



تحلیل و بررسی نتایج تعیین تنش ایجادی یک اتصال چسبی تکلبه

مجتبی حسنوند^۱ و محمد شیشه‌ساز^{۲*}^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، اهواز، گلستان، دانشگاه شهید چمران، دانشکده مهندسی^۲ استاد مکانیک، اهواز، گلستان، دانشگاه شهید چمران، دانشکده مهندسی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۹/۱۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۱۲/۲۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۴/۱۲

چکیده

در این مقاله، ابتدا با کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی دو بعدی با در نظر گرفتن دو فرض وجود کرنش طولی و عدم وجود آن، معادلات تنش ایجادی در لایه چسب بکار رفته در اتصالات چسبی مواد مرکب تحت کشش بدست آورده می‌شود. در این تحلیل، لایه چسب به صورت ایزوتروپیک همگن فرض شده، ورق‌های چسب‌شونده به صورت ورق‌های چندلایه متشکل از ورق‌های ارتوتروپیک فرض شده‌اند. روش بدست‌آوری مقادیر تنش ایجادی در این تحلیل، روش نوین بهبودیافته و پیرایش شده روند تعیین تنش بر مبنای جابه‌جایی است. نتایج این تحلیل با نتایج روش کلاسیک و نتایج روش المان محدود انجام شده توسط نرم‌افزار انسیس مقایسه شد. در پایان مشخص می‌شود که روش مرتبه اول که در آن تنش‌های برشی عرضی حضور دارند، نسبت به روش کلاسیک ورق‌ها در تعیین تنش‌های برشی و تورق دقت بالاتری دارد. در مورد تنش برشی، مقدار بهبود نتایج تفاوت چندانی بین دو روش وجود ندارد. تنش برشی بخصوص در تعیین تنش تورق ایجادی، روش مرتبه اول بسیار دقیقتر از روش کلاسیک عمل می‌کند. همچنین مشخص می‌شود که در نظر گرفتن تاثیر کرنش طولی در تنش‌های ایجادی در لایه چسب، دقت نتایج بدست آمده را بالاتر خواهد برد. فرض کرنش طولی در دقت تعیین تنش برشی لایه چسب، چندان محسوس نبوده، ولی در مورد نتایج تنش تورق بسیار نمایان خواهد بود.

کلمات کلیدی: تحلیل تنش؛ اتصال تکلبه تحت کشش؛ تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی؛ اجزاء محدود؛ کرنش طولی.

An Analysis of Stresses Evaluation Efficacy in Adhesive Single-Lap Joints

M. Hasanvand¹, M. Shishehsaz^{2,*}¹ M.Sc. of Mech Eng., Chamran Univ., Ahvaz, Iran.² Prof. of Mech. Eng., Chamran Univ., Ahvaz, Iran.

Abstract

In this paper, at first stress distribution in a single-lap joint between composite laminates by first order shear deformation theory with and without the presence of longitudinal strain has been evaluated. Adhesive layer is supposed to be isotropic and adherents assumed to be orthotropic laminates. A new improved method of displacement theory has been used to determine stresses distribution. The results of this analytical solution have been compared by the results of finite element and it has been revealed that both methods have similar results. The advantage of this new method compared to classic method is that it has a higher Compatibility by finite element results. In shear stress there is no significant improvement. But it is obvious that the method has assumed length strain in adhesive layer has a higher accuracy in its results. In shear stress distribution, considering of length strain has no significant benefit, but in peeling stress this difference will improve the results significantly in a way that the presence of longitudinal strain has a determinative role in peeling stress distribution.

Keywords: Stress Analysis; Single-lap Joint Under Tension; First Order Shear Deformation Theory; Finite Element; Longitudinal Strain.

۱- مقدمه

اتصال چسبی موفق، اتصالی است که استحکام لازم و دوامی طولانی داشته باشد. اتصالات چسبی از آنجا که مقادیر زیادی از سطوح قطعات چسب‌شونده را استفاده می‌کنند، در کل استحکام بسیار خوب و قابل قبولی را ارائه می‌دهند.

مهمترین عیب اتصالات مکانیکی این است که آن‌ها بار اعمالی را به صورت یکنواخت پخش نکرده، موجب تمرکز تنش شدیدی در برخی از نقاط می‌شوند؛ در عوض اتصالات چسبی می‌توانند به هشتاد درصد استحکام کششی در همه نقاط اتصالشان دست یابند. بدلیل توزیع مناسب نیرو در کل سطح همپوشانی، در اتصالات چسبی خبری از تمرکز تنش شدید و تنش‌های موضعی در دسرساز نیست.

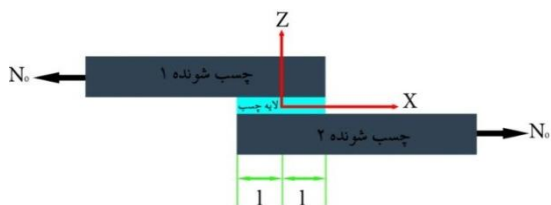
چسب‌ها علاوه بر اینکه عموماً ارزان‌تر و سبک‌تر از اتصالات دیگر با استحکام یکسان‌اند، اتصالات چسبی می‌توانند نقش عایق حرارتی و الکتریکی و همچنین نقش دمپر را برای انواع ضربه، ارتعاش و صدا را نیز داشته، موجب جلوگیری از گسترش ترک‌ها باشند.

تحلیل گولند و ریزنر [۱]، مفهوم تنش خمشی حاصل از عدم همگرایی نیروهای وارده را بیان کرد. هارت‌اسمیت [۲]، تحلیل گولند و ریزنر را تکمیل و بهبود داده، برای موارد مختلف موجب تعمیم و گسترش مدل گولند و ریزنر شد. در مورد تنش‌های ایجاد شده در سطوح مشترک میان چسب و ورق‌های چسب‌شونده، اوپلینگر [۳] تحلیل جامعی ارائه داد. تسای و همکاران [۴]، تحلیل ساده‌ای برای کاربردهای طراحی اولیه ارائه دادند. یانگ و پانگ [۵]، مدل‌هایی مناسب برای بارگذاری‌های مختلف ارائه کردند. در آنالیز مورتسنس و تومسن [۶]، ملاحظات قطعات کامپوزیتی غیرقرینه در اتصالات چسبی متوازن و یا غیرمتوازن بوسیله مدل‌سازی قطعات چسب‌شونده با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها انجام شد. دلالة و همکاران [۷]، در تحلیل جامع خود توانستند که معادلات حاکم بر اتصالات تک‌لبه مواد مرکب تحت بارگذاری‌های مختلف را تعیین نمایند. فارونی و شیشه‌ساز [۸]، تحلیل مناسبی از اتصال تک‌لبه مواد مرکب تحت بارگذاری خمشی را ارائه دادند. احمدی‌جو و شیشه‌ساز [۹] نیز، مدل کلاسیک اتصال تک‌لبه را ارائه کردند. عباس‌زاده و شیشه‌ساز [۱۰] نیز، مدل مناسبی از اتصال تک‌لبه تحت بارگذاری خمشی را ارائه کردند.

در این تئوری، معادلات اتصال تک‌لبه تحت بارگذاری کششی را با کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و با در نظر گرفتن میزان تاثیرات ضخامت ورق‌ها روی تعیین تنش‌های برشی و تورتق ایجاد شده در لایه چسب بدست خواهد آمد.

۲- بدست‌آوری معادلات حاکم بر اتصال

در اینجا فرض می‌شود که قطعات چسب‌شونده، ورق‌های چندلایه‌ای کامپوزیتی بوده، هر لایه آن‌ها ارتوتروپیک فرض شده که می‌توانند خصوصیات متفاوتی داشته باشند. لایه چسب نیز به صورت یک جسم همگن ایزوتروپیک فرض شده است. در شکل ۱، نمونه‌ای از شمای کلی این اتصال را مشاهده می‌نمایید.



شکل ۱- شمای کلی یک اتصال تک‌لبه تحت کشش

در ابتدا لازم است تا یک سری فرض‌هایی برای ساده‌سازی مناسب در نظر گرفته شود. این فرض‌ها عبارتند از:

- ۱- ابتدا باید اعلام کرد که مسئله را در راستای عرضی (محور Y) ثابت فرض کرده، برای عرض مقدار واحد را در نظر گرفته می‌شود.
- ۲- صرف نظر کردن از تنش طولی چسب، زیرا در برابر قطعات چسب‌شونده، تنش طولی قابل صرف‌نظر کردن خواهد بود.
- ۳- چسب و قطعات چسب‌شونده در حیطه الاستیک خطی عمل کرده، از قانون هوک تبعیت و پیروی می‌کند.
- ۴- تنش در راستای ضخامت لایه چسب، در آن ثابت باقی می‌ماند.

۳- روابط تعادل

ابتدا باید تعادل کلی اتصال را در نظر گرفت. در شکل ۲، نمای نیروی وارده به کل اتصال که موجب ایجاد تعادل در آن می‌شوند را مشاهده می‌کنید:

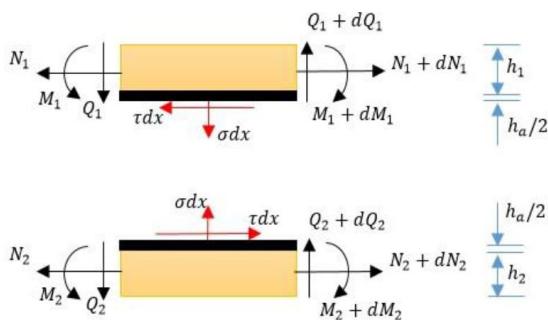
وارد شوند. ثابت ماندن مقادیر طول بردارهای نرمال عرضی مستلزم آن است که خیز تابعی از مختصات راستای ضخامت باشد. تحت همان فرض و محدودیت تئوری کلاسیک ورق‌ها، میدان جابه‌جایی تئوری مرتبه اول به فرم زیر در می‌آیند:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + Z\varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + Z\varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (11)$$

در معادله (۱۱)، (u_0, v_0, w_0) مقادیر جابه‌جایی نقطه‌ای روی صفحه $Z=0$ را به ترتیب در جهات اصلی (x, y, z) را نشان می‌دهند.

کرنش‌های خطی مرتبط با جابه‌جایی، بوسیله جایگذاری رابطه (۱۱) در معادلات روابط کرنش‌های غشایی $(\epsilon_{xx}^{(0)}, \epsilon_{yy}^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)})$ و کرنش‌های خمشی $(\epsilon_{xx}^{(1)}, \epsilon_{yy}^{(1)}, \gamma_{xy}^{(1)})$ بدست خواهد آمد:

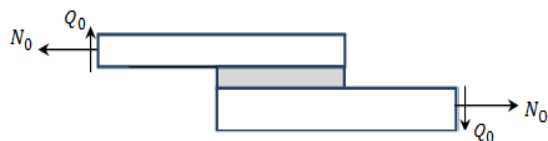
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta u_0}{\delta x} \\ \frac{\delta v_0}{\delta y} \\ \frac{\delta w_0}{\delta y} + \varphi_y \\ \frac{\delta w_0}{\delta x} + \varphi_x \\ \frac{\delta u_0}{\delta y} + \frac{\delta v_0}{\delta x} \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\delta \varphi_x}{\delta x} \\ \frac{\delta \varphi_y}{\delta y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\delta \varphi_x}{\delta y} + \frac{\delta \varphi_y}{\delta x} \end{Bmatrix} \quad (12)$$



شکل ۳- نمای تقسیم ناحیه‌ی همپوشانی اتصال، به دو قسمت بالایی و پایینی



شکل ۴- نمایی از برش عرض اتصال



شکل ۲- نمای نیروهای تکیه‌گاهی ایجاد می‌کنند کل سازه

باتوجه به شکل، برای تعادل گشتاور سازه میتوان نتیجه گرفت:

$$Q_0 = \frac{(h_a + \frac{h_1 + h_2}{2})}{2l + L_1 + L_2} N_0 \quad (1)$$

حال قسمت ناحیه همپوشانی بوسیله یک صفحه افقی فرضی، به دو قسمت تقسیم می‌شود. با استفاده از روابط تعادل می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{dN_1}{dx} = \tau_a \quad (2)$$

$$\frac{dN_2}{dx} = -\tau_a \quad (3)$$

$$\frac{dQ_1}{dx} = \sigma_a \quad (4)$$

$$\frac{dQ_2}{dx} = -\sigma_a \quad (5)$$

$$\frac{dM_1}{dx} = Q_1 - \tau_a \frac{h_a + h_1}{2} \quad (6)$$

$$\frac{dM_2}{dx} = Q_2 - \tau_a \frac{h_a + h_2}{2} \quad (7)$$

از سویی می‌توان همانند شکل ۴، در طول ناحیه همپوشانی، از عرض اتصال را برش زده، تعادل یک نیمه ناحیه همپوشانی را برقرار کرد:

$$N_0 = N_1 + N_2 \quad (8)$$

$$Q_1 + Q_2 = -\frac{h_a + (\frac{h_1 + h_2}{2})}{L_1 + L_2 + 2l} N_0 \quad (9)$$

$$M_2 = -M_1 + \left(h_a + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) \right) (N_0 - N_1) - \frac{h_a + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)}{L_1 + L_2 + 2l} N_0 (L_1 + l + x) \quad (10)$$

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق‌های چندلایه، تئوری کلاسیک با تغییرات و حذف بخش‌هایی مورد استفاده مجدد قرار می‌گیرد. یکی از تمایزات مهم تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول از تئوری کلاسیک، فرض این است که خطوط نرمال عرضی که بر صفحه میانی عمودند، پس از تغییر شکل عمود باقی نخواهند ماند. این تغییرات در فرض‌ها موجب می‌شود که کرنش‌های برشی عرضی نیز، به محاسبات

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij}^{(k)}) (Z_{k+1} - Z_k) \quad (16)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij}^{(k)}) (Z_{k+1}^2 - Z_k^2) \quad (17)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij}^{(k)}) (Z_{k+1}^3 - Z_k^3) \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \varepsilon^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\delta w_0}{\delta x} + \varphi_x \\ \frac{\delta w_0}{\delta y} + \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (20)$$

از سویی برای این اتصال، شروط زیر وجود دارند:

$$N_y = N_{xy} = M_y = M_{xy} = Q_y = 0 \quad (21)$$

با توجه به شروط (۲۱) عبارات زیر را بدست آورد:

$$N^i = (A_{11}u_{0,x})^i + (B_{11}\varphi_{x,x})^i \quad (22)$$

$$M^i = (B_{11}u_{0,x})^i + (D_{11}\varphi_{x,x})^i \quad (23)$$

$$Q^i = K(A_{55}(\frac{\delta w_0}{\delta x} + \varphi_x))^i \quad (24)$$

که در معادلات فوق i ، شماره قطعات چسب‌شونده است. به ترتیب، برای قطعات چسب‌شونده اول و دوم، $i=1$ و $i=2$ است.

$$N^i = \left(A_{11} \left(\frac{\delta u_0}{\delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta w_0}{\delta x} \right)^2 \right) \right)^i + (B_{11}\varphi_{x,x})^i \quad (25)$$

$$M^i = \left(B_{11} \left(\frac{\delta u_0}{\delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta w_0}{\delta x} \right)^2 \right) \right)^i + (D_{11}\varphi_{x,x})^i \quad (26)$$

$$Q^i = K(A_{55}(\frac{\delta w_0}{\delta x} + \varphi_x))^i \quad (27)$$

که i شماره قطعات چسب‌شونده بوده، به این ترتیب که برای قطعات چسب‌شونده بالایی و پایینی، $i=1$ و $i=2$ است.

با استفاده از معادلات (۲۵)، (۲۶)، و (۲۷) می‌توان عبارات (۲۸-۳۰) را بدست آورد:

$$\left(\frac{du_0}{dx} \right)_i = a_i N_i - b_i M_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta w_0}{\delta x} \right)^2 \quad (28)$$

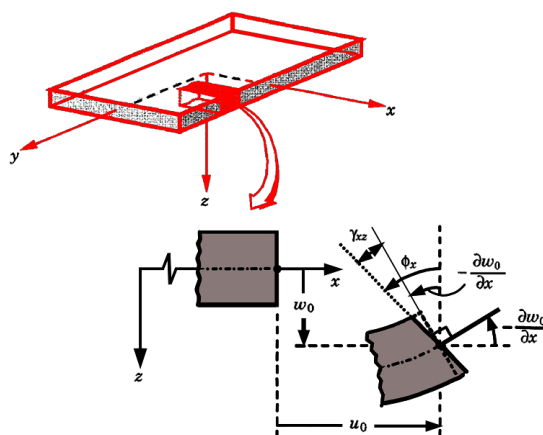
$$(\varphi_x)_i = c_i N_i - d_i M_i \quad (29)$$

$$\frac{dw_0^i}{dx} = e_i \frac{dM_i}{dx} + f_i \tau_a - \varphi_x^i \quad (30)$$

که در عبارات فوق، ضرایب $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ به صورت عبارات (۳۱) تعریف خواهند شد:

$$a_i = \left(\frac{D_{11}}{A_{11}D_{11} - B_{11}^2} \right)^i$$

$$b_i = \left(\frac{B_{11}}{A_{11}D_{11} - B_{11}^2} \right)^i$$



شکل ۵- تفاوت میان تئوری مرتبه اول و تئوری کلاسیک ورق‌ها

می‌توان روابط ما بین تنش‌های جهات اصلی را با نیروها، گشتاورها و نیروهای عرضی در جهات محورهای اصلی مختصات را به ترتیب در روابط (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) مشاهده خواهید کرد.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} Z dz \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (15)$$

از آنجا که کرنش‌های عرضی برشی در طول ضخامت ورق چندلایه ثابت فرض شده‌اند، باید فرض کرد که تنش‌های برشی عرضی نیز باید در عرض ورق ثابت فرض شود. اختلاف مقدار میان وضعیت حقیقی تنش و وضعیت تنش ثابتی که بوسیله تئوری مرتبه اول بدست می‌آید، معمولاً در محاسبه نتایج نیروهای برشی (Q_x و Q_y) تصحیح می‌شود. می‌توان با فرض مناسب ضریب K ، دقت محاسباتی را تا حد مطلوبی افزایش داد.

معادلات ساختمانی ورق چندلایه:

روابط میان نیروها، گشتاورها و نیروهای عرضی و کرنش‌های غشایی و کرنش‌های خمشی ($\varepsilon_{xx}^{(1)}, \varepsilon_{yy}^{(1)}, \gamma_{xy}^{(1)}$) را می‌توان ایجاد کرد. البته برای انجام این کار، به تعریف سفتی‌های کششی (A_{ij})، سفتی‌های خمشی (D_{ij}) و سفتی کوپلینگ خمشی-کششی (B_{ij}) نیاز است.

$$\begin{aligned}
 K_1 &= -\frac{G_a}{h_a} \left(a_1 - \frac{h_1}{2} c_1 + a_2 + \frac{h_2}{2} c_2 + \left(h_a + \left(\frac{h_1+h_2}{2} \right) \right) \left(-b_2 - \frac{h_2}{2} d_2 \right) \right) \\
 K_2 &= \frac{G_a}{h_a} \left(b_1 - \frac{h_1}{2} d_1 + b_2 + \frac{h_2}{2} d_2 \right) \\
 K_3 &= +\frac{G_a}{h_a} \left(\frac{h_a + \left(\frac{h_1+h_2}{2} \right)}{L_1+L_2+2l} N_0 x \left(+b_2 + \frac{h_2}{2} d_2 \right) \right) \\
 K_4 &= -\frac{G_a}{h_a} N_0 \left(\left(-a_2 - \frac{h_2}{2} c_2 \right) + \left(h_a + \left(\frac{h_1+h_2}{2} \right) \right) \frac{L_2+1}{L_1+L_2+2l} \left(b_2 + \frac{h_2}{2} d_2 \right) \right) \quad (37)
 \end{aligned}$$

اگر از عبارت (۳۶) دو بار مشتق گرفته و عبارات (۲۸)، (۲۹)، (۳۰)، را در آن جایگذاری کرد؛ با توجه به عبارات (۸) و (۱۰) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^4 M_1}{dx^4} + S_1 \frac{d^4 N_1}{dx^4} + S_2 \frac{d^2 N_1}{dx^2} + S_3 \frac{d^2 M_1}{dx^2} + S_4 N_1 + S_5 M_1 + S_6 x + S_7 = 0 \quad (38)
 \end{aligned}$$

که در عبارت فوق نیز ضرایب S_i به صورت روابط (۳۹) تعریف خواهند شد.

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \left(\frac{h_a + h_1}{2} \right) \\
 S_2 &= -\frac{1}{Th_a} \left(\left(h_a + \left(\frac{h_1+h_2}{2} \right) \right) e_2 + (f_1 - f_2) + \frac{Z}{2} \left(h_a + \left(\frac{h_1+h_2}{2} \right) \right) \left(b_2 + \frac{h_2}{2} d_2 \right) + \frac{Z}{2} \left(a_1 - \frac{h_1}{2} c_1 - a_2 - \frac{h_2}{2} c_2 \right) \right) \\
 S_3 &= -\frac{1}{Th_a} \left(e_1 + e_2 - \frac{Z}{2} b_1 + \frac{Z}{2} b_2 + \frac{h_1}{2} \frac{Z}{2} d_1 + \frac{h_2}{2} \frac{Z}{2} d_2 \right) \\
 S_4 &= -\frac{1}{Th_a} \left(-c_2 - c_1 + \left(h_a + \left(\frac{h_1+h_2}{2} \right) \right) d_2 \right) \\
 S_5 &= -\frac{1}{Th_a} (d_1 + d_2) \\
 S_6 &= -\frac{\left(h_a + \left(\frac{h_1+h_2}{2} \right) \right)}{L_1 + L_2 + 2l} N_0 (d_2) \frac{1}{Th_a} \\
 S_7 &= -N_0 \frac{1}{Th_a} \left(c_2 - \frac{h_a + \left(\frac{h_1+h_2}{2} \right)}{L_1+L_2+2l} (L_2 + l) d_2 \right) \quad (39)
 \end{aligned}$$

با ترکیب معادلات (۳۶) و (۳۸) می‌توان در نهایت به معادله‌ای به صورت رابطه (۴۰) دست یافت:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^6 N_1}{dx^6} + (K_1 - K_2 S_1 + S_3) \frac{d^4 N_1}{dx^4} + (-K_2 S_2 + S_3 K_1 + S_5) \frac{d^2 N_1}{dx^2} + (-K_2 S_4 + S_5 K_1) N_1 + (-K_2 S_6 + S_5 K_3) x + (-K_2 S_7 + S_5 K_4) = 0 \quad (40)
 \end{aligned}$$

در نهایت جواب مسئله به فرم ترکیبی از دو پاسخ عمومی و خصوصی بدست می‌آید. سه جفت پاسخ حقیقی که

$$\begin{aligned}
 c_i &= \left(\frac{B_{11}}{B_{11}^2 - A_{11} D_{11}} \right)^i \\
 d_i &= \left(\frac{A_{11}}{B_{11}^2 - A_{11} D_{11}} \right)^i \\
 e_i &= \left(\frac{1}{KA_{55}} \right)^i \\
 f_i &= \left(\frac{1}{KA_{55}^i} \left(\frac{h_a + h_i}{2} \right) \right)^i \quad (31)
 \end{aligned}$$

در این تحلیل، همانند بسیاری از تحلیل‌های دیگر، کرنش طولی برابر میانگین کرنش‌های سطوح بالایی و پایینی لایه چسب؛ کرنش عمودی تورق به صورت تغییر فاصله میانی دو ورق و کرنش برشی چسب نیز بر اساس جابه‌جایی و چرخش دو صفحه ورق‌های چسب‌شونده محاسبه می‌شود. این کرنش‌ها را می‌توان به فرم رابطه (۳۲) بیان کرد.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{h_a} (w_1^0 - w_2^0) \\
 \gamma_{xz} &= \frac{1}{h_a} (u_0^1 - u_0^2 - \frac{h^1}{2} \varphi_x^1 - \frac{h^2}{2} \varphi_x^2) \\
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_1}{\delta x} + \frac{\delta u_2}{\delta x} \right) \quad (32)
 \end{aligned}$$

فرض وجود کرنش طولی ایجاد می‌کند در لایه‌ی چسب:

از آنجا که طبق فرض در نظر گرفته شده، لایه چسب بر اساس قانون هوک عمل می‌نماید؛ می‌توان برآحتی تنش‌های برشی و تورق را در زمان فرض وجود کرنش طولی یافت:

$$\tau_a = \frac{G_a}{h_a} (u_0^1 - u_0^2 - \frac{h_1}{2} \varphi_x^1 - \frac{h_2}{2} \varphi_x^2) \quad (33)$$

$$\sigma_a = \frac{1}{Th_a} \left[(w_0^1 - w_0^2) + \frac{Z}{2} (u_{0,x}^1 + u_{0,x}^2 - \frac{h^1}{2} \varphi_{x,x}^1 + \frac{h^2}{2} \varphi_{x,x}^2) \right] \quad (34)$$

که در معادله‌ی (۳۴)، Z و T به صورت روابط (۳۵) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{\vartheta_a h_a}{(1 - \vartheta_a)} \\
 T &= \frac{1 - 3\vartheta_a^2 - 2\vartheta_a^3}{E_a (1 - \vartheta_a^2)} \quad (35)
 \end{aligned}$$

حال اگر از عبارت (۳۳) یک بار مشتق گرفته و عبارات (۲۸)، (۲۹)، (۳۰)، را در آن جایگذاری کرد؛ با توجه به عبارات (۸) و (۱۰) در نهایت به فرم زیر می‌توان دست یافت:

$$\frac{d^2 N_1}{dx^2} + K_1 N_1 + K_2 M_1 + K_3 x + K_4 = 0 \quad (36)$$

که در عبارت فوق ضرایب به فرم روابط (۳۷) تعریف می‌شوند:

که در عبارت (۴۷)، ضرایب به صورت مجموعه روابط (۴۸) تعریف خواهند شد:

$$K_1 = -\frac{G_a}{h_a} \left(a_1 - \frac{h_1}{2} c_1 + a_2 + \frac{h_2}{2} c_2 + (h_a + \frac{h_1+h_2}{2}) \left(-b_2 - \frac{h_2}{2} d_2 \right) \right)$$

$$K_2 = \frac{G_a}{h_a} \left(b_1 - \frac{h_1}{2} d_1 + b_2 + \frac{h_2}{2} d_2 \right)$$

$$K_3 = + \frac{G_a}{h_a} \left(\frac{h_a + \frac{h_1+h_2}{2}}{L_1+L_2+2l} N_0 x \left(+b_2 + \frac{h_2}{2} d_2 \right) \right)$$

$$K_4 = -\frac{G_a}{h_a} N_0 \left(\left(-a_2 - \frac{h_2}{2} c_2 \right) + \left(h_a + \frac{h_1+h_2}{2} \right) \frac{L_2+l}{L_1+L_2+2l} \left(b_2 + \frac{h_2}{2} d_2 \right) \right) \quad (48)$$

با استفاده از روشی مشابه قبل می‌توان عبارتی شبیه به رابطه (۳۸) را بدست آورد:

$$\frac{d^4 M_1}{dx^4} + S_1 \frac{d^4 N_1}{dx^4} + S_2 \frac{d^2 N_1}{dx^2} + S_3 \frac{d^2 M_1}{dx^2} + S_4 N_1 + S_5 M_1 + S_6 x + S_7 = 0 \quad (49)$$

که در عبارت فوق نیز ضرایب S_i ، به صورت روابط (۵۰) تعریف خواهند شد.

$$S_1 = \left(\frac{h_a+h_1}{2} \right)$$

$$S_2 = -\frac{1}{Th_a} \left((h_a + \frac{h_1+h_2}{2}) e_2 + (f_1 - f_2) \right)$$

$$S_3 = -\frac{1}{Th_a} (e_1 + e_2)$$

$$S_4 = -\frac{1}{Th_a} \left[\left(-c_2 - c_1 + (h_a + \frac{h_1+h_2}{2}) d_2 \right) \right]$$

$$S_5 = -\frac{1}{Th_a} (d_1 + d_2)$$

$$S_6 = -\frac{H}{L_1+L_2+2l} N_0 (d_2) \frac{1}{Th_a} \quad (50)$$

ما بقی روند حل، مشابه قبل خواهد بود، پاسخ‌ها حالتی مشابه خواهند داشت.

روش کلاسیک:

این روش را می‌توان فرمی ساده شده از روش قبل دانست [۹]. میادین جابه‌جایی در این روش، به فرم رابطه (۵۱) در خواهند آمد:

$$u^i(x, y, z) = u_0^i(x, y) - z w_x^i$$

$$v^i(x, y, z) = v_0^i(x, y) - z w_y^i$$

$$w^i(x, y, z) = w_0^i(x, y) \quad (51)$$

به روشی مشابه روش دستیابی به معادلات (۲۲) و (۲۳) می‌توان معادلات (۴۶-۴۷) را یافت:

$$N^i = (A_{11} u_{0,x})^i - (B_{11} w_{,xx})^i \quad (52)$$

$$M^i = (B_{11} u_{0,x})^i - (D_{11} w_{,xx})^i \quad (53)$$

در روش کلاسیک، در روشی مشابه؛ تنش‌های برشی و تورق به روابط (۵۴-۵۵) در خواهند آمد.

هر جفت از اعداد شامل یک عدد و قرینه آن است بدست خواهد آمد. فرم N_1 به صورت رابطه (۴۱) بوده که شامل دو بخش حل عمومی و خصوصی خواهد بود.

$$N_1 = r_1 e^{i_1 x} + r_2 e^{i_2 x} + r_3 e^{i_3 x} + r_4 e^{i_4 x} + r_5 e^{i_5 x} + r_6 e^{i_6 x} + (r_7 x + r_8) \quad (41)$$

که در اینجا i_i ها ضرایبی ثابت و مجهول‌اند. بدست‌آوری مقادیر این ضرایب؛ در مراحل آتی انجام خواهد شد.

بخش خصوصی معادله (۴۱) معلوم بوده، ضرایب آن به فرم روابط (۴۲-۴۳) خواهد بود:

$$r_7 = \frac{(-K_2 S_6 + S_5 K_3)}{(-K_2 S_4 + S_5 K_1)} \quad (42)$$

$$r_8 = \frac{(-K_2 S_7 + S_5 K_4)}{(-K_2 S_4 + S_5 K_1)} \quad (43)$$

با استفاده از معادلات (۸)، (۳۶)، (۱۰)، (۶) و (۷) می‌توان به ترتیب N_2, M_1, M_2, Q_1 و Q_2 را بدست آورد.

اما خود این توابع بدست آمده دارای ضرایب ثابتی بوده که مجهول‌اند $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$. این ضرایب از طریق تعیین مقادیر شرایط مرزی باید بدست آیند. برای تعیین این ضرایب مجهول، به شش شرط مرزی نیاز است که این شروط مرزی عبارتند از:

$$\begin{cases} @x = +l \rightarrow N_1 = M_1 = Q_1 = 0 \\ @x = -l \rightarrow N_2 = M_2 = Q_2 = 0 \end{cases} \quad (44)$$

حال که ضرایب ثابت مجهول تعیین شدند، می‌توان با کمک عبارات (۲) و (۴)، به ترتیب تنش‌های برشی و تورق را یافت.

فرض عدم وجود کرنش طولی ایجاد می‌کند در لایه چسب:

در صورتی که از تاثیر کرنش طولی ایجاد می‌کند صرف‌نظر شود، روش حل تقریباً مشابه قبل بوده، تنها تفاوت موجود، در معادله (۳۳) است. تنش‌های برشی و تورق در زمان عدم وجود کرنش طولی، به صورت روابط (۴۵) و (۴۶) در خواهند آمد.

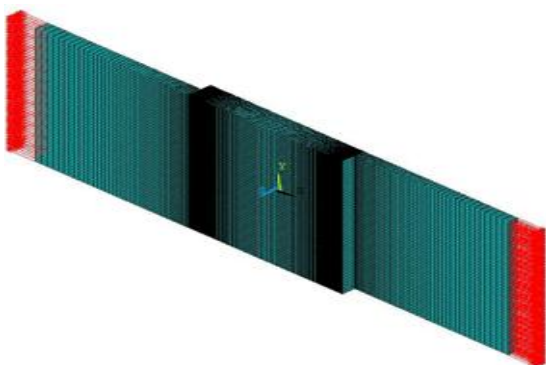
$$\tau_a = \frac{G_a}{h_a} (u_0^1 - u_0^2 - \frac{h_1}{2} \phi_x^1 - \frac{h_2}{2} \phi_x^2) \quad (45)$$

$$\sigma_a = \frac{E_a}{h_a} (w_0^1 - w_0^2) \quad (46)$$

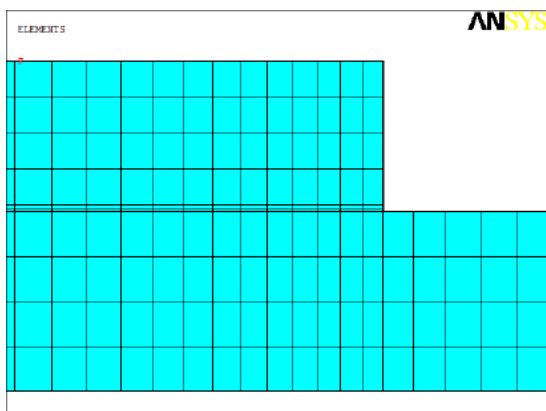
در صورتی که همانند روش تعیین تنش‌های برشی و تورق در زمان وجود کرنش طولی عمل شود، رابطه‌ای همچون رابطه (۳۶) بدست آمده که در آن تنها ضرایب K_i تفاوت خواهند داشت:

$$\frac{d^2 N_1}{dx^2} + K_1 N_1 + K_2 M_1 + K_3 x + K_4 = 0 \quad (47)$$

نسخه ۱۳ استفاده شد. مثال فرض شده، هیچ‌گونه شرط خاصی اعم از تقارن ورق‌های چندلایه، بالانس بودن و یا همسانی ورق‌ها و یا نداشتن این شروط را ندارد. تحلیل صورت پذیرفته در انسیس به صورت سه بعدی بوده، المان بکار رفته برای ورق‌ها و لایه چسب از نوع Solid185 است. برای لایه چسب از نوع ساده این المان و برای ورق‌های چسب‌شونده از المان لایه‌ای استفاده می‌شود. المان Solid185، توانایی ایجاد ساختار لایه‌ای دارد. از این المان برای پوسته‌های ضخیم و یا حجم‌ها استفاده می‌شود. تعریف بخش لایه‌ای توسط دستوراتی مشخص بکار می‌رود. قیود هم به این صورت ایجاد شد که در یک طرف تمام نقاط یک لبه در سه جهت مقید گشته و لبه دیگر، دارای دو قید در جهات عرضی است. برای انجام روش تحلیلی نیز، از نرم‌افزار متلب نسخه ۲۰۰۸ استفاده گردید.



شکل ۶- نمونه‌ی مدل‌سازی شده در نرم‌افزار انسیس



شکل ۷- نمونه‌ی المان‌بندی مدل ساخته شده در نرم‌افزار انسیس

$$\tau_a = \frac{G_a}{h_a} (u_0^1 - u_0^2 + \frac{h_1}{2} w_{01,x} + \frac{h_2}{2} w_{02,x}) \quad (54)$$

$$\sigma_a = \frac{1}{Th_a} (w_0^1 - w_0^2) \quad (55)$$

برای حل به این روش نیز، به روشی مشابه می‌توان عمل کرد. روند حل کاملاً مشابه بوده، نیازی به توضیحی دوباره در مورد روند حل نیاز نیست. با طی روند حلی مشابه، معادلات (۵۶) از طریق روش کلاسیک بدست خواهند آمد. معادله‌ی (۳۶) به صورت رابطه (۵۶) در خواهد آمد:

$$\frac{d^2 N_1}{dx^2} + K_1 N_1 + K_2 M_1 + K_3 x + K_4 = 0 \quad (56)$$

که در معادله (۵۶)، ضرایب K_i به صورت مشابه روابط (۴۸) تعریف خواهند شد:

$$K_1 = -\frac{G_a}{h_a} \left(a_1 - \frac{h_1}{2} c_1 + a_2 + \frac{h_2}{2} c_2 - (h_a + \left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)) \left(b_2 + \frac{h_2}{2} d_2 \right) \right)$$

$$K_2 = -\frac{G_a}{h_a} \left(-b_1 + \frac{h_1}{2} d_1 - b_2 - \frac{h_2}{2} d_2 \right)$$

$$K_3 = \frac{G_a}{h_a} \left(\frac{(h_a + \frac{h_1+h_2}{2}) N_0}{L_1+L_2+2l} \left(b_2 + \frac{h_2}{2} d_2 \right) \right)$$

$$K_4 = -\frac{G_a}{h_a} N_0 \left(\left(-a_2 - \frac{h_2}{2} c_2 \right) + \frac{H}{L_1+L_2+2l} (L_2 + l) \left(b_2 + \frac{h_2}{2} d_2 \right) \right)$$

معادله (۳۸) هم به صورت رابطه (۵۷) خواهد بود:

$$\frac{d^4 M_1}{dx^4} + S_1 \frac{d^4 N_1}{dx^4} + S_2 N_1 + S_3 M_1 + S_4 x + S_5 = 0 \quad (57)$$

که در معادله (۵۷)، ضرایب S_i نیز به شکل مشابه مجموعه روابط (۵۰) تعریف خواهند شد:

$$S_1 = \left(\frac{h_a + h_1}{2} \right)$$

$$S_2 = -\frac{E_a}{h_a} \left(-c_1 - c_2 + (h_a + \left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)) d_2 \right)$$

$$S_3 = -\frac{E_a}{h_a} (d_1 + d_2)$$

$$S_4 = -\frac{(h_a + \left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)) N_0 d_2 E_a}{L_1 + L_2 + 2l h_a}$$

$$S_5 = -\frac{E_a}{h_a} N_0 \left(c_2 - \frac{(h_a + \frac{h_1+h_2}{2}) d_2}{L_1+L_2+2l} (L_2 + l) \right)$$

ما بقی روند حل، مشابه قبل خواهد بوده، پاسخ‌ها حالتی مشابه خواهند داشت.

۱-۴- تحلیل عددی

برای مقایسه درستی روش تحلیلی صورت پذیرفته، مقایسه یک نمونه دلخواه با نتایج بدست آمده از روش اجزاء محدود صورت پذیرفت. برای انجام این امر، از نرم‌افزار انسیس

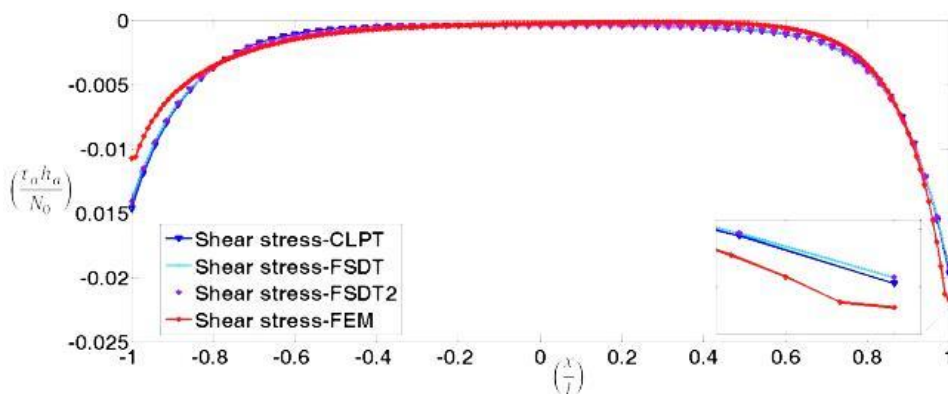
اشکال ۸ و ۹ عیان است، در مورد تعیین تنش‌های برشی؛ نتایج حاصله از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، بهتر از تئوری کلاسیک بوده؛ البته اختلاف چندانی بین دو روش وجود ندارد؛ اما در مورد تنش‌های تورق، بجز ناحیه مرکز اتصال، تئوری کلاسیک نمی‌تواند رفتار واقعی تنش تورق را در حدود روش تئوری مرتبه اول پیش‌بینی نماید.

جدول ۱- خصوصیات فرض شده در نمونه [۵]

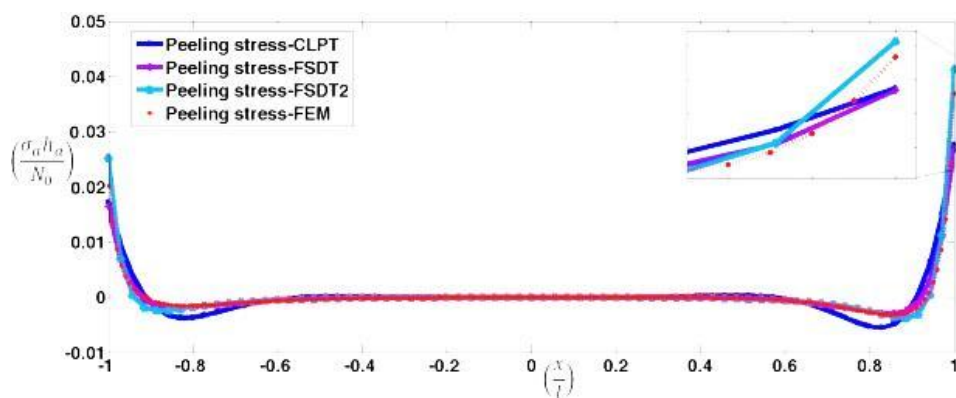
	Young's Modulus	Shear modulus	Poisson's ratio
Graphite/epoxy (Gpa)	$E_1=181/0$ $E_2=E_3=10/3$	$G_{12}=G_{13}=7/17$	$\nu_{12} = \nu_{13} = 0/28$
EpoxyMetbond (Gpa)	$E_a=0/96$	$G=0/34$	$\nu=0/41$

در روش معرفی شده، جنس ورق‌ها می‌تواند متفاوت باشد، ولی در اینجا فرض شده است که ورق‌ها هم‌جنس می‌باشند. جنس ورق‌ها از گرافیت-اپوکسی بوده، جنس چسب از اپوکسی است. ضخامت هر تک‌لایه ورق‌ها ۰/۲ میلی‌متر و ضخامت لایه چسب ۰/۱ میلی‌متر؛ ناحیه همپوشانی ۲۰/۰ میلی‌متر و ناحیه خارج از همپوشانی ۶۰/۰ میلی‌متر فرض شد. چیدمان لایه‌های ورق‌ها نیز به فرم $[30_2,60_2,70,80,90_2,0_4,60_2,30_2]$ و $[30_2,60_2,90_4,60_2,30_2]$ فرض شد.

نتایج حاصله، مقادیر متغیرهای مختلف در قالب نمودارهایی به فرم زیر است:
در نمودارهای ۸ و ۹، CLPT معرف نمودار تئوری کلاسیک، FSDT معرف نمودار تئوری مرتبه اول بدون در نظر گرفتن کرنش طولی، FSDT2 معرف نمودار تئوری مرتبه اول با در نظر گرفتن کرنش طولی و FEM معرف نمودار نتایج روش اجزاء محدود است. همان‌طور که از



شکل ۸- توزیع تنش برشی



شکل ۹- توزیع تنش تورق

۵- نتیجه‌گیری

به منظور بررسی رفتار یک اتصال تک‌لبه تحت بارگذاری کششی، یک مدل تحلیلی با توجه به فرضیات تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تحت دو فرض جود و عدم وجود کرنش طولی و همچنین با توجه به فرضیات کلاسیک بدست آمد. سپس به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصله از نرم‌افزار جامع اجزاء محدود انسیس استفاده گردید. با مقایسه بین نمودارهای تعیین شده توسط روش‌های تحلیلی و روش اجزاء محدود مشخص شد که:

۱- با توجه به نمودار تنش برشی می‌توان دریافت که در تعیین تنش برشی، روش تئوری مرتبه اول، نسبت به تئوری کلاسیک ارجعیت چندانی ندارد.

۲- در صورتی که به نمودار تنش تورق نگاهی انداخت؛ می‌توان دریافت که در تعیین تنش تورق، روش تئوری مرتبه اول، نسبت به تئوری کلاسیک، دقت اندک مناسب‌تری دارد.

۳- در مورد تعیین تنش‌های برشی در نقاط انتهایی، هردو روش کلاسیک و تئوری مرتبه اول، مقداری حدوداً برابر را با مقدار تعیین شده از روش اجزاء محدود نشان می‌دهند.

۴- تمامی هر سه روش بیان شده در تمامی حالات بررسی شده، مثال‌های انجام پذیرفته اختلافی بسیار اندک با یکدیگر داشته که در بیشترین اختلاف ایجاد، مقادیر آنها تا حدود ۰.۴٪ اختلاف خواهد داشت.

۵- باید اقرار کرد، در مورد تعیین تنش‌های تورق در نقاط انتهایی، هردو روش کلاسیک و تئوری مرتبه اول بدون فرض کرنش طولی، مقداری حدوداً برابر بهم را نشان داده، ولی این مقادیر، با مقدار تعیین شده از روش اجزاء محدود اختلافی دارند که گاهی تا حدوداً ۰.۳٪ می‌رسد.

۶- نتایج تحلیل تئوری مرتبه اول که در آن تاثیرات کرنش طولی چسب در نظر گرفته می‌شود، تنش تورق با دقت بسیار مناسبی در لبه‌ها تعیین خواهد شد. فرض وجود کرنش طولی در لایه چسب می-

تواند دقت نتایج توزیع تنش را تا حدود ۰.۴٪ برساند.

۷- باتوجه به میزان دقت مناسب تنش برشی تعیین شده از روش کلاسیک و روش تئوری مرتبه اول بدون فرض وجود کرنش‌های طولی، می‌توان از این روش‌ها برای تعیین تنش برشی در این دسته از اتصالات استفاده کرد؛ اما با توجه به دقت پایین این روش‌ها در تعیین تنش‌های تورق، بهتر است که از روش تئوری مرتبه اول با فرض وجود کرنش طولی برای تعیین تنش تورق استفاده نمود.

۶- مراجع

- [1] Hart-Smith LJ (1986) Adhesively bonded joints for fibrous composite structures. International Symposium on joining and Repair of fibre-reinforced plastics, London, Imperial College.
- [2] Goland M, Reissner E (1944) The stresses in cemented joints. J Appl Mech 11(1): 17-27.
- [3] Oplinger DW (1994) Effects of adherend deflections in single lap joints. Int J Solids Struct 31(18): 2565-2587.
- [4] Tsai MY, Oplinger DW, Morton J (1995) Improved theoretical solutions for adhesive lap joints. Int J Solids Struct 35(12): 1163-1185.
- [5] Yang C, Pang S-S (1993) Stress-strain analysis of adhesive-bonded single-lap composite joints under cylindrical bending. Compos Eng 3(11): 1051-1063.
- [6] Mortensen F, Thomsen O (2002) Analysis of adhesive bonded joints: a unified approach. Compos Sci Technol 62(7-8): 1011-1031.
- [7] Delale F, Erdoghan F, Aydingolu M (1981) Stress in adhesive bonded joints. J Compos Mater 15: 249-271.
- [8] Renton J, Vinson J (1975) The Efficient design of adhesive bonded joints. J Adhesion 7(3): 175-193.

[۹] قارونی م، ح، شیشه‌ساز م (۱۳۹۳) بررسی تاثیر خواص مکانیکی بر توزیع تنش در اتصال چسبی تک‌لبه تحت اثر گشتاور خمشی. بیست و دومین همایش سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک ایران، اهواز، دانشگاه شهید چمران.

[۱۰] احمدی جو م، شیشه‌ساز م (۱۳۹۳) بررسی توزیع تنش در یک اتصال تک لبه‌ی کامپوزیتی بالانس نشده تحت کشش. بیست و دومین همایش سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک ایران، اهواز، دانشگاه شهید چمران.

[۱۲] مطیع‌قادر ح، لطفی ش، سید اسفهلان م (۱۳۸۹) مروری بر برخی از روش‌های بهینه‌سازی هوشمند. نشر دانشگاه آزاد اسلامی، شبستر.

[۱۱] عباس‌زاده ح، شیشه‌ساز م (۱۳۹۳) بررسی تاثیر برش عرضی در مقادیر تنش در یک اتصال چسبی تک‌لبه تحت خمش. بیست و دومین همایش سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک ایران، اهواز، دانشگاه شهید چمران.