



بررسی پارامتری بهبود ظرفیت کمانش ستون‌های ترک‌دار توسط وصله‌های پیزوالکتریک

مهدی جاوید^۱ و حسن بیگلری^{۲*}

^۱ دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱۰/۰۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۷/۲۴

چکیده

در مقاله حاضر با استفاده از روش تحلیلی، به مطالعه رفتار پایداری ستون‌های ترک‌دار مجهز به وصله‌های پیزوالکتریک پرداخته می‌شود. جهت قطبیدگی، وصله‌های پیزوالکتریک به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که سبب ایجاد نیروی محوری در ستون می‌شوند. ترک با استفاده از فنر پیچشی مدل شده است که دو قسمت سالم ستون را در محل ترک به هم متصل می‌سازد. پس از اعمال شرایط مرزی و بین مرزی در محل ترک و نواحی انتهایی وصله‌های پیزوالکتریک، معادله مشخصه حاکم بر رفتار کمانش ستون‌های ترک‌دار استخراج گردیده است. تأثیر پارامترهای موثر بر بار کمانش اول و دوم ستون از قبیل، پارامترهای ترک (موقعیت و عمق ترک) و همچنین موقعیت و طول وصله‌های پیزوالکتریک و ولتاژ اعمالی با استفاده از نمودارهای مناسب، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که وجود ترک، سبب کاهش قابل ملاحظه‌ای در ظرفیت کمانش ستون می‌شود. میزان این کاهش، به موقعیت و عمق ترک بستگی دارد. با تعیین موقعیت و طول مناسب وصله‌های پیزوالکتریک، می‌توان سبب بهبود ظرفیت کمانش تیر ترک‌دار شد. لزوماً بهترین موقعیت وصله پیزوالکتریک متناظر با محل ترک نمی‌باشد و باید با توجه به شرایط مرزی تیر و محل ترک تعیین شود. نتایج نشان می‌دهد، اثر اعمال ولتاژ مثبت بر ظرفیت کمانش مود دوم و مود اول متفاوت است.

کلمات کلیدی: ستون ترک‌دار؛ وصله پیزوالکتریک؛ ظرفیت کمانش اول و دوم؛ تئوری اویلر-برنولی.

Parametric Investigation of Buckling Capacity Improvement of Cracked Columns with Piezoelectric Patches

M. Javid¹, H. Biglari^{2,*}

¹ Ph.D. Student, Mech. Eng., University of Tabriz, Tabriz, Iran.

² Assiss. Prof., Mech. Eng., University of Tabriz, Tabriz, Iran.

Abstract

In this paper, instability behavior of cracked column equipped with piezoelectric patch is investigated, analytically. Polarization orientation is in such a way that axial force is induced in column. Crack is modeled as a torsional spring that connects two intact portion of column. After considering boundary conditions and continuity at the crack position and edges of piezoelectric patch positions, governing equations of buckling behavior of cracked column are obtained. Effects of effective parameters on the first and second buckling capacity of cracked column such as cracked parameters (position and depth), position, length and voltage of piezoelectric patch is investigated using suitable sketches. The results show that crack decreases buckling capacity, prominently. This decrease depends on position and depth of crack. Using appropriate position and length of piezoelectric patch, buckling capacity of cracked column is improved. The appropriate position of piezoelectric patch is not analogous to the crack position, necessarily and may be determined according to the column boundary conditions and crack position. The results show that positive voltage has opposite effects on the first and second buckling capacity of column.

Keywords: Cracked Column; Piezoelectric Patch; First and Second Buckling Capacity, Euler-Bernouli Theory.

۱- مقدمه

کاربرد مواد هوشمند، توجه ویژه‌ای در مهندسی مکانیک، عمران، هوافضا و حتی مهندسی زیست دارد. به خاطر کاربرد گسترده مواد هوشمند، هم به عنوان حس‌گر و هم به عنوان عمل‌گر، تحلیل سازه‌های مجهز به لایه‌های پیزوالکتریک به طور گسترده، مورد مطالعه و تحقیق قرار گرفته است [۱-۳]. به خاطر خصوصیات خوب مانند، وزن کم و اثرات جفت شدگی الکترومغناطیسی، مواد هوشمند در زمینه‌های کاربردی مختلف مانند، کنترل شکل ساختارها، برانگیزش موج آکوستیک، کنترل سلامت سازه‌ها و غیره، مورد بررسی قرار گرفته است. با این وجود، مطالعه تاثیر وصله‌های پیزوالکتریک بر ظرفیت کماتش سازه‌های ترک‌دار بطور ناچیز، در جوامع علمی مورد مطالعه قرار گرفته است.

کراولی و لوئیس [۴]، مدل تحلیلی برای پاسخ استاتیکی و دینامیکی ستون با عمل‌گرهای پیزوالکتریک قرار گرفته روی سطح یا داخل لایه‌های کامپوزیت ارائه کرده‌اند. چاندراشخارا و باتیا [۵]، مدل المان محدود برای کنترل فعال کماتش ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای با حس‌گرهای پیزوالکتریک را توسعه و به بررسی رفتار کماتش دینامیکی سازه‌های کامپوزیت لایه‌ای تحت بارگذاری فشاری افزایشی پرداخته‌اند. چیس و باشیام [۶]، با استفاده از تعداد زیادی حس‌گر و عملگر، معادلات طراحی بهینه برای ورق‌های لایه‌ای پایدار فعال تحت بار کماتش بحرانی مازاد را استخراج کرده‌اند که در بال هواپیما کاربرد دارد. مرسی و پادن [۷]، به مطالعه کماتش ستون‌های انعطاف‌پذیر تحت حضور وصله‌های پیزوالکتریک پرداخته‌اند. آنها نشان دادند که در کماتش ستون‌های انعطاف‌پذیر، استفاده از بازخورد کرنش‌سنج به کمک عمل‌گرهای پیزوالکتریک، سبب افزایش ظرفیت اول کماتش ستون‌ها می‌شود. وانگ و گوئیک [۸]، به مطالعه قابلیت تاثیر ماده پیزوالکتریک بر افزایش ظرفیت بار کماتش ستون‌ها پرداخته‌اند. تامسون و لوگلان [۹]، با استفاده از تست‌های تجربی نشان دادند که استفاده از عمل‌گرهای پیزوالکتریک، سبب افزایش مقاومت ستون‌ها تحت بارگذاری محوری فشاری می‌شود. هدف مطالعه آن‌ها، اعمال ولتاژ کنترل شده به عمل‌گر برای ایجاد گشتاور در مرکز ستون است. چنین گشتاور ایجاد شده بوسیله عملگر پیزوالکتریک، خیزهای جانبی را کاهش داده، سبب تقویت ستون برای رفتار

در حالت کامل و مستقیم می‌شود. وانگ و همکاران [۱۰] به بررسی تاثیر وصله‌های پیزوالکتریک بر عملکرد ستون‌های ترک‌دار تحت بارگذاری استاتیکی پرداخته‌اند. نتایج تحقیق آن‌ها نشان می‌دهد که وجود ترک در ستون، سبب ناپیوستگی در شیب ستون در محل ترک می‌شود. با اعمال نیروی استاتیکی به ستون، وصله‌های پیزوالکتریک سبب ایجاد گشتاور موضعی می‌شوند که با کنترل این گشتاور موضعی، می‌توان اثر وجود ترک بر ستون را کاهش داد. کراوزیک و اوساچووویز [۱۱] و بانو و همکاران [۱۲]، با استفاده از روش مشابهی به مدلسازی ناپیوستگی شیب ناشی از وجود ترک در ستون پرداختند. آریایی و همکاران [۱۳]، با استفاده از روش ماتریس انتقال به استخراج معادله مشخصه حاکم بر رفتار ارتعاشی و کماتشی ستون‌های کوتاه ترک‌دار تحت وصله‌های پیزوالکتریک پرداخته، سپس با استفاده از روش عددی آن را حل کرده‌اند. وانگ [۱۴]، با استفاده از روش نیمه تحلیلی، به بررسی شرایط مرزی مختلف بر ظرفیت کماتش ستون‌های ترک‌دار پرداخته است که وصله‌های پیزوالکتریک به آن‌ها وصل شده‌اند. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که میزان ولتاژ اعمالی به وصله‌های پیزوالکتریک و نوع شرایط مرزی، تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر بار کماتش ستون‌های ترک‌دار دارند.

همان‌طور که ملاحظه گردید، مطالعه خاصی در زمینه بررسی تاثیر عمل‌گرهای پیزوالکتریک بر بهبود ظرفیت کماتش ستون‌های ترک‌دار صورت نپذیرفته است. در مقاله حاضر، تأثیر پارامترهای وصله‌های پیزوالکتریک (موقعیت و طول وصله‌ها) بر رفتار کماتش و ظرفیت کماتش اول و دوم ستون‌های ترک‌دار صورت می‌پذیرد. بدین منظور، با استفاده از روش تحلیلی و استفاده از فرضیات ستون اویلر-برنولی، به استخراج معادله حاکم بر رفتار کماتش ستون‌های اویلر-برنولی ترک‌دار تحت حضور وصله‌های پیزوالکتریک پرداخته می‌شود. ترک با استفاده از فنر پیچشی مدل شده است که دو قسمت سالم ستون را در محل ترک به هم متصل می‌سازد. سفتی معادل فنر پیچشی، با استفاده از تئوری مکانیک شکست خطی به دست آمده است. پس از حل معادله حاکم بر سیستم، به بررسی تاثیر پارامترهای مختلف از جمله، تأثیر پارامترهای وصله‌های پیزوالکتریک (موقعیت و طول وصله‌ها)

۲-۲- مدل ریاضی ترک

تئوری‌های مختلفی برای مدل‌سازی ترک در سازه‌ها ارائه شده است [۱۶-۱۸]. روش معمول برای اعمال اثر ترک در رفتار ستون، مدل فنر پیچشی یا انعطاف‌پذیری موضعی است که در آن ترک با استفاده از فنر پیچشی مدل می‌شود و سفتی معادل فنر، از تئوری مکانیک شکست خطی به دست می‌آید. ضریب انعطاف‌پذیری موضعی برای ترک با پهنای b و عمق a_c با استفاده از قضیه کاستیگلیانو به صورت رابطه (۳) به دست می‌آید [۱۹]:

$$C = \frac{\partial u}{\partial M} = \frac{\partial^2}{\partial M^2} \int_0^b \int_0^{a_c} J(\alpha) dx dy \quad (3)$$

در رابطه اخیر، M گشتاور اعمالی، $\alpha = a_c/H$ عمق نسبی ترک (H ارتفاع تیر) و $J(\alpha)$ تابع چگالی انرژی کرنشی است که به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود [۲۰]:

$$J(\alpha) = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2(\alpha) \quad (4)$$

که در آن $K_I(\alpha)$ ضریب شدت تنش در مود اول شکست است و برای سطح مقطع مستطیلی از رابطه (۵) به دست می‌آید [۱۹]:

$$K_I(a_c) = \frac{MH}{2I_0} \sqrt{\pi a_c} F(a_c) \quad (5)$$

در رابطه اخیر، I_0 ممان اینرسی سطح مقطع ستون است. برای سطح مقطع مستطیلی تابع $F(\alpha)$ را می‌توان به صورت رابطه (۶) بیان کرد [۱۹]:

$$F(\alpha) = \frac{0.923 + 0.199 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^4}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} \quad (6)$$

با جایگذاری رابطه (۴) و (۵) در معادله (۳)، ضریب انعطاف‌پذیری موضعی C برای مود اول بارگذاری که متناظر با گشتاور خمشی خالص است، به صورت رابطه (۷) به دست می‌آید:

$$C = \frac{b(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2}{\partial M^2} \int_0^{a_c} K_I^2(\alpha) d\alpha = \frac{bH^2}{EI_0} \pi(1 - \nu^2) \int_0^{\alpha} \xi F^2(\xi) d\xi \quad (7)$$

با استفاده از رابطه (۷)، سفتی فنر پیچشی معادل با ترک به عمق a_c برابر K_t به صورت رابطه (۸) به دست می‌آید:

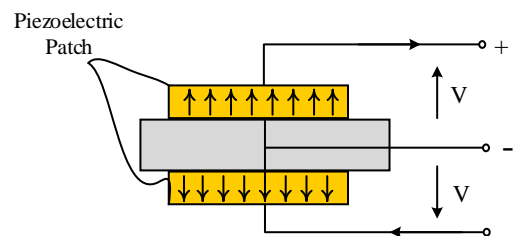
$$K_t = \frac{1}{C} \quad (8)$$

بر ظرفیت بار کمانش اول و دوم ستون یک‌سر گیردار ترک‌دار پرداخته می‌شود.

۲- فرمول‌بندی مساله

۲-۱- مدل ریاضی وصله پیزوالکتریک

در شکل ۱، پیکره‌بندی دو وصله پیزوالکتریک نشان داده شده است که به صورت متقارن به سطوح خارجی بالایی و پایینی ستون متصل شده‌اند. با فرض اینکه جهت قطبیدگی وصله‌های پیزوالکتریک، نسبت به محور طولی ستون متقارن و بر محور طولی ستون عمود باشد، در این صورت با اعمال ولتاژ الکتریکی به وصله‌های پیزوالکتریک، نیروی ایجاد شده به صورت نیروی محوری خالص خواهد بود [۱۵].



شکل ۱- پیکره‌بندی وصله‌های پیزوالکتریک جهت ایجاد نیروی محوری

اگر e_{31} مدول پیزوالکتریک و E_z میدان الکتریکی پیزوالکتریک باشد، در این صورت تنش محوری ایجاد شده در مرز مشترک بین ستون و لایه‌های پیزوالکتریک را می‌توان به صورت زیر به دست آورد [۴]:

$$\sigma_x = -e_{31} E_z \quad (1)$$

بنابراین نیروی محوری که توسط ترکیب وصله‌های پیزوالکتریک در ستون ایجاد می‌شود را می‌توان به صورت رابطه (۲) محاسبه کرد [۴]:

$$F_p = -2bhE_z e_{31} = -2be_{31} V \quad (2)$$

در رابطه اخیر، V ولتاژ الکتریکی، b پهنای h ضخامت لایه پیزوالکتریک است. اگر طول وصله‌های پیزوالکتریک، کوچکتر از طول ستون باشند، در این صورت نیروی محوری ایجاد شده به صورت نیروی محوری موضعی خواهد بود که بسته به جهت قطبیدگی یا جهت اعمال ولتاژ، می‌تواند سبب ایجاد نیروی محوری کششی یا نیروی محوری فشاری در ستون شود.

از ستون را با توجه به معادله (۹)، می‌توان به صورت رابطه (۱۱) بیان کرد:

$$EI \frac{d^4 y_1(x)}{dx^4} + P \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq x_c$$

$$EI \frac{d^4 y_2(x)}{dx^4} + P \frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} = 0, \quad x_c < x \leq L_1$$

$$EI \frac{d^4 y_3(x)}{dx^4} + (P + F_p) \frac{d^2 y_3(x)}{dx^2} = 0, \quad L_1 < x \leq L_2$$

$$EI \frac{d^4 y_4(x)}{dx^4} + P \frac{d^2 y_4(x)}{dx^2} = 0, \quad L_2 < x \leq L \quad (11)$$

در نتیجه با حل معادلات فوق و به کمک رابطه (۱۰)، خیز هر قسمت از ستون را می‌توان به صورت رابطه (۱۲) به دست آورد:

$$y_1(x) = A_1 + A_2 x + A_3 \sin\left(\frac{\eta_1 x}{L_1}\right) + A_4 \cos\left(\frac{\eta_1 x}{L_1}\right)$$

$$y_2(x) = A_5 + A_6 x + A_7 \sin\left(\frac{\eta_2 x}{L_2}\right) + A_8 \cos\left(\frac{\eta_2 x}{L_2}\right)$$

$$y_3(x) = A_9 + A_{10} x + A_{11} \sin\left(\frac{\eta_3 x}{L_3}\right) + A_{12} \cos\left(\frac{\eta_3 x}{L_3}\right)$$

$$y_4(x) = A_{13} + A_{14} x + A_{15} \sin\left(\frac{\eta_4 x}{L_4}\right) + A_{16} \cos\left(\frac{\eta_4 x}{L_4}\right) \quad (12)$$

که در آن $\eta_i (i = 1, \dots, 16)$ و A_i ثابت‌های مجهولی هستند که از اعمال شرایط مرزی و بین مرزی در محل ترک و مرز مشترک بین وصله‌ها و ستون به دست می‌آیند. با در نظر گرفتن ستون یک‌سرگردار، شرایط مرزی در ابتدا و انتهای ستون به صورت رابطه (۱۳) است:

$$x = 0: y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x = L: \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{P}{EI} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (13)$$

شرایط بین مرزی حاکم در موقعیت $x = x_c$ از شرایط پیوستگی خیز، گشتاور، نیروی برشی و اختلاف شیب در طرفین ترک حاصل می‌شوند که به ترتیب عبارتند از:

$$y_1 = y_2, \quad y_1'' = y_2''$$

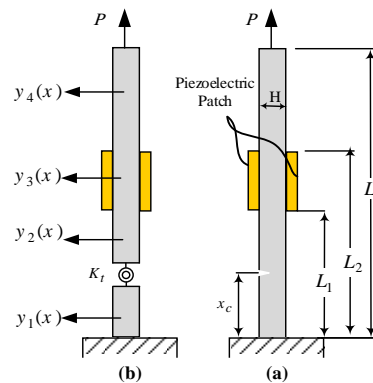
$$y_1' + \frac{P}{EI} y_1 = y_2' + \frac{P}{EI} y_2$$

$$K_t y_1' - K_t y_2' = EI y_2'' \quad (14)$$

شرایط سازگاری جابجایی، شیب، گشتاور و نیروی برشی در موقعیت‌های انتهایی وصله‌های پیزوالکتریک عبارتند از:

۲-۳- مدل ریاضی ستون ترک‌دار با عملگر پیزوالکتریک

در شکل ۲، ستون ترک‌دار تحت نیروی محوری P و مجهز به وصله پیزوالکتریک به همراه فنر پیچشی معادل نشان داده شده است. مشخصات هندسی ستون عبارت است از: L طول، H ارتفاع و b پهنا. ترک با عمق a_c در موقعیت x_c قرار گرفته، اثر آن با استفاده از فنر پیچشی مدل شده است که دو قسمت سالم را در محل ترک به یکدیگر متصل می‌سازد (شکل ۲-ب).



شکل ۲- الف) ستون ترک‌دار با وصله پیزوالکتریک و ب) مدل ریاضی ستون ترک‌دار

با استفاده از اصل هامیلتون و فرضیات تئوری اویلر-برنولی، معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار کمانش ستون را می‌توان به صورت رابطه (۹) استخراج کرد:

$$EI \frac{d^4 y(x)}{dx^4} + P \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = 0 \quad (9)$$

در رابطه اخیر، P نیروی محوری فشاری و EI صلبیت خمشی ستون است. معادله فوق، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه چهار با ضرایب ثابت است. جواب معادله (۹) را می‌توان به صورت رابطه (۱۰) در نظر گرفت:

$$y(x) = A_1 + A_2 x + A_3 \sin\left(\frac{\eta x}{L}\right) + A_4 \cos\left(\frac{\eta x}{L}\right) \quad (10)$$

که در آن ضرایب $A_i (i = 1, \dots, 4)$ ثابت‌های مجهولی که با توجه به شرایط مرزی باید یافته شوند. η پارامتر بی‌بعد است که به صورت $\eta = \sqrt{PL^2/EI}$ تعریف می‌شود.

با توجه به گسستگی ناشی از وصله‌های پیزوالکتریک و وجود ترک در ستون، معادله دیفرانسیل حاکم بر هر قسمت

بی‌بعد ترک به صورت موقعیت نسبی ترک $\beta = x_c/L$ و عمق نسبی ترک $\alpha = a_c/H$ تعریف می‌شوند.

با توجه به رابطه (۲)، مشاهده می‌شود که اعمال ولتاژ الکتریکی به وصله‌های پیزوالکتریک، سبب ایجاد نیروی محوری در ستون می‌شود که بسته به جهت اعمال ولتاژ می‌تواند به صورت نیروی کششی و یا فشاری باشد. اعمال نیروی محوری فشاری، باعث کاهش بار کمانش و نیروی محوری کششی، سبب افزایش بار کمانش ستون خواهد شد. با توجه به اینکه نیروی محوری وصله‌های پیزوالکتریک موضعی است، بنابراین موقعیت، طول و میزان ولتاژ اعمالی بر مقدار بار کمانش ستون تأثیرگذار خواهد بود.

در شکل ۳، تأثیر موقعیت وصله‌های پیزوالکتریک با طول $L_2 - L_1 = 80 \text{ mm}$ بر بار کمانش اول و دوم ستون سالم یکسرگیردار و به ازای مقادیر مختلف ولتاژ اعمالی نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که موقعیت وصله‌های پیزوالکتریک، تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر میزان بار کمانش ستون دارد. به ازای طول ثابت وصله‌های پیزوالکتریک، وصله‌های نزدیک به قسمت گیردار ستون، تأثیر کمی بر ظرفیت کمانش ستون دارند و با نزدیک شدن به قسمت آزاد ستون، اثر آن بیشتر می‌شود. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که وصله پیزوالکتریک واقع در موقعیت $L_1 = 0.5 \text{ m}$ بیشترین تأثیر را بر میزان بار کمانش اول ستون دارد.

در مود دوم کمانش (شکل ۳-ب) وصله‌های پیزوالکتریک واقع در نزدیک تکیه‌گاه گیردار، تأثیر کمتری بر بار کمانش دارد و به ازای وصله واقع در موقعیت $L_1 = 0.22 \text{ m}$ وجود وصله هیچ تأثیری بر بار کمانش مود دوم نمی‌گذارد. با دور شدن وصله پیزوالکتریک از تکیه‌گاه گیردار، اثر آن بر تغییرات بار کمانش ستون افزایش می‌یابد، طوری که در موقعیت $L_1 = 0.5 \text{ m}$ ، بیشترین تأثیر را بر بار کمانش دوم ستون دارد.

با اعمال ولتاژ به وصله‌های پیزوالکتریک، نیروی محوری موضعی به اندازه $-2be_{31}Vy'$ در ستون ایجاد می‌شود. مشاهده می‌شود که علاوه بر ولتاژ اعمالی، شیب شکل مود کمانش نیز، بر نیروی محوری ایجاد شده تأثیر می‌گذارد. به ازای ولتاژ ثابت، تغییر علامت در مقدار شیب تابع شکل مود کمانش، منجر به تغییر وضعیت نیروی محوری از حالت کششی به فشاری یا بالعکس می‌شود.

$$\begin{aligned} x = L_1 : \\ y_2 = y_3, \frac{dy_2}{dx} = \frac{dy_3}{dx}, \\ \frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{d^2y_3}{dx^2}, \frac{d^3y_2}{dx^3} = \frac{d^3y_3}{dx^3} \\ x = L_2 : \\ y_4 = y_3, \frac{dy_4}{dx} = \frac{dy_3}{dx}, \\ \frac{d^2y_4}{dx^2} = \frac{d^2y_3}{dx^2}, \frac{d^3y_4}{dx^3} = \frac{d^3y_3}{dx^3} \end{aligned} \quad (15)$$

برای استخراج مسأله مقدار ویژه متناظر با کمانش ستون ترک‌دار با جایگذاری روابط به دست آمده برای سه قسمت سالم ستون (روابط ۱۲) در شرایط پیوستگی روابط (۱۴) و (۱۵) و پس از اعمال شرایط مرزی رابطه (۱۳)، شانزده معادله جبری برحسب ضرایب مجهول $A = \{A_i\}$ ، به صورت رابطه (۱۶) بدست می‌آیند:

$$[\Delta]\{A\}_{16 \times 1} = 0 \quad (16)$$

در آن، عناصر ماتریس ضرایب A به مشخصات هندسی، مکانیکی، شرایط مرزی، پارامترهای ترک، نیروی محوری و مشخصات وصله‌های پیزوالکتریک شامل، مشخصات هندسی و ولتاژ اعمالی بستگی دارد. برای داشتن جواب غیر بدیهی، بایستی دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد؛ بنابراین، مسأله مقدار ویژه حاکم بر کمانش ستون ترک‌دار تحت نیروی محوری به صورت رابطه (۱۷) به دست می‌آید:

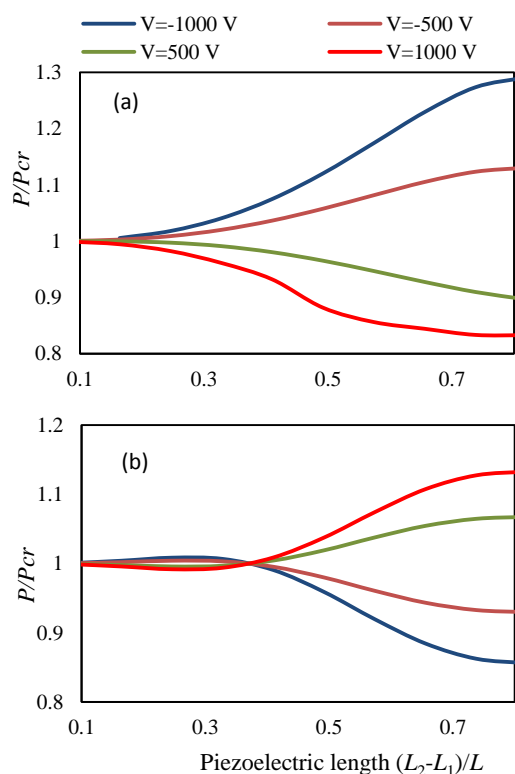
$$\det[\Delta(K_t, x_c, L_1, L_2, P, V)] = 0 \quad (17)$$

از حل معادله اخیر، بار کمانش ستون ترک‌دار بدست می‌آید.

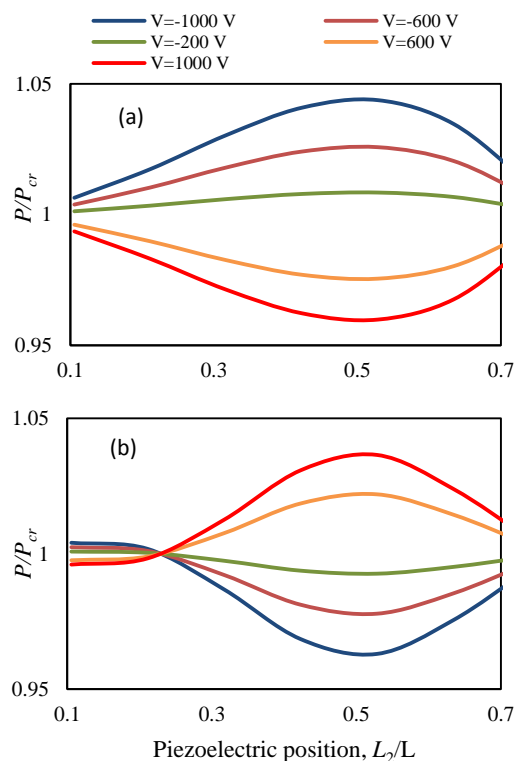
۳- نتایج عددی

به منظور بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پایداری ستون ترک‌دار تحت بارگذاری محوری ستون نشان داده شده در شکل ۲، مد نظر قرار داده می‌شود که در آن مشخصات ستون عبارتند از: $E=63 \text{ GPa}$ ، $L=820 \text{ mm}$ ، $H=10 \text{ mm}$ و $D=20 \text{ mm}$ مشخصات هندسی و مکانیک وصله‌های پیزوالکتریک عبارتند از: $b=32 \text{ mm}$ و $e_{31}=17.8 \text{ C/m}^2$. نتایج ارائه شده برحسب پارامترهای بی‌بعد نسبت بار کمانش P/P_{cr} (نسبت بار کمانش به بار کمانش ستون سالم در غیاب اعمال ولتاژ) ارائه شده است. با توجه به اینکه ستون مورد استفاده در تحقیق حاضر ستون اوپلر-برنولی است، بنابراین ظرفیت بار کمانش اول و دوم ستون یکسرگیردار به ترتیب برابر، $9\pi^2EI/4L^2$ و $\pi^2EI/4L^2$ خواهد بود. علاوه بر این، پارامترهای

در شکل ۴، تأثیر طول وصله پیزوالکتریک بر ظرفیت بار کمانش مود اول و دوم ستون سالم به ازای مقادیر مختلف ولتاژ اعمالی نشان داده شده است. مطابق شکل، نتایج نشان می‌دهد که با افزایش طول پیزوالکتریک، میزان تأثیرگذاری وصله‌ها بر ظرفیت بار کمانش افزایش می‌یابد؛ همچنین نتایج نشان می‌دهد که تأثیر وصله‌های پیزوالکتریک بر ظرفیت کمانش مود اول، به مراتب بیشتر از ظرفیت کمانش مود دوم ستون است. به صورتیکه برای پیزوالکتریک با طولی یکسان با طول ستون به ترتیب، سبب افزایش ۳۰٪ و ۱۲٪ در ظرفیت بار کمانش اول و دوم ستون به ازای $V = -1000\text{ V}$ می‌شود. به منظور بررسی تأثیر ترک بر میزان ظرفیت کمانش ستون، ابتدا ستون یک‌سرگردار ترک‌دار بدون وصله پیزوالکتریک مطالعه می‌شود. تغییرات ظرفیت کمانش مود اول و دوم ستون یک‌سرگردار ترک‌دار نسبت به موقعیت نسبی ترک و به ازای عمق‌های مختلف ترک در شکل ۵ نشان داده شده است



شکل ۴- تأثیر طول وصله پیزوالکتریک بر ظرفیت بار کمانش ستون سالم یک‌سرگردار (الف) مود کمانش اول و دوم (ب) مود کمانش دوم



شکل ۳- تأثیر ولتاژ اعمالی و موقعیت وصله پیزوالکتریک بر نسبت بار کمانش ستون یک‌سرگردار (الف) مود کمانش اول و (ب) مود کمانش دوم

با توجه به اینکه تابع شکل مود کمانش اول ستون یک‌سرگردار دارای نقطه اکسترمم نسبی نمی‌باشد، بنابراین علامت مشتق شکل مود در طول ستون همواره ثابت بوده، در نتیجه ولتاژ منفی، سبب ایجاد نیروی محوری کششی و در نتیجه افزایش بار کمانش در ستون می‌شود.

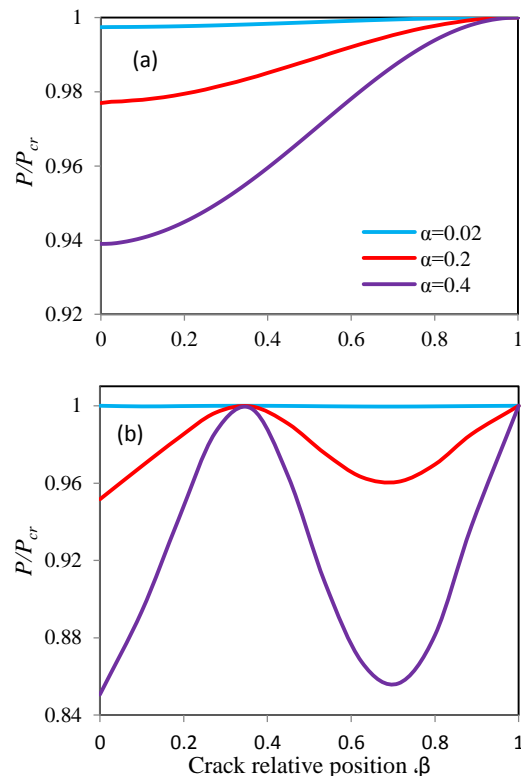
بالعکس، اعمال ولتاژ مثبت در پیزوالکتریک، باعث کاهش ظرفیت کمانش مود اول می‌شود. این موضوع با توجه به نتایج نشان داده شده در شکل ۳-الف مشاهده می‌شود. تابع شکل مود دوم کمانش در موقعیت $x = 0.32$ دارای نقطه اکسترمم نسبی است و مشتق تابع در این موقعیت، تغییر علامت می‌دهد؛ بنابراین تأثیر وصله پیزوالکتریک بر ظرفیت کمانش مود دوم ستون متفاوت خواهد بود. با توجه به شکل ۳-ب، مشاهده می‌شود که به ازای وصله‌های پیزوالکتریک واقع در $0 < x < 0.32$ ، اعمال ولتاژ الکتریکی منفی و در $x \geq 0.32$ اعمال ولتاژ الکتریکی مثبت، سبب ایجاد نیروی محوری کششی و افزایش ظرفیت کمانش دوم ستون می‌شود.

گیردار به علت بیشتر بودن گشتاور خمشی، بیشترین کاهش در بار کمانش ستون ناشی از وجود ترک مشاهده خواهد گردید. در بحرانی‌ترین حالت، به ازای ترک با عمق نسبی $\alpha = 0.4$ واقع در نزدیکی تکیه‌گاه گیردار، وجود ترک باعث کاهش ۴۰٪ در بار کمانش ستون می‌گردد که برای جبران قسمتی از این کاهش بار کمانش می‌توان از وصله‌های پیزوالکتریک استفاده کرد.

مطابق شکل ۵-ب، وجود ترک در موقعیت نسبی $\beta = 0.34$ با عمق‌های مختلف تاثیری در کاهش ظرفیت کمانش مود دوم ندارد. علت این امر، صفر بودن انحنای خمشی تیر در مود کمانش دوم در موقعیت نسبی $\beta = 0.34$ می‌باشد.

نکته مهم دیگری که از مقایسه شکل‌های ۵-الف و ۵-ب نتیجه می‌شود آن است که وجود ترک می‌تواند باعث تغییر مود کمانش از اول به دوم و کاهش چشم‌گیر ظرفیت کمانش ستون ترک‌دار نسبت به ستون سالم شود. به عنوان مثال، وجود ترک به عمق نسبی $\alpha = 0.4$ در موقعیت نسبی $\beta = 0.37$ ، سبب کاهش ظرفیت کمانش در ستون سالم از P_{cr} به $0.98P_{cr}$ در مود اول و $0.85P_{cr}$ در مود دوم خواهد شد؛ لذا ستون در این حالت در مود دوم کمانش خواهد کرد.

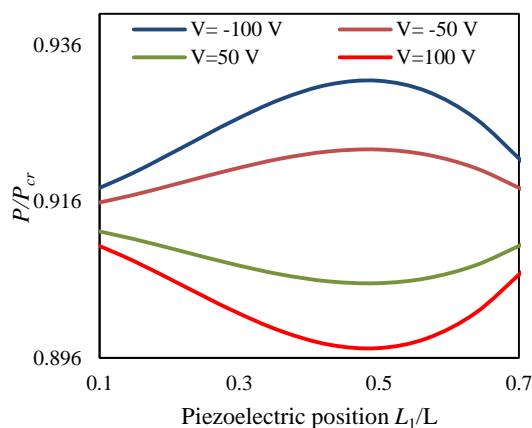
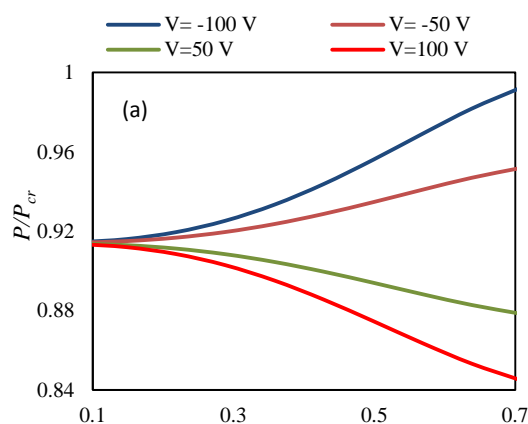
در شکل‌های ۶ و ۷، تأثیر موقعیت و طول پیزوالکتریک بر بار کمانش ستون ترک‌دار یک‌سرگیردار به ازای مقادیر مختلف ولتاژ پیزوالکتریک نشان داده شده است. نتایج به ازای ترک با موقعیت نسبی $\beta = 0.01$ و عمق نسبی $\alpha = 0.3$ محاسبه شده‌اند. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که ترک با مشخصات مزبور، باعث کاهش بار کمانش ستون به میزان ۹٪ می‌شود؛ ولی استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک، این کاهش بار کمانش ناشی از وجود ترک را جبران می‌سازد. در مطالعه انجام شده در زمینه تعمیر ترک با استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک، معمولاً وصله پیزوالکتریک در موقعیت متناظر با موقعیت ترک مورد استفاده قرار گرفته است [۸]. با توجه به شکل ۶ مشاهده می‌شود که حالت بهینه موقعیت وصله پیزوالکتریک در نواحی $L_1 = 0.5L$ است؛ بنابراین برای ترک‌هایی که در این موقعیت قرار ندارند، استفاده از وصله پیزوالکتریک در موقعیت متناظر ترک، به علت کم بودن اثر وصله پیزوالکتریک بر بار کمانش ستون، مناسب نخواهد بود. در صورت استفاده از وصله در موقعیت



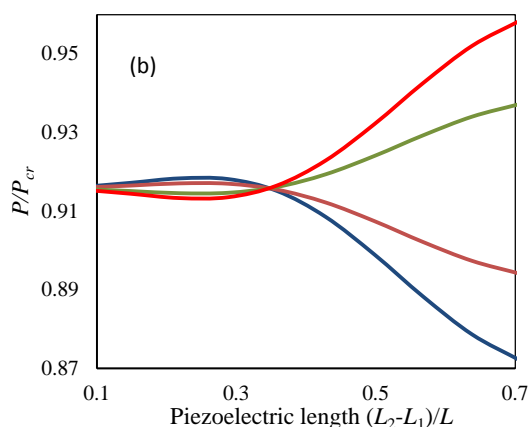
شکل ۵- تغییرات بار کمانش اول و دوم ستون یک‌سرگیردار ترک‌دار بر حسب موقعیت نسبی ترک

نتایج نشان می‌دهد که وجود ترک باعث کاهش بار کمانش و ظرفیت باربری ستون می‌شود. به عنوان نمونه برای ستون سالم یک‌سرگیردار مورد بررسی بار کمانش اول مطابق رابطه اولر برابر $P_e = 3.67 EI$ می‌باشد و برای ستون ترک‌دار با عمق نسبی 0.4 و در موقعیت نسبی 0.001 بار کمانش اول برابر $P_{cr} = 3.35 EI$ به دست می‌آید. بنابراین وجود ترک، بار کمانش ستون ترک‌دار نسبت به ستون سالم را به اندازه ۹.۶۷٪ کاهش می‌دهد.

با توجه به شکل مشاهده می‌شود که در یک موقعیت ثابت ترک، با افزایش عمق ترک بار کمانش ستون کاهش می‌یابد. همچنین ترک واقع در نزدیک تکیه‌گاه گیردار بیشترین اثر را بر کاهش بار کمانش ستون داشته و با نزدیک شدن ترک به انتهای آزاد اثر ترک بر رفتار سیستم کاهش و به صفر می‌رسد. علت این امر را می‌توان به این صورت توجیه کرد که با توجه به اینکه عمده‌ترین اثر ترک در کاهش سفتی خمشی می‌باشد، بنابراین در موقعیت‌های نزدیک تکیه‌گاه



شکل ۶- تأثیر موقعیت پیزوالکتریک بر بار کمانش اول ستون یک‌سرگیردار ترک‌دار



شکل ۷- تأثیر طول پیزوالکتریک بر بار کمانش ستون یک‌سرگیردار ترک‌دار

۴- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، به بررسی اثر وصله‌های پیزوالکتریک و پارامترهای ترک بر پایداری ستون‌های ترک‌دار با استفاده از روش تحلیلی پرداخته شد. ترک با استفاده از مدل فنر پیچشی مدل‌سازی شد که سفتی معادل فنر پیچشی، از تئوری مکانیک شکست محاسبه گردید. نتایج نشان می‌دهد که وجود ترک، سبب کاهش قابل ملاحظه‌ای در ظرفیت کمانش ستون می‌شود. میزان این کاهش، به موقعیت و عمق ترک بستگی دارد. با افزایش عمق ترک، اثر آن بر کاهش بار بحرانی کمانش ستون بیشتر می‌شود؛ همچنین در ستون یک‌سرگیردار، با نزدیک شدن موقعیت ترک به تکیه‌گاه گیردار اثر ترک بر کاهش ظرفیت کمانش بیشتر می‌شود.

ترک، برای جبران اثر ترک بر کاهش ظرفیت کمانش، باید از ولتاژهای بزرگتری در وصله پیزوالکتریک استفاده شود، لذا در کاربردهای تعمیر ترک، موقعیت مناسب وصله پیزوالکتریک می‌بایست براساس نوع شرایط مرزی و هندسه سازه تعیین شود.

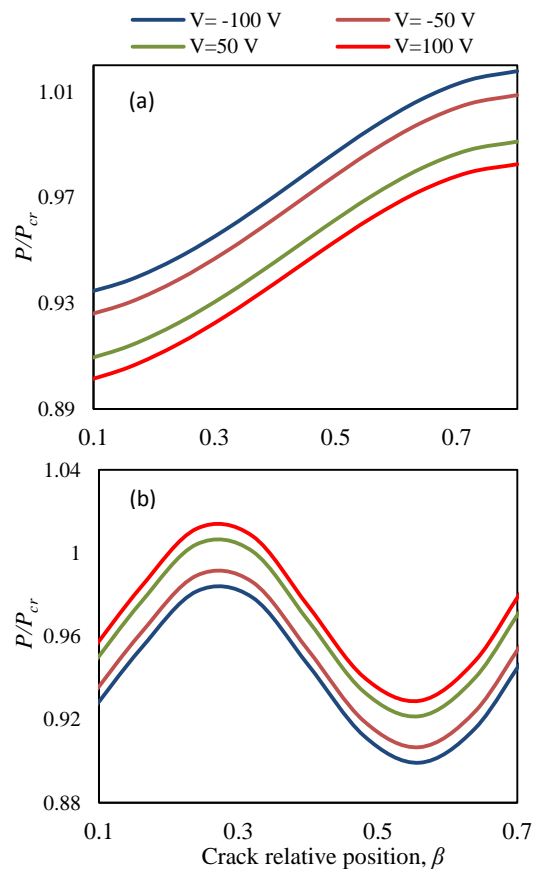
مطابق شکل ۷، به ازای ولتاژ اعمال $V = -1000 V$ ، چنانچه طول وصله پیزوالکتریک به طول ستون میل کند، باعث جبران کامل اثر ترک در کاهش ظرفیت کمانش اول ستون می‌شود. در ظرفیت کمانش دوم، به علت شکل مدول کمانش، وصله‌های پیزوالکتریک با طول کمتر از 0.32 تأثیر کمتری بر بار کمانش دوم ستون دارند، ولی با افزایش طول وصله پیزوالکتریک، تأثیر آنها بر ظرفیت کمانش دوم به میزان قابل توجهی افزایش می‌یابد. نتایج نشان می‌دهد که در بار کمانش دوم ولتاژ الکتریکی مثبت برخلاف بار کمانش اول، سبب افزایش بار کمانش دوم می‌شود.

در شکل ۸، تأثیر ولتاژ پیزوالکتریک بر نسبت بار بحرانی ستون ترک‌دار برحسب موقعیت‌های مختلف ترک به ازای ترک با عمق نسبی $\alpha = 0.3$ و وصله‌های پیزوالکتریک به طول $L_2 - L_1 = 800 mm$ و موقعیت $L_1 = 450 mm$ رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد که با انتخاب مناسب ولتاژ اعمالی به وصله پیزوالکتریک، می‌توان تأثیر ترک بر کاهش بار کمانش را جبران کرد. میزان این ولتاژ به پارامترهایی مانند، عمق ترک، موقعیت ترک و نیز شرایط مرزی ستون بستگی دارد.

نتایج نشان می‌دهد، تغییرات بار کمانش دوم برحسب ولتاژ اعمالی برخلاف بار کمانش اول است. به ازای اعمال ولتاژ مثبت به وصله‌های پیزوالکتریک، بار کمانش اول کاهش و بار کمانش دوم افزایش می‌یابد.

۵- مراجع

- [1] Khorshidvand A, Joubaneh EF, Jabbari M, Eslami M (2014) Buckling analysis of a porous circular plate with piezoelectric sensor-actuator layers under uniform radial compression. *Acta Mech* 225(1): 179-193.
- [2] Rao M, Schmidt R (2014) Static and dynamic finite rotation FE-analysis of thin-walled structures with piezoelectric sensor and actuator patches or layers. *Smart Mater Struct* 23(9): 095006.
- [3] Zenz G, Humer A (2015) Stability enhancement of beam-type structures by piezoelectric transducers: theoretical, numerical and experimental investigations. *Acta Mech* 226(12): 3961-3976.
- [4] Crawley EF, De Luis J (1987) Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA* 25(10): 1373-1385.
- [5] Chandrashekhara K, Bhatia K (1999) Active buckling control of smart composite plates-finite-element analysis. *Smart Mater Struct* 2(1): 31.
- [6] Chase JG, Srinivas B (1999) Optimal stabilization of plate buckling. *Smart Mater Struct* 8(2): 204.
- [7] Meressi T, Paden B (1993) Buckling control of a flexible beam using piezoelectric actuators. *Guid Control Dynam* 16(5): 977-980.
- [8] Wang Q, Quek S (2002) Enhancing flutter and buckling capacity of column by piezoelectric layers. *Int J Solids Struct* 39(16): 4167-4180.
- [9] Thompson SP, Loughlan J (1995) The active buckling control of some composite column strips using piezoceramic actuators. *Compos Struct* 32(1-4): 59-67.
- [10] Wang Q, Quek S, Liew K (2002) On the repair of a cracked beam with a piezoelectric patch. *Smart Mater Struct* 11(3): 404.
- [11] Krawczuk M, Ostachowicz W (1995) Modelling and vibration analysis of a cantilever composite beam with a transverse open crack. *J Sound Vib* 183(1): 69-89.
- [12] Bao G, Ho S, Suo Z, Fan B (1992) The role of material orthotropy in fracture specimens for composites. *Int J Solids Struct* 29(9): 1105-1116.
- [13] Ariaei A, Ziaei-Rad S, Ghayour M (2010) Repair of a cracked Timoshenko beam subjected to a moving mass using piezoelectric patches. *Int J Mech Sci* 52(8): 1074-1091.



شکل ۸- تأثیر ولتاژ اعمالی بر پیزوالکتریک و موقعیت ترک بر نسبت بار الف) بار کمانش اول و ب) بار کمانش دوم

در مقاله حاضر، حساسیت ظرفیت کمانش ستون ترک‌دار به مشخصات هندسی وصله‌های پیزوالکتریک شامل، موقعیت و طول وصله‌های پیزوالکتریک و همچنین ولتاژ اعمالی مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد، به ازای وصله‌های پیزوالکتریک با طولی معادل با طول ستون و ولتاژ $V = -1000$ V، ظرفیت باربری ستون به میزان ۳۰٪ افزایش می‌یابد؛ همچنین میزان تأثیر وصله‌های پیزوالکتریک، وابسته به موقعیت و طول پیزوالکتریک است؛ بنابراین در صورتی که هدف استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک به منظور جبران کردن اثر کاهش بار کمانش ناشی از وجود ترک باشد، باید موقعیت و طول مناسب بر اساس رفتار سیستم به نحو مناسبی انتخاب شوند تا با حداقل ولتاژ اعمالی و طول پیزوالکتریک، بتوان اثر ترک بر کاهش ظرفیت کمانش را جبران کرد.

- [17] Dimarogonas AD (1996) Vibration of cracked structures: A state of the art review. *Eng Fract Mech* 55(5): 831-857.
- [18] Liebowitz H, Vanderveldt H, Harris D (1967) Carrying capacity of notched columns. *Int J Solids Struct* 3(4): 489-500.
- [19] Tada H, Paris P, Irwin G (2000) *The analysis of cracks handbook*. ASME Press, New York.
- [20] Narkis Y (1994) Identification of crack location in vibrating simply supported beams. *J Sound Vib* 172(4): 549-558.
- [14] Wang Q (2002) On buckling of column structures with a pair of piezoelectric layers. *Eng Struct* 24(2): 199-205.
- [15] Crawley EF, Anderson EH (1990) Detailed models of piezoceramic actuation of beams. *J Intel Mat Syst Str* 1(1): 4-25.
- [16] Chondros T, Dimarogonas A, Yao J (1998) A continuous cracked beam vibration theory. *J Sound Vib* 215(1): 17-34.