S (2011) Analytical and numerical solutions of hyperbolic heat conduction in cylindrical coordinates. J Thermophys Heat Tr 25(2): 239-253.

[19] Mushref MA (2010) Fourier-Bessel expansions with arbitrary radial boundaries. Appl Math 1:18-23.

[20] Strikwerda JC (2004) Finite difference schemes and partial differential equations. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2nd edn. Vol. 88, Philadelphia.

[21] Kayhani MH, Norouzi M, Amiri Delouei A (2012) A general analytical solution for heat conduction in cylindrical multilayer composite laminates. Int J Therm Sci 52(1): 73-82.

[22] Kayhani MH, Shariati M, Nourozi M, Demneh, MK (2009) Exact solution of conductive heat transfer in cylindrical composite laminate. Heat Mass Transfer 46(1): 83-94.