



کنترل بهینه انرژی ربات‌های سیار چرخ‌دار فرمان لغزشی با روش تحلیلی

میثم پرهیخته^۱، امید محمدپور^{۲*} و علی توسلی^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

^۲ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۷/۱۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۰۲/۲۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۹/۰۸

چکیده

در این مقاله به بررسی کنترل بهینه ربات‌های سیار چرخ‌دار فرمان لغزشی پرداخته شده است. با توجه به مصرف انرژی بالای ربات‌های سیار فرمان لغزشی که از لغزش جانبی چرخ‌ها در مانورهای دورانی ناشی می‌شود، ضرورت طراحی کنترل بهینه به منظور کاهش مصرف انرژی امری ضروری است؛ لذا در این تحقیق، ابتدا مدل سینماتیکی و دینامیکی ربات سیار فرمان لغزشی ارائه می‌شود؛ سپس مدل الکتریکی موتورهای ربات تبیین شده و تابع هدف که همان تابع انرژی مصرفی ربات است، بر مبنای مدل سیستم معرفی می‌شود. سپس برای تعریف و حل مسأله کنترل بهینه، همیلتونین سیستم تشکیل و با کمک اصل همیلتون، پروفیل سرعت بهینه حرکت ربات به منظور کاهش مصرف انرژی به صورت تحلیلی محاسبه می‌شود. در نهایت نتایج حاصل از شبیه‌سازی الگوریتم ارائه شده در این تحقیق، در مقایسه با کنترلر PD بهینه ارائه شده است که بیانگر توانمندی روش ارائه شده و صرفه جویی قابل ملاحظه در میزان مصرف انرژی ربات است.

کلمات کلیدی: کنترل بهینه؛ ربات سیار فرمان لغزشی؛ اصل همیلتون.

Optimal Control of Skid Steer Wheeled Mobile Robots by Analytical Approach

M. Parhikhteh¹, O. Mohammadpour^{2,*}, A. Tavasoli²

¹ M.Sc. Student, Mechanic Eng. Dep., Payame Noor University, Tehran, I.R. of Iran.

² Assistant Professor, Mechanic Eng. Dep., Payame Noor University, Tehran, I.R. of Iran.

Abstract

This paper considers optimal control of skid steer wheeled mobile robots. Due to high energy consumption of skid steer wheeled mobile robots, which results from side slip of wheels in rotational maneuvers, additional studies on energy-efficient optimal control of skid steer robots seems mandatory. So, in this research, kinematic and dynamic modeling of skid steer mobile robot is presented in first. After that, electrical modeling of robot motors is expressed and an objective function, which is the robot energy consumption, introduces based on the system model. Then, to define and solve the optimal control problem, system's Hamiltonian is formed and with the help of Hamilton's principle, the optimal velocity profile of robot's motion is calculated analytically to reduce energy consumption. Simulation results show the superiority of the proposed approach in this study and significant saving in energy consumption of robots in comparison to an optimal PD controller.

Keywords: Optimal Control; Skid Steer Mobile Robot; Hamilton's Principle.

۱- مقدمه

امروزه ربات‌های سیار چرخ‌دار فرمان لغزشی^۱، به دلیل قابلیت مانورپذیری بالا در نقاط با فضای محدود، در صنایع مختلف به طور گسترده بکار گرفته می‌شوند. در ربات‌های سیار فرمان لغزشی، فرماندهی با ایجاد اختلاف سرعت بین چرخ‌های داخلی و خارجی به وجود آمده، بنابراین لغزش جانبی چرخ‌ها در ربات‌های فرمان لغزشی در هر مانور دورانی رخ می‌دهد. تا کنون کنترل ربات‌های سیار با فرض برقراری قید سینماتیکی عدم لغزش جانبی چرخ‌های ربات، مطالعات گسترده‌ای را به خود اختصاص داده است [۱-۲]؛ لیکن در حرکات سریع ربات‌های واقعی در یک پیچ تند، نیروهای گوشه‌ای^۲ تایرهای ربات آن قدر بزرگ نیستند که بتوانند مانع از لغزش جانبی چرخ‌ها شوند و به همین دلیل، قید غیرهولونومیک عدم لغزش جانبی ارضا نمی‌گردد.

بسیاری از محققان با تجزیه و تحلیل دینامیکی و سینماتیکی ربات‌های چرخ‌دار، به بررسی کنترل این نوع ربات‌ها پرداخته‌اند (برای مثال مرجع [۳] و منابع داخل آن را مشاهده نمایید). کنترل فازی ربات سیار چرخ‌دار با دوجرخ متحرک مستقل جهت ممانعت از برخورد با موانع در نظر گرفته شده است [۴]. مسئله پایدارسازی ربات و تعقیب مسیر مرجع ربات سیار چرخ‌دار با در نظر گرفتن اثرات لغزش چرخ‌های ربات، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت [۵]. کنترل گر متغیر با زمان برای حل مشکل تنظیم ربات‌های سیار چرخ‌دار ارائه شد [۶]؛ همچنین کنترل غیرخطی ربات‌های سیار چرخ‌دار، مورد مطالعه قرار گرفته است [۷]. کنترل گر برای تعقیب مسیر حرکت با روش جای دهی قطب طراحی شد [۸]. یک نوع خاص الگوریتم کنترلی هدایت‌کننده، برای کنترل ربات سیار چرخ‌دار غیرهولونومیک ارائه گردید [۹].

ربات‌های متحرک منبع تأمین انرژی مورد نیاز خود را به صورت یک باتری با خود حمل می‌کنند. جهت انجام وظیفه تعیین شده، با توجه به میزان انرژی ذخیره شده در باتری، ربات‌ها دارای محدودیت مصرف انرژی بوده، حیات مفید ربات وابسته به میزان انرژی ذخیره شده در باتری است. به عنوان

مثال ASIMO ربات انسان نما شرکت هوندا، به طور تقریبی می‌تواند برای ۳۰ دقیقه با استفاده از باتری قابل شارژ فعالیت کند، درحالی‌که برای شارژ مجدد باتری به چهار ساعت زمان نیاز دارد [۱۰]. ربات BEAR می‌تواند به طور تقریبی به مدت ۳۰ دقیقه ممتد برای یافتن و نجات دادن مردم در حوادث عمل نماید [۱۱]؛ در نتیجه از آنجا که عملکرد ربات متحرک وابسته به میزان انرژی ذخیره شده در باتری ربات است، تعدادی از تحقیقات روی میزان انرژی مصرفی ربات‌های متحرک متمرکز شده‌اند [۱۲-۱۵]. برای صرفه جویی در میزان انرژی مصرفی در ربات‌ها می‌توان از روش‌های مختلفی بهره گرفت، به عنوان مثال، افزایش بهره‌وری موتورهای ربات یا یافتن بهترین مسیر برای حرکت ربات [۱۴-۱۷].

موتورهای DC و میکروکنترلرهای موجود در ربات، از مهم‌ترین منابع مصرف انرژی می‌باشند. مطالعات در مورد ربات Pioneer نشان داده است که موتورهای DC، بیش از ۷۰ درصد انرژی مصرفی کل ربات را به خود اختصاص داده‌اند [۱۸]. از طرفی انرژی مصرفی توسط موتورها در ربات‌های متحرک، بسیار وابسته به پروفیل سرعت ربات بوده، می‌تواند با بهینه‌سازی مصرف انرژی از طریق بهینه‌سازی پروفیل سرعت، مدت زمان کاری ربات را افزایش داد. از این رو تعیین پروفیل سرعت بهینه و کنترل نمودن ربات جهت تبعیت از پروفیل سرعت تعیین شده، یک رهیافت کار آمد جهت کنترل بهینه انرژی ربات‌ها به شمار می‌رود [۱۸].

علیرغم وجود مطالعات گسترده برای حفظ انرژی در صنایع مختلف، مسئله کنترل بهینه انرژی در رباتیک به صورت شایسته، مورد مطالعه قرار نگرفته است. معیار کوتاه‌ترین مسیر حرکت برای بدست آوردن یک تابع معین جهت مشخص کردن کمترین مقدار انرژی مصرفی، توسط ربات بکار گرفته شد [۱۹]. صرفه‌جویی در انرژی مصرفی ربات با کمک کاهش فرمان‌پذیری ربات در برنامه‌ریزی مسیر بهینه، مورد بررسی قرار گرفت [۲۰]. کنترل بهینه ربات‌های سیار چرخ‌دار با چرخ‌های محرک از جلو مورد بررسی قرار گرفت [۱۱]. جهت کنترل بهینه انرژی ربات دو چرخ، یک الگوریتم ساده، اما موثر ارائه گردید که ابتدا یک مسیر مشخص بین نقطه آغاز و پایان مسیر حرکت ربات بدون برخورد با موانع را مشخص می‌نماید و سپس تابع هزینه

¹ Skid Steer Wheeled Mobile Robots

² Cornering Force

طرح کنترلی ارائه شد [۳۱]. ردیابی مسیر هندسی ربات پایونیر فرمان لغزشی با استفاده از دوربین به صورت آزمایشگاهی انجام شد [۳۲-۳۳]. مساله پایدارسازی ربات فرمان لغزشی حول یک نقطه ثابت با لحاظ نمودن اثرات تأیر و لغزش طولی چرخ‌ها، مورد بررسی قرار گرفت [۳۴]. بر اساس رابطه بین لغزش چرخ‌های ربات و مرکز آنی دوران ربات، یک مدل سینماتیکی توسعه یافته برای ربات سیار فرمان لغزشی استخراج گردید [۲۸]. مدل‌سازی دینامیکی ربات سیار فرمان لغزشی با این فرض بررسی شده است که چرخ‌های ربات، دارای سرعت‌های زاویه‌ای مختلف هستند [۲۹].

علیرغم مطالعات بالا، تاکنون مطالعه‌ای در خصوص کنترل بهینه ربات سیار فرمان لغزشی صورت نگرفته است. با توجه به اینکه بیشترین انرژی صرف حرکت ربات می‌شود، بهینه‌سازی مسیر حرکت ربات، کمک شایانی به بهینه‌سازی انرژی مصرفی ربات خواهد کرد. در این تحقیق، هدف اصلی آن است که با استفاده از بهینه‌سازی پروفیل سرعت، به طوری که در هر قسمت از مسیر حرکت سرعت بهینه ربات معین شود، کمترین انرژی صرف حرکت ربات شود. این عمل با استفاده از یک الگوریتم صورت می‌پذیرد که مقدار سرعت بهینه را انتخاب نموده، آن را در تابع هدف کنترل بهینه لحاظ می‌نماید.

در این تحقیق، ابتدا مدل سینماتیکی و دینامیکی ربات سیار فرمان لغزشی ارائه شده، سپس مدل الکتریکی موتورهای ربات تشریح و معادلات حاکم بر آنها استخراج می‌گردند و در ادامه تابع هدف معرفی می‌شود که میزان انرژی مصرفی توسط ربات است. سپس جهت حل مسئله کنترل بهینه همیلتونین سیستم تشکیل شده و با حل تحلیلی تابع همیلتون، یک الگوریتم که مقدار سرعت بهینه را ارائه می‌دهد و اثرات آن را در تابع انرژی مصرفی ربات لحاظ می‌نماید، جهت کنترل بهینه انرژی ربات سیار فرمان لغزشی ارائه می‌شود.

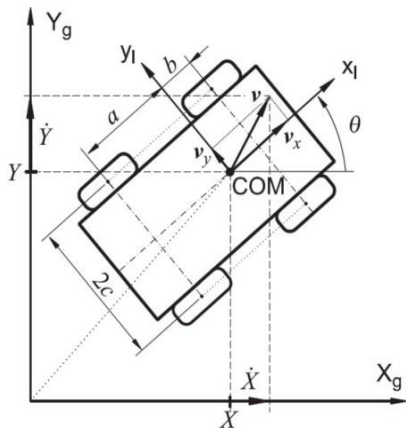
۲- مدل‌سازی

در این بخش، معادلات دینامیکی حاکم بر حرکت صفحه‌ای ربات سیار چرخدار فرمان لغزشی با در نظر گرفتن محرکه‌های DC استخراج می‌گردند. هدف از این بخش، ارائه

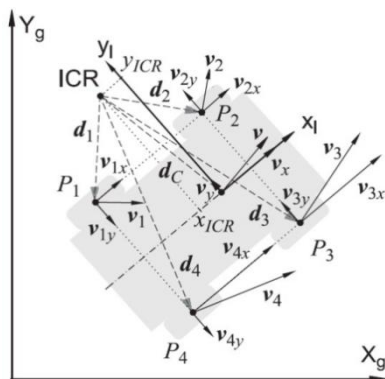
مسیر حرکت ربات را کمینه می‌کند [۲۱]. یک روش برای کمینه کردن برخط انرژی مصرفی توسط ربات دو چرخ، از طریق تعیین کمترین مسافت ممکن بین دو نقطه معین ارائه شده است [۲۲]. استفاده از یک الگوریتم خاص که بر پایه میزان انرژی جنبشی از دست رفته حین حرکت ربات استوار است، منجر به ارائه یک روش برای کمینه کردن انرژی مصرفی توسط ربات دو چرخ گردید [۲۳]. الگوریتم‌های فرا ابتکاری همانند الگوریتم ژنتیک که بر پایه رفتار زیستی موجودات زنده بنا نهاده شده‌اند، برای کنترل بهینه مسیر حرکت ربات مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۲۴]. نشان داده شد که بهینه نمودن برنامه‌های کاربردی ربات می‌تواند سبب مصرف انرژی کمتر شود [۲۵]. برنامه ریزی مسیر حرکت ربات، اخیراً به عنوان یک روش برای کمینه نمودن انرژی مصرفی ربات در طول مسیر حرکت ربات، مورد استفاده قرار گرفته است [۲۶]. بازدهی انرژی مصرفی برای ربات جستجوگر مورد مطالعه قرار گرفت و روش‌هایی ارائه گردید که ۴۲٪ انرژی بیشتر نسبت به روش‌های متداول ذخیره می‌کند [۲۷]. روش‌های بسیاری برای بهبود بهره‌وری انرژی انواع مختلف ربات‌های صنعتی، مورد استفاده قرار گرفته است [۲۸].

معیارهای متعددی جهت به دست آوردن یک تابع هدف، به منظور ذخیره‌سازی انرژی، مورد استفاده قرار گرفته است. معیار کوتاه ترین مسیر حرکت برای به دست آوردن یک تابع معین جهت کمینه نمودن مقدار انرژی مصرفی، توسط ربات بکار گرفته شد [۱۵]. معیار دیگر، بر اساس کمینه نمودن مقدار انرژی جنبشی از دست رفته توسط ربات بود [۱۷]. در این مطالعه نشان داده شد که اگر ربات مسیری که برای حرکتش پیش‌بینی شده را دقیقاً طی نکند، بلکه انحراف قابل قبولی از مسیر داشته و به نقطه انتهایی برسد، باعث صرفه جویی در مصرف انرژی می‌شود، بدین معنا که کاهش فرمان پذیری ربات در برنامه ریزی مسیر حرکت، سبب صرفه جویی در انرژی مصرفی توسط ربات می‌شود [۲۹].

در رابطه با ربات‌های سیار فرمان لغزشی، مطالعات گوناگونی انجام شده است. تجزیه و تحلیل سینماتیکی و دینامیکی و همچنین کنترل ربات سیار فرمان لغزشی بررسی شده است [۳۰]. مدل کلی ربات سیار فرمان لغزشی با در نظر گرفتن لغزش چرخ‌ها استخراج گردیده، بر اساس آن یک



شکل ۱- سینماتیک ربات سیار فرمان لغزشی



شکل ۲- روابط بین سرعت چرخ‌ها

$$\begin{bmatrix} v_L \\ v_R \\ v_F \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 1 & c \\ 0 & -x_{ICRG} + b \\ 0 & -x_{ICRG} - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

a فاصله مرکز جرم ربات از محور چرخ‌های عقب، b فاصله مرکز جرم ربات از محور چرخ‌های جلو، c نصف فاصله بین محور چرخ‌های چپ و راست ربات است.

فرض می‌کنیم $(x_{ICRG}, y_{ICRG}, 0)$ نشان دهنده مرکز آنی دوران^۲ ربات کامل ذکر شده روی مختصات محلی باشد که نشان دهنده نقطه‌ای است که مرکز جرم ربات حول آن می‌چرخد. به آسانی مشاهده می‌شود که موقعیت مرکز دوران یعنی ICR، تحت تاثیر حرکت ربات سیار فرمان لغزشی قرار دارد. برخلاف اکثر ربات‌های سیار که در آن‌ها فرض شده چرخ‌ها بدون لغزش هستند، موقعیت ICR در

کامل‌ترین مدل سینماتیکی و دینامیکی ربات‌های سیار فرمان لغزشی تا به امروز است.

بدون از دست دادن عمومیت مسئله فرضیات زیر در نظر گرفته شده است [۴]:

- ۱- مرکز جرم ربات در مرکز هندسی شاسی بدنه قرار گرفته است.
- ۲- دو چرخ هر یک از طرفین ربات با سرعت یکسان می‌چرخند.
- ۳- از نیروی مقاومت تماس غلتشی چشم‌پوشی شده است.^۱
- ۴- در زمان حرکت، نیروهای قائم در نقاط تماس بین چرخ و زمین به صورت یکسان بین چهار چرخ توزیع شده‌اند.
- ۵- ربات روی سطح زمین هموار حرکت کرده، چهار چرخ ربات همیشه در تماس با سطح زمین است.

۲-۱- مدلسازی سینماتیکی

شماتیک یک ربات سیار چهار چرخ، در شکل ۱ نشان داده شده است. با توجه به فرض ۵ و همان طوری که در شکل ۱ نشان داده شده است فرض شده که وسیله نقلیه فقط اجازه حرکت در یک صفحه دو بعدی با مختصات اینرسی (X_g, Y_g) را دارد. بردار مختصات تعمیم یافته و بردار سرعت جسم به ترتیب، با $q = [X \ Y \ \theta]^T$ (که در آن X و Y نشان دهنده موقعیت مرکز جرم ربات و θ جهت چارچوب محلی نسبت به چارچوب اینرسی است) و $V = [v_x \ v_y \ \omega_z]^T$ تعریف شده‌اند که در آن سرعت طولی، عرضی و زاویه‌ای ربات را به ترتیب، با v_x, v_y و ω_z نشان می‌دهیم.

با توجه به شکل ۲، روابط زیر بین سرعت‌های چرخ‌ها برقرار است:

$$\begin{aligned} v_L &\triangleq v_{1x} = v_{2x} \\ v_R &\triangleq v_{3x} = v_{4x} \\ v_F &\triangleq v_{2y} = v_{3y} \\ v_B &\triangleq v_{1y} = v_{4y} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن v_L و v_R به ترتیب نشان‌دهنده، سرعت چرخ‌های سمت چپ و راست در جهت طولی، در حالی که v_F و v_B سرعت چرخ‌های جلو و عقب در جهت عرضی است. این سرعت‌ها را می‌توان به شکل ماتریسی رابطه (۲) نشان داد:

^۱ نیروی مقاومت غلتشی زمین در سرعت‌های پائین مقدار ناچیزی داشته و قابل چشم‌پوشی است.

^۲ Instantaneous Center of Rotation (ICR)

لغزشی است. ورودی کنترل سینماتیکی η به صورت رابطه (۸) تعریف شده است:

$$\eta = [v_x \quad \omega_z]^T = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ -r & r \\ \frac{2C}{2C} & \frac{2C}{2C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} = T_q \omega \quad (۸)$$

که در آن ω_L, ω_R, r بترتیب، بیانگر سرعت دورانی چرخ‌های سمت چپ، سرعت دورانی چرخ‌های سمت راست و شعاع چرخ‌های ربات می‌باشند. T_q ماتریس تبدیلی است که بین پارامتر η و سرعت دورانی چرخ‌های ربات رابطه برقرار می‌کند.

۲-۲- مدلسازی دینامیکی

با ترکیب معادلات (۵) و (۷)، به آسانی می‌توان رابطه (۹) را به دست آورد:

$$S^T(q)A^T(q) = 0 \quad (۹)$$

مدل دینامیکی را با در نظر گرفتن بردار نیروها و گشتاورهای عکس العمل، اضافه کردن محدودیت غیرهولونومیک (۵) و با استفاده از ضرایب لاگرانژ λ ، به صورت رابطه (۱۰) در نظر می‌گیریم [۳۰]:

$$M\ddot{q} + R(\dot{q}) = B(q)\tau + A^T(q)\lambda \quad (۱۰)$$

که $M(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ماتریس متقارن مثبت معین اینرسی ربات، $R(\dot{q}) \in \mathbb{R}^3$ بردار نیروها و گشتاورهای عکس العمل، $B(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ماتریسی برای تبدیل بردار گشتاور از چرخ به دستگاه مبنا است. برای حذف ضرایب مجهول λ ، ماتریس $S^T(q)$ تعریف شده در (۷) را در معادله (۱۰) ضرب می‌کنیم و با استفاده از محدودیت (۹)، مدل دینامیکی زیر را در مختصات تعمیم یافته q به دست می‌آوریم:

$$\bar{M}\dot{\eta} + \bar{C}\eta + \bar{R} = \bar{B}\tau \quad (۱۱)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \bar{M} &= S^T M S = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m x_{ICR}^2 + I \end{bmatrix} \\ \bar{R} &= S^T R = \begin{bmatrix} F_{rx}(\dot{q}) \\ x_{ICR} F_{ry}(\dot{q}) + M_r(\dot{q}) \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= S^T B = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -C & C \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۱۲)$$

که در آن مقادیر $F_{rx}(\dot{q})$ ، $F_{ry}(\dot{q})$ و $M_r(\dot{q})$ در پیوست مطابق روابط پ-۱ الی پ-۳ به دست می‌آیند.

نهایتاً معادلات سینماتیکی و دینامیکی سیستم را می‌توان به صورت رابطه (۱۳) بیان کرد.

ربات‌های سیار فرمان لغزشی ثابت نیست؛ بنابراین از شکل ۲ و معادله (۲) می‌توان فهمید که اگر مختصات x_{ICR} در طول محور ربات خارج شود، ربات در جهت جانبی دچار لغزش شده، پایداری خود را از دست می‌دهد؛ همچنین از آنجایی که فرض می‌شود ربات در سرعت‌های پایین حرکت می‌کند، مشتق مرکز آنی دوران (\dot{x}_{ICR}) مساوی با صفر در نظر گرفته می‌شود.

موقعیت ICR طولی را به صورت رابطه (۳) تعریف می‌کنیم [۳۰-۳۱]:

$$x_{ICRl} = x_{ICRr} = x_{ICRG} = -\frac{v_y}{\omega_z} \quad (۳)$$

تذکر ۱: از شکل ۲ مشخص است که v_{iy} فقط برای حرکت در مسیر مستقیم برابر صفر است (یعنی اگر $\omega = 0$ باشد)، در غیر این صورت $v_{iy} \neq 0$ است، نتیجه می‌گیریم که لغزش جانبی برای تغییر جهت وسیله نقلیه مورد نیاز است [۳۰]. از معادله (۳) به آسانی می‌توانیم محدودیت سرعت در مختصات محلی را به دست آوریم:

$$v_y + x_{ICR}\omega_z = 0 \quad (۴)$$

معادله بالا را می‌توانیم با توجه به چارچوب اینرسی به صورت رابطه (۵) دوباره بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} \sin \theta & \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \dot{q} + x_{ICR} \dot{\theta} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & x_{ICR} \end{bmatrix} \dot{q} = A(q) \dot{q} = 0 \quad (۵)$$

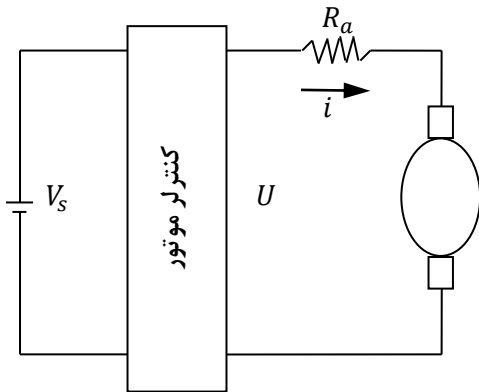
که $A(q) \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ برداری در جهت نیروهای ناشی از قیدهای سینماتیکی است. به وضوح روشن است که محدودیت (۵)، نشان‌دهنده یک محدودیت غیرهولونومیک است؛ به دلیل اینکه قابل انتگرال گیری نیست، بنابراین این سیستم را می‌توان به‌طور مشابه به عنوان یک سیستم غیرهولونومیک برای تمام ربات‌های سیار چرخدار معمولی به کار برد. علاوه بر این، از آنجایی که \dot{q} متعلق به فضای پوچی $A(q)$ است، می‌توانیم رابطه (۶) را بنویسیم:

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (۶)$$

که در آن عبارت ماتریسی $S(q)$ که شامل محدودیت (۴) است را می‌توان به صورت رابطه (۷) به دست آورد:

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & x_{ICR} \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -x_{ICR} \cos(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۷)$$

معادله (۷) محدودیت در سرعت را به صورت رابطه‌ای بین بردار سرعت تعمیم یافته \dot{q} و ورودی کنترل η بیان می‌کند و نشان‌دهنده مدل سینماتیکی ربات سیار چرخدار فرمان



شکل ۳- مدار معادل موتور DC مغناطیس دائم

ربات بدست می‌آید. طراحی قانون کنترل بر مبنای این فرض است که از لغزش طولی ربات صرف نظر شده، ربات هنگام حرکت در یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند. با ترکیب معادلات (۱۴) و (۱۵) معادله (۱۶) بدست می‌آید.

$$\frac{d\omega}{dt} + A\omega = BU; \quad (16)$$

$$A = j^{-1} \left(F_v + \frac{K_b K_t n^2}{R_a} \right), \quad B = j^{-1} \frac{K_t n V_s U}{R_a}$$

با توجه به روابط (۷) و (۱۶)، معادلات دینامیکی برحسب پارامتر η به شکل رابطه (۱۷) بیان می‌شود.

$$\dot{\eta} + \bar{A}\eta = \bar{B}U; \quad (17)$$

$$\bar{A} = T_q A T_q^{-1}, \quad \bar{B} = T_q B$$

میزان انرژی مصرفی ربات (E_W)، به صورت رابطه (۱۸) قابل محاسبه است.

$$E_W = \int_0^t \mathbf{i} \cdot \mathbf{V} dt = V_s \int_0^t \mathbf{i} \cdot \mathbf{U} dt \quad (18)$$

با استفاده از معادلات (۷) و (۱۴) و (۱۸)، رابطه (۱۹) قابل بیان است.

$$E_W = V_s \int_0^t \left(\frac{V_s \mathbf{U}}{R_a} - \frac{K_b n \omega}{R_a} \right) \cdot \mathbf{U} dt$$

$$= \int_0^t (K_1 \mathbf{U}^T \mathbf{U} - K_2 (\mathbf{T}(q)^{-1} \boldsymbol{\eta})^T \mathbf{U}) dt \quad (19)$$

که در آن $K_2 = \frac{K_b n V_s}{R_a}$ ، $K_1 = \frac{V_s^2}{R_a}$ با توجه به معادله (۱۹)، انرژی مصرفی ربات تحت تاثیر میزان ورودی موتورهای ربات و سرعت مرکز جرم ربات است. حال با استفاده از اصل حدکثر پونتریاگن^۲، پروفیل سرعت حداقل انرژی با وجود قیود (۲۰) بدست خواهد آمد.

$$\begin{cases} \dot{q} = S(q)\eta \\ \bar{M}\dot{\eta} + \bar{C}\eta + \bar{R} = \bar{B}\tau \end{cases} \quad (13)$$

۲-۳- مدل‌سازی موتور الکتریکی

به منظور اعمال قانون کنترل به ربات در عمل، باید ولتاژ مناسب به موتورها اعمال گردد. در مواردی که سرعت عملکرد موتورها به اندازه کافی بالا است، نیازی به در نظر گرفتن دینامیک موتور به عنوان بخشی از مدل کنترل نیست. در این صورت قانون کنترل ساده‌تری حاصل می‌شود؛ اما در کاربردهایی که سرعت موتورها در مقایسه با دینامیک ربات و همچنین نوع وظیفه‌ای که ربات انجام می‌دهد، زیاد بالا نیست، ضروری است تا دینامیک محرک‌ها در نظر گرفته شود. در اینگونه موارد، در نظر گرفتن دینامیک محرک‌ها به‌عنوان بخشی از مدل کنترل جهت اطمینان از حصول پایداری و همچنین افزایش کیفیت کنترلر طراحی شده ضروری است؛ در نتیجه در این قسمت به ارائه مدل محرک‌ها پرداخته می‌شود.

مدل الکتریکی موتور که در شکل ۳ نمایش داده شده است را به صورت رابطه (۱۴) در نظر می‌گیریم.

$$R_a \mathbf{i} = V_s \mathbf{U} - K_b n \omega \quad (14)$$

که در آن $\omega = [\omega_L \quad \omega_R]^T$ بردار سرعت دورانی چرخ‌های سمت چپ و راست ربات، $\mathbf{i} = [i_L \quad i_R]^T$ بردار جریان موتورهای چپ و راست ربات، $\mathbf{U} = [u_L \quad u_R]^T = \frac{V}{V_s}$ بردار نرمال ولتاژ ورودی موتورهای چپ و راست ربات است.

همچنین پارامترهای K_b ، R_a ، n ، V_s به ترتیب، ثابت موتور، مقاومت سیم پیچی آرمیچر موتور، نسبت دور چرخ‌دنده‌های ربات و میزان ولتاژ باتری می‌باشند. رابطه بین سرعت دورانی چرخ‌ها و ولتاژ ورودی به صورت رابطه (۱۵) است:

$$J \frac{d\omega}{dt} + F_v \omega = K_t n \mathbf{i} \quad (15)$$

که در آن J ، K_t ، F_v به ترتیب، بیانگر ضرایب ثابت موتور و اینرسی موتورها می‌باشند.

۳- کنترل بهینه انرژی ربات

در این بخش با بهره‌گیری از اصل همیلتون^۱، پروفیل سرعت جهت کنترل بهینه انرژی ربات براساس معادلات دینامیکی

² Pontryagin's Maximum Principle

¹ Hamilton's Principle

که در آن

$$C_1 = \frac{e^{-t_f/\tau_v} - 1}{e^{t_f/\tau_v} - e^{-t_f/\tau_v}}$$

$$C_2 = \frac{1 - e^{t_f/\tau_v}}{e^{t_f/\tau_v} - e^{-t_f/\tau_v}} \quad (28)$$

پارامتر متغیر با زمان K_v با رابطه (۲۹) محاسبه می‌شود.

$$K_v = \frac{x_f \Delta_2}{2\tau_v(2 - \Delta_1) + t_f \Delta_2};$$

$$\Delta_1 = e^{t/\tau_v} + e^{-t/\tau_v}$$

$$\Delta_2 = e^{t/\tau_v} - e^{-t/\tau_v} \quad (29)$$

نهایتاً پروفیل سرعت بهینه $V_x^*(t)$ با رابطه (۳۰) بدست می‌آید.

$$V_x^*(t) = \frac{x_f \sinh\left(\frac{t_f}{\tau_v}\right) - \sinh\left(\frac{t_f-t}{\tau_v}\right) - \sinh\left(\frac{t}{\tau_v}\right)}{\tau_v \left(2 \left(1 - \cosh\left(\frac{t_f}{\tau_v}\right)\right) + \left(\frac{t_f}{\tau_v}\right) \sinh\left(\frac{t_f}{\tau_v}\right)\right)} \quad (30)$$

پروفیل سرعت بهینه برای هر مسیر مستقیمی که ربات بخواهد طی نماید با در دست داشتن نقاط ابتدا و انتهایی مسیر و سرعت ربات در ابتدا و انتهای مسیر (فرض شده است، ربات از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و در نهایت نیز، سرعت ربات در انتهای مسیر به صفر می‌رسد) بدست می‌آید که ربات با تبعیت از این پروفیل سرعت بدست آمده، همواره کمترین میزان مصرف انرژی را خواهد داشت. باید همواره مد نظر داشت که سرعت ربات بین نقطه شروع و پایان حرکت توسط خود ربات محاسبه می‌شود.

تذکر ۲: لازم به ذکر است که در این تحقیق به مسأله برنامه‌ریزی حرکت^۱ در ربات فرمان لغزشی پرداخته شده است. در این مرحله، مسیر متغیر با زمان ایجاد شده، سپس در یک مرحله پایین‌تر با استفاده از روش‌های کنترلی، مسأله ردیابی مسیر مرجع متغیر با زمان^۲ با استفاده از فیدبک سنسورهای مختلف موقعیت و سرعت حل می‌شود.

۴- شبیه‌سازی

به منظور اعتبار سنجی کنترلر طراحی شده در این تحقیق در کاهش مصرف انرژی ربات، شبیه‌سازی‌ها برای دو حالت نشان داده شده است:

¹ Motion Planning

² Trajectory Tracking

$$\dot{\eta} + \bar{A}\eta = \bar{B}U, \quad -U^{max} \leq U \leq U^{max}$$

$$P_f = \int_0^{t_f} s(q)\eta dt = [x_f \ 0 \ 0];$$

$$\eta(0) = [0 \ 0]^T, \eta(t) = [0 \ 0]^T \quad (20)$$

که در آن t_f, P_f به ترتیب بیانگر، زمان و مکان نهایی حرکت ربات هستند. برای تعریف و حل مسئله کنترل بهینه، همیلتونین سیستم، H به صورت رابطه (۲۱) تعریف می‌شود.

$$H = K_1 U^T U - K_2 T(q)^{-T} \eta^T U - \alpha^T s(q) \eta + \alpha^T \frac{P_f}{t_f} + \lambda^T (\bar{B}U - \bar{A}\eta) \quad (21)$$

که در آن α و λ ضرایب لاگرانژ قید مکان و قید سرعت می‌باشند؛ بنابراین شرایط لازم برای سرعت بهینه η^* و ورودی کنترل u^* عبارت از رابطه (۲۲) است

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 2K_1 U - K_2 T(q)^{-1} \eta + \lambda^T \bar{B} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = -K_2 T(q)^{-1} U - \alpha^T s(q)^T - \lambda^T \bar{A} = -\dot{\lambda}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \bar{B}U - \bar{A}\eta = \dot{\eta} \quad (22)$$

با توجه به رابطه (۲۲)، معادله دیفرانسیلی (۲۳) بدست می‌آید.

$$\ddot{\eta}^* - \left(\bar{B} \bar{B}^T \bar{A} \bar{A}^T \bar{B}^{-1} \bar{A}^T - \frac{k_2}{k_1} \bar{B} \bar{B}^T T_q^{-1} \bar{B}^{-1} \bar{A} \right) \eta + \frac{1}{2k_1} \bar{B} \bar{B}^T s(q) \alpha = 0 \quad (23)$$

که در آن ماتریس‌های $\bar{B} \bar{B}^T$ و \bar{A} قطری هستند؛ لذا معادله (۲۳) در حالت ماتریسی به شکل رابطه (۲۴) تبدیل می‌شود.

$$\ddot{\eta}^* - Q Q^T \eta^* + R^T S(q)^T \alpha = 0 \quad (24)$$

که در آن علامت '*' بیانگر مقدار بهینه است

$$Q Q^T = \bar{A}^T \bar{A} - \frac{k_2}{k_1} \bar{B} \bar{B}^T T_q^{-T} \bar{B}^{-1} \bar{A};$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_\omega} \end{bmatrix}, \quad R = \frac{\bar{B} \bar{B}^T}{2k_1} \quad (25)$$

مقادیر τ_v و τ_ω به صورت رابطه (۲۶) بدست می‌آیند

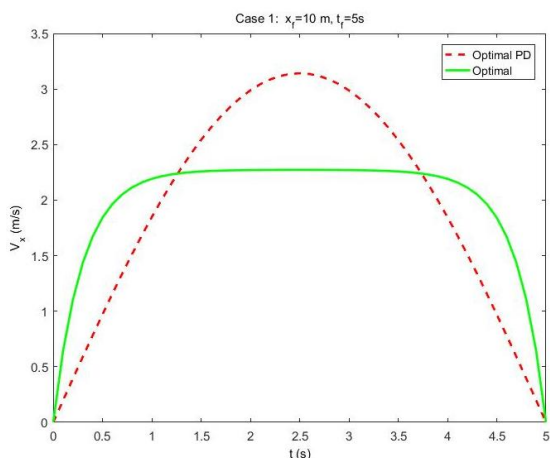
$$\tau_v = (J_1 + J_2) / \sqrt{F_v(F_v + K_t K_b n^2 / R_a)}$$

$$\tau_\omega = (J_1 - J_2) / \sqrt{F_v(F_v + K_t K_b n^2 / R_a)} \quad (26)$$

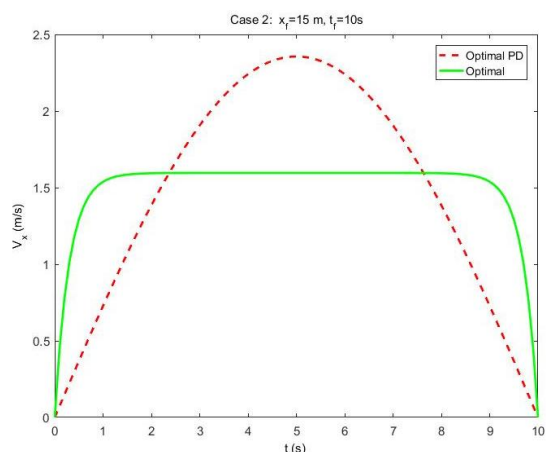
با حل معادله (۲۴)، $\eta^*(t)$ با رابطه (۲۷) بدست می‌آید.

$$\eta^*(t) = \begin{bmatrix} V_x^*(t) \\ \omega^*(t) \end{bmatrix}$$

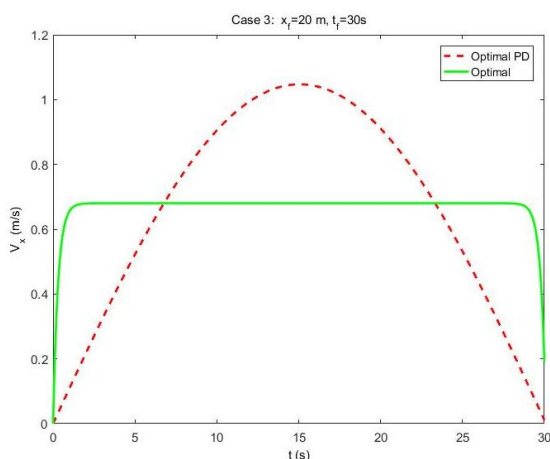
$$= \begin{bmatrix} K_v [C_1 e^{t/\tau_v} + C_2 e^{-t/\tau_v} + 1] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$



شکل ۴- مقایسه سرعت برای حالت اول



شکل ۵- مقایسه سرعت برای حالت دوم



شکل ۶- مقایسه سرعت برای حالت سوم

الف) با استفاده از منطق کنترل بهینه به کار رفته در این تحقیق

ب) با استفاده از کنترلر PD بهینه.

پارامترهای ربات و موتور برای شبیه‌سازی بر اساس ربات فرمان لغزشی Pioneer 3-AT ساخت شرکت اکتیو مدیا رباتیکز^۱ انتخاب شده که در جدول ۱ مشخص شده است.

مکان اولیه ربات در مبدأ مختصات و سرعت اولیه صفر فرض شده است. خطوط سبز بیانگر، میزان انرژی مصرفی با بکارگیری منطق بهینه در این تحقیق و خطوط قرمز خطچین بیانگر، میزان انرژی مصرفی با به‌کارگیری کنترلر PD بهینه در ربات است. مطابق جدول ۲، سه حالت مختلف حرکتی برای شبیه‌سازی در نظر می‌گیریم.

پروفیل سرعت ربات در سه حالت مختلف حرکتی به ترتیب در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ نشان داده شده است. همانطور که از این شکل‌ها مشخص است، ربات در حالت کنترل بهینه پس از یک شتاب اولیه سرعت خود را تقریباً ثابت نگه داشته، در نهایت با یک شتاب منفی در نقطه پایان مسیر می‌ایستد؛ این در حالی است که در حالت کنترل PD بهینه، ربات نیمه اول مسیر را با شتاب مثبت و نیمه دوم را با شتاب منفی حرکت می‌کند. در واقع سرعت ماکزیمم ربات در حالت بهینه به مراتب از حالت کنترل PD بهینه کمتر است.

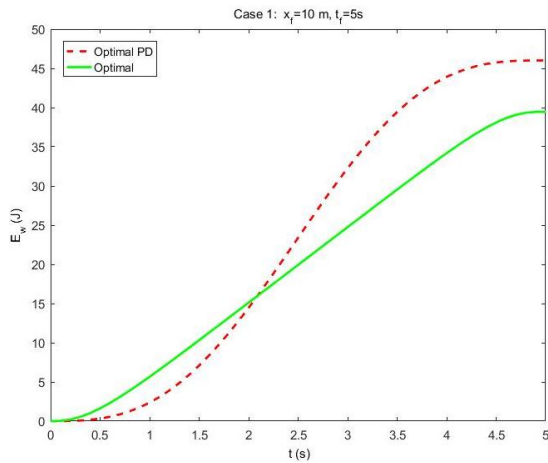
جدول ۱- پارامترهای شبیه‌سازی

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
M	40 kg	R_a	0.71 Ω
a	0.138 m	K_b	0.023 V.s/rad
b	0.122 m	V_s	12 V
c	0.1975 m	F_v	0.039 N.s/rad
r	0.1075 m	K_t	0.023 N.m/A
I	0.1 kg.m ²	U_{max}	12
n	49.8	J_1	0.0799
μ	0.5	J_2	0.0017

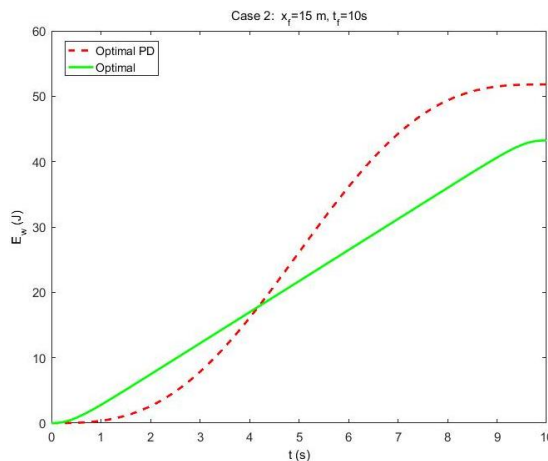
^۱ ActiveMedia Robotics

جدول ۲- حالت‌های مختلف شبیه‌سازی

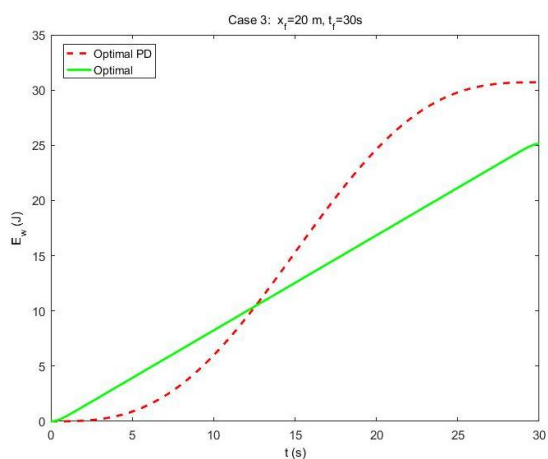
حالت‌های شبیه‌سازی	زمان	مکان
حالت اول	۵ ثانیه	۱۰ متر
حالت دوم	۱۰ ثانیه	۱۵ متر
حالت سوم	۳۰ ثانیه	۲۰ متر



شکل ۷- مقایسه انرژی مصرفی برای حالت اول



شکل ۸- مقایسه انرژی مصرفی برای حالت دوم

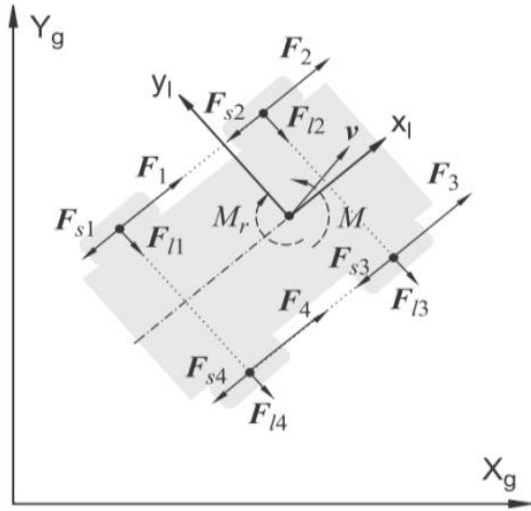


شکل ۹- مقایسه انرژی مصرفی برای حالت سوم

در شکل‌های ۷، ۸ و ۹، میزان انرژی مصرفی ربات برای سه حالت مختلف شبیه‌سازی با استفاده از کنترل PD بهینه و روش کنترل بهینه این تحقیق نشان داده شده است. همانطور که از این نمودارها پیداست، اگرچه ربات در ابتدای مسیر خود در حالت کنترل PD بهینه، انرژی کمتری نسبت به کنترل بهینه مصرف می‌کند، ولی میزان کل انرژی مصرفی ربات در حالت کنترل بهینه نسبت به کنترل PD بهینه کمتر است. علت انرژی مصرفی کمتر ربات در ابتدای مسیر برای کنترل PD بهینه، شتاب کمتر این کنترلر در اوایل مسیر است که از نمودارهای پروفیل سرعت مشخص است، ولی در ادامه چون کنترل بهینه باعث حرکت ربات با سرعت تقریباً ثابت می‌شود، انرژی مصرفی کمتری هم برای ادامه مسیر نیاز دارد؛ همچنین علیرغم اینکه در حالت سوم ربات مسافت بیشتری را طی نموده، انرژی مصرفی کل ربات کمتر بوده است. این بدان معنی است که هر چه سرعت متوسط ربات کمتر باشد، انرژی کمتری مصرف خواهد کرد. از سوی دیگر، با توجه به این شکل‌ها هر چقدر ربات مسیر طولانی‌تری را طی نماید، انرژی مصرفی آن بیشتر خواهد بود که کاملاً طبیعی است.

برای مقایسه بهتر در جدول ۳، انرژی مصرفی ربات در سه حالت شبیه‌سازی برای دو روش کنترل بهینه و کنترل PD بهینه ارائه شده است.

با توجه به جدول ۳ مشخص است که روش ارائه شده در این تحقیق، نسبت به کنترلر PD بهینه در سه حالت مختلف شبیه‌سازی، حداقل ۱۳.۸٪ صرفه جویی داشته است؛ همچنین همانطور که انتظار می‌رود، هر چقدر مدت زمان شبیه‌سازی بیشتر شده است، روش ارائه شده در این تحقیق صرفه جویی انرژی بیشتری را در پی دارد. از سوی دیگر، هر چقدر سرعت متوسط کمتر باشد، روش کنترل بهینه ارائه شده در این مطالعه، صرفه‌جویی انرژی بیشتری را نشان می‌دهد.



شکل پ-۱- دیاگرام آزاد نیروهای ربات

که در آن مقادیر نیروی اصطکاک جانبی (F_{Li}) و طولی (F_{Si}) هر چرخ بر اساس مدل کلوبب و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} F_{Li} &= \mu_{Li} N_i \operatorname{sgn}(V_{yi}) \\ F_{Si} &= \mu_{Si} N_i \operatorname{sgn}(V_{xi}) \end{aligned} \quad (\text{پ-۴})$$

۷- مراجع

- [1] Pentzer J, Brennan S, Reichard K (2014) On-Line estimation of vehicle motion and power model parameters for skid-steer robot energy use prediction. American Control Conference (ACC) Portland, 2786-2791.
- [2] Pazderski D, Kozłowski K, Lawniczak M (2004) Practical stabilization of 4WD skid steering mobile robot. Proc. of the Fourth International Workshop on Robot Motion and Control, Puzszykowo, 175-180.
- [3] Van der molen GM (1994) Modeling and control of a wheeled mobile robot. Control Eng Pract 2(1): 287-292.
- [4] Takeuchi T, Nagia Y, Enomoto N (1988) Fuzzy control of a mobile robot for obstacle avoidance. Inf Sci 45(2): 231-248.
- [5] Leroquais W, d'Andréa-Novel B (1999) Modeling and control of wheeled mobile robots not satisfying ideal velocity constraints: The unicycle case. Eur J Control 5(2-4): 293-311.
- [6] Dixon WE, Jiang ZP, Dawson DM (2000) Global exponential set point of wheeled mobile robots: A lyapunov approach. Automatica 36(11): 1741-1746.

جدول ۳- مقایسه میزان مصرف انرژی ربات

حالت	سرعت متوسط	انرژی مصرفی در حالت بهینه	انرژی مصرفی با کنترل PD بهینه	درصد صرفه‌جویی در مصرف انرژی
اول	2 m/s	39.4 J	46.1 J	13.8%
دوم	1.5 m/s	43.2 J	51.8 J	16.6%
سوم	0.67 m/s	25.2 J	30.8 J	18.2%

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله کنترل بهینه انرژی مصرفی ربات‌های سیار چرخ‌دار فرمان لغزشی، مورد بررسی قرار گرفت. در واقع یک پروفیل سرعت بهینه جهت کنترل مصرف انرژی برای مسیری ارائه شد که ربات در آن حرکت مستقیم دارد و هیچ‌گونه مانعی در مسیر حرکت وجود ندارد. نتایج شبیه‌سازی‌ها برای دو روش کنترل PD بهینه و روش کنترلی ارائه شده در این تحقیق، برای حالت‌های مختلف ارائه شد. با توجه به نتایج شبیه‌سازی به وضوح می‌توان مشاهده کرد که استفاده از روش بکار رفته در این تحقیق، به طور مؤثری سبب صرفه‌جویی در مصرف انرژی ربات می‌شود؛ بنابراین با توجه به بکار بردن اصول کنترل بهینه و اعمال آن‌ها در روابط انرژی ربات می‌توان ادعا نمود که با هر شرایط ابتدایی و انتهایی دلخواه برای حرکت ربات، با استفاده از پروفیل سرعت طراحی شده در این تحقیق، ربات می‌تواند کمترین میزان مصرف انرژی را داشته باشد.

۶- پیوست

با توجه به شکل پ-۱ نیروها و گشتاورهای عکس العمل به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۳۰]:

$$F_{rx}(\dot{q}) = \cos \theta \sum_{i=1}^4 F_{Si} - \sin \theta \sum_{i=1}^4 F_{Li} \quad (\text{پ-۱})$$

$$F_{ry}(\dot{q}) = \sin \theta \sum_{i=1}^4 F_{Si} + \cos \theta \sum_{i=1}^4 F_{Li} \quad (\text{پ-۲})$$

$$M_r(\dot{q}) = c(-F_{S1} - F_{S2} + F_{S3} + F_{S4}) + b(F_{L1} + F_{L3}) - a(F_{L1} + F_{L4}) \quad (\text{پ-۳})$$

- three-wheeled omnidirectional mobile robots. *IEEE Trans Ind Electron* 61(9): 4771-4779.
- [23] Liu S, Sun D (2014) Minimizing energy consumption of wheeled mobile robots via optimal motion planning. *IEEE ASME Trans Mechatron* 19(2): 401-411.
- [24] Azimirad V, Shorakaei H (2014) Dual-hierarchical genetic-optimal: A new global path planning method for robots. *J Manuf Syst* 33(1): 139-148.
- [25] Mushi SE, Lin Z, Allaire PE (2014) Design, construction, and modeling of a flexible rotor active magnetic bearing rig. *IEEE ASME Trans Mechatron* 17(6): 1170-1182.
- [26] Kim H, Kim BK (2008) Minimum-energy translational trajectory planning for battery-powered three-wheeled omnidirectional mobile robots. 10th Int. Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, 1730-1735.
- [27] Mei Y, Lu Y, Lee C, Hu Y (2006) Energy-efficient mobile robot exploration. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 505-511.
- [28] Yi J, Wang H, Zhang J, Song D, Jayasuriya S, Liu J (2009) Kinematic modeling and analysis of skid-steered mobile robots with applications to low-cost inertial-measurement-unit-based motion estimation. *IEEE Trans Robot* 25(5): 1087-1097.
- [29] Wang H, Li B, Liu J, Yang Y, Zhang Y (2011) Dynamic modeling and analysis of wheel skid steered mobile robots with the different angular velocities of four wheels. 30th Chinese Control Conference (CCC), 3919-3942.
- [30] Kozłowski K, Pazderski D, Rudas I, Tar J (2004) Modeling and control of a 4-wheel skid-steering mobile robot: From theory to practice. *Int J Appl Math Comput Sci* 14(4): 477-496.
- [31] Wang D, Low C (2008) Modeling and analysis of skidding and slipping in wheeled mobile robots; Design and perspective. *IEEE Trans Robot* 24(3): 676-687.
- [۳۲] نراقی م، شکوهی دولت‌آبادی ن (۱۳۸۴) سینماتیک و کنترل یک ربات سیار چهار چرخ فرمانش لغزشی در تعقیب مسیر هندسی. سیزدهمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک، اصفهان، دانشگاه صنعتی اصفهان.
- [۳۳] نظری و، نراقی م (۱۳۸۸) کنترل فازی-تطبیقی یک ربات سیار فرمانش لغزشی برای دنبال کردن مسیر. هفدهمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک (ISME 2009)، تهران، دانشگاه تهران.
- [۳۴] محمدپور ا، نراقی م (۱۳۸۹) پایدارسازی مقاوم ربات‌های سیار فرمانش لغزشی با در نظر گرفتن اثرات لغزش چرخ‌ها. نشریه پژوهشی مهندسی مکانیک ایران ۲۸-۶: ۱۲(۲).
- [7] Wu SF, Mei JS, Niu PY (2001) Path guidance and control of a guided wheeled mobile robot *Control Eng Pract* 9(19): 97-105.
- [8] Sun S (2005) Designing approach on trajectory-tracking control of mobile robot. *Rob Comput Integr Manuf* 21(1): 81-85.
- [9] Rehman FU, Ahmed MM (2007) Steering control algorithm for a class of wheeled mobile robots. *IET Control Theory Appl* 1(4): 915-924.
- [10] Aylett R (2002) *Robots: Bringing intelligent machines to life*. Barrons's Educational Inc., USA.
- [11] Hemami A, Mehrabi MG, Cheng RM (1992) Synthesis for an optimal low for path tracking in mobile robots. *Automatica* 28(2): 383-387.
- [12] Makimoto T, Sakai Y (2003) Evolution of low power electronics and its future applications. *Proc. of the Int. on Low Power Electronics and Design*, Seoul, 2-5.
- [13] Spangelo I, Egeland O (1992) Generation of energy-optimal trajectories for an autonomous underwater vehicle. *Proc. the IEEE Int. on Robotics and Automation* 2107-2112.
- [14] Trzynadłowski AM (1988) Energy optimization of a certain of incremental motion DC drives. *IEEE Trans Ind Electron* 35(1): 60-66.
- [15] Wang Y, Chen C, Sung C (2013) Design of a weighted-pendulum type electromagnetic generator for harvesting energy from a rotating wheel. *IEEE ASME Trans Mechatron* 18(2): 754-763.
- [16] Barili A, Ceresa M, Parisi C (1995) Energy-saving motion for an autonomous mobile robot. *Proc. of the IEEE Int. on Industrial Electronics*, Athens, 674-676.
- [17] Weigui W, Huitang C, Peng-Yung W (1999) Optimal Motion planning for a wheeled mobile robot. *Proc. of the IEEE Int. on Robotics and Automation*, Detroit, 41-46.
- [18] Kim CH, Kim BK (2007) Minimum-energy translational trajectory generation for differential-driven wheeled mobile robots. *J Intell Robot Syst* 49(4): 367-383.
- [19] Duleba I, Sasiadek JZ (2003) Nonholonomic motion planning based on newton algorithm with energy optimization. *IEEE Trans Control Syst Technol* 11(3): 355-363.
- [20] Yang J, Qu Z, Wang J, Conrad K (2010) Comparison of optimal solutions to real-time path planning for a mobile vehicle. *IEEE Trans Syst Man Cybern Pt A Syst Humans* 40(4): 721-731.
- [21] Pei SC, Horng JH (1998) Finding the optimal driving path of a car using the modified constrained distance transformation. *IEEE Trans Rob Autom* 14(5): 663-670.
- [22] Kim H, Kim BK (2014) Online minimum-energy trajectory planning and a straight-line path for