



بررسی تاثیر نرمی گشودگی در تحلیل تنش صفحات با گشودگی مرکزی و تحت کشش

محمد جعفری^{۱*}، جلیل رضایی پژند^۲

^۱ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

^۲ استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

در کاربردهای عملی ناچار به ایجاد گشودگی در سازه هستیم از طرفی در اثر وجود گشودگی معمولاً قابلیت تحمل بار سازه کاهش می‌یابد. این گشودگی‌ها باعث ایجاد تمرکز تنش در ماده می‌شود که در بحث طراحی بسیار مهم هستند بنابراین با توجه به اهمیت بحث تمرکز تنش و عنایت به اینکه می‌توان برای یک مساله کشش صفحه‌ای با تغییر شرایط مختلف مثلاً انتخاب شعاع انحنای مناسب برای گشودگی، ضریب تمرکز تنش را کاهش داد؛ بررسی تحلیل تنش در حضور گشودگی‌های مختلف لازم به نظر می‌رسد. در این مقاله با ارائه یک حل تحلیلی، تاثیر نرمی گشودگی که یکی از پارامترهای مهم در کاهش تمرکز تنش است؛ مورد بحث قرار می‌گیرد و در مواردی شکل گشودگی بهینه معرفی می‌گردد. روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله گسترش روش تحلیلی است که برای گشودگی دایره‌ای و بیضی توسط لخنیتسکی انجام شده است. این مقاله گشودگی‌های مختلفی را شامل می‌شود که برای ایجاد آنها، از یک تابع نگاشت ساده استفاده شده است. برای بررسی درستی جواب‌ها از روش المان محدود کمک گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که شعاع انحنای گشودگی تاثیر بسزایی در تمرکز تنش دارد.

کلمات کلیدی: نرمی گشودگی؛ مواد همسانگرد و غیرهمسانگرد؛ حل تحلیلی؛ تنش مطلوب.

۱- مقدمه

تمرکز تنش می‌باشد. بحث تمرکز تنش بویژه برای مواد غیرهمسانگرد لازم است چون در مواردی مقدار تمرکز تنش دو رقمی خواهد بود. حل‌های عددی مانند المان محدود و همچنین حل‌های تحلیلی نسبتاً زیادی برای صفحات حاوی گشودگی وجود دارد که غالب این حل‌ها یا برای مواد همسانگرد است یا مربوط به اشکال هندسی منظمی مانند دایره، بیضی و مثلث می‌باشند. تحلیل گشودگی‌ها با اشکال

از گشودگی‌ها در بسیاری از ساختارهای عملی برای ایجاد راه‌های ورودی و خروجی یا سرویس‌دهی و یا کاهش وزن استفاده می‌شود. این گشودگی‌ها باعث ایجاد یک تنش موضعی شدید می‌شوند که اصطلاحاً تمرکز تنش نامیده می‌شود. کارهای زیادی اخیراً توسط محققان مختلف در زمینه تمرکز تنش انجام شده است که دلیلی بر اهمیت بحث

* نویسنده مسئول. تلفن ۰۹۱۵۳۲۱۳۱۴۴

آدرس پست الکترونیک: mojaf2001@yahoo.com

۲- مرور کارهای انجام شده

از وقتی که حل تنش‌های اطراف یک گشودگی دایره‌ای در یک صفحه بی‌نهایت به دست آمد؛ تحقیقات روی مسائل تمرکز تنش در حال پیشرفت بوده است. روابط مربوط به صفحه بی‌نهایت و همسانگرد که دارای گشودگی دایره‌ای و بیضوی تحت کشش یکنواخت است در اکثر کتب مقاومت مصالح یافت می‌شوند. برای گشودگی بیضوی این رابطه بصورت $K=1+2b/a$ است؛ که b قطر بزرگ بیضی و عمود بر امتداد بار است و a قطر کوچک بیضی است. در حالت خاص برای گشودگی دایره‌ای حالتی که $a=b$ است؛ ضریب تمرکز تنش برابر ۳ خواهد بود. در مورد مسائل تمرکز تنش تحقیقات زیادی انجام شده است. صفحه با گشودگی مثلثی با لبه‌های مدور توسط ساوین^۱ [۱] حل شده است. استفاده از روش نگاشت هم‌نوا و رابطه شوآرتز محاسبه تابع تنش در حل ساوین را بسیار ساده می‌کند. نتایج برای شکل‌های با گشودگی مختلف در صفحات همگن داده شده و برای صفحات غیرهمگن توزیع تنش اطراف گشودگی بیضوی برای چند حالت بارگذاری مختلف مورد ملاحظه قرار گرفته است. گشودگی‌های دایره‌ای و بیضوی صفحات غیرهمسانگرد توسط لخنیتسکی^۲ [۲] حل شده است. در این حالت امتداد بارگذاری با محور اصلی بیضی زاویه α می‌سازد. توزیع تنش اطراف گشودگی مثلث متساوی‌الاضلاع در یک صفحه الاستیک بوسیله تنوکاریس^۳ و همکارانش [۳] مورد مطالعه قرار گرفت و در ۱۹۸۶ صفحه با گشودگی شبه مستطیلی توسط نایک^۴ [۴] بررسی شد. هافنباخ^۵ [۵] و همکارانش حل تحلیلی را برای میدان تنش و کرنش اطراف یک گشودگی بیضوی در صفحات غیرهمگن ارائه دادند. هوو^۶ و همکارانش [۶] یک حل تحلیلی برای تعیین توزیع تنش اطراف یک گشودگی مثلثی در صفحه غیرهمگن نامحدود را ارائه دادند. ابوالفتوح^۷ [۷] رابطه واحدی را برای مولفه تنش مماس بر مرز گشودگی برای هندسه‌های دایره‌ای - بیضوی - مثلثی و

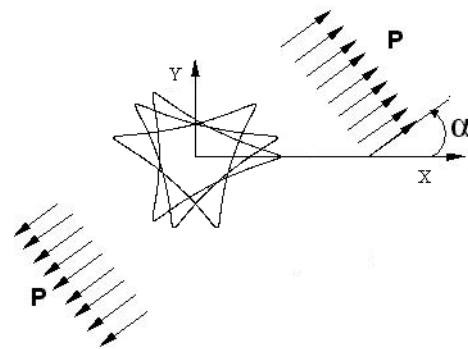
مختلف همچنین بررسی پارامترهای حاکم بر توزیع تنش از جمله شعاع انحنا (نرمی) گشودگی برای اولین بار در این مقاله مطرح شده است.

در این تحلیل، از یک صفحه حاوی گشودگی مرکزی استفاده شده است. گشودگی چنان در نظر گرفته شده، که مساله به شکل صفحه شبه بی‌نهایت درآید (اندازه گشودگی در مقابل ابعاد صفحه کوچک است).

ماده دارای رفتار الاستیک خطی است و صفحه تحت بار تک جهتی کششی مطابق شکل ۱ قرار گرفته است. همانطور که در این شکل دیده می‌شود محور اصلی گشودگی در امتداد محور x است. مواد بکار رفته در این تحلیل شامل مواد همسانگرد و غیرهمسانگرد بوده و خواص آن مطابق جدول ۱ است.

جدول ۱- مشخصات مواد به کار رفته در تحقیق حاضر

مواد	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
Steel	۲۰۷	۲۰۷	۷۹/۳	۰/۳
Woven Glass/Epoxy CE9000	۲۹/۷	۲۹/۷	۵/۳	۰/۱۷
Glass/Epoxy[6]	۴۷/۴	۱۶/۲	۷	۰/۲۶
Carbon/Epoxy	۱۸۱	۱۰/۳	۷/۱۷	۰/۲۸
Plywood	۱۱/۷۹	۵/۸۹	۰/۶۹	۰/۰۷۱



شکل ۱- صفحه بی‌نهایت تحت کشش با گشودگی مرکزی

¹ Savin

² Lekhnitskii

³ Theocaris

⁴ Naik

⁵ Hufenbach

⁶ Hoa

⁷ Abuelfoutouh

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

بنابراین با جایگذاری تابع تنش در رابطه سازگاری (۱)، معادله سازگاری برای ماده غیرهمسانگرد و برحسب تابع تنش بصورت زیر می‌باشد:

$$R_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2R_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2R_{12} + R_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2R_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + R_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (4)$$

در این رابطه R_{ij} اعضاء ماتریس نرمی کاهش یافته صفحه می‌باشند که براساس فرض کرنش صفحه‌ای یا تنش صفحه‌ای بصورت تابعی از C_{ij} (اعضای ماتریس سفتی) و S_{ij} (اعضای ماتریس نرمی) می‌باشند. معادله فوق به کمک چهار عملگر مشتق خطی مرتبه اول بصورت زیر بیان می‌شود [۲]:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 U = 0 \quad (5)$$

$$D_i (i=1,2,3,4) = \partial / \partial y - S_i \partial / \partial x$$

که S_i جواب معادله مشخصه زیر است:

$$R_{11} S^4 - 2R_{16} S^3 + (2R_{12} + R_{66}) S^2 - 2R_{26} S + R_{22} = 0 \quad (6)$$

ثابت می‌شود که معادله فوق چهار ریشه موهومی دارد که در حالت کلی برای مواد غیرهمسانگرد این چهار ریشه برابر نمی‌باشند [۲]. چهار ریشه این معادله را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$S_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1 \quad (7)$$

$$S_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2$$

چون ریشه‌ها دو به دو مزدوج هم هستند، بنابراین حل معادله (۴) باتوجه به ریشه‌های معادله مشخصه به صورت زیر خواهد بود:

$$U(x, y) = \overline{F_1(z_1)} + \overline{F_2(z_2)} + \overline{F_1(z_1)} + \overline{F_2(z_2)} \quad (8)$$

که z_i توسط انتقال ساده زیر بدست می‌آید:

$$z_i = x + s_i y \quad i=1,2 \quad (9)$$

در رابطه (۸)، F_1 و F_2 دو تابع تحلیلی هستند و $\overline{F_1}$ و $\overline{F_2}$ بترتیب مزدوج آنها می‌باشند. فرض زیر به خاطر پایین آمدن مرتبه مشتق مفید است:

مربعی در صفحه نامحدود از ماده ارتوتروپیک خاص تحت کشش بیان نمود. یوکاچونکر^۱ [۸] از روش متغیر مختلط لخنیتسکی [۲] و ساوین [۱] برای حل مسائل تمرکز تنش در چندلایه‌های متقارن کمک گرفت. در مقاله [۹] از تئوری صفحات غیرهمسانگرد برای محاسبه ضریب تمرکز تنش برای صفحات مواد مرکب دارای گشودگی دایره‌ای استفاده شده است. همچنین تحلیل تنش گشودگی‌های مختلف توسط مولفین از روش‌های مختلف انجام شده است. نتیجه تحقیقات آنها در این زمینه بسته به مطالعه پارامترهای مختلف تاثیرگذار بر مساله تمرکز تنش در مراجع [۱۱-۱۳] موجود می‌باشد. در این مقاله سعی شده است تا برای گشودگی‌های مختلف و مواد همسانگرد و غیرهمسانگرد، تاثیر شعاع انحنای گشودگی بر روی مقدار تنش ماکزیمم ایجادشده در اطراف گشودگی مورد مطالعه قرار گیرد.

۳- روش حل تحلیلی

کار تحلیلی حاصل براساس تئوری الاستیسیته مواد غیرهمسانگرد ارائه شده توسط لخنیتسکی می‌باشد. در این روش تابع تنش به عبارتی تحلیلی با ضرایب نامعین تبدیل می‌شود. با مشخص شدن تابع تنش می‌توان تغییرمکان‌ها و تنش‌ها را محاسبه نمود [۲]. در حالت دو بعدی رابطه سازگاری بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

رابطه تنش و کرنش برحسب ماتریس نرمی کاهش یافته بصورت زیر است:

$$\varepsilon_x = R_{11}\sigma_x + R_{12}\sigma_y + R_{16}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = R_{12}\sigma_x + R_{22}\sigma_y + R_{26}\tau_{xy} \quad (2)$$

$$\gamma_{xy} = R_{16}\sigma_x + R_{26}\sigma_y + R_{66}\tau_{xy}$$

از طرفی اگر $U(x,y)$ تابع تنش باشد پس:

¹ Ukadgaonker

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re}[s_1^2 \phi_0(z_1) + s_2^2 \psi_0(z_2)] \quad (14)$$

در رابطه فوق منظور از $\operatorname{Re}[\]$ قسمت حقیقی عبارت داخل کروشه است. به همین ترتیب بقیه تنش‌ها که در رابطه زیر ارائه شده، محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re}[S_1^2 \phi_0'(z_1) + S_2^2 \psi_0'(z_2)]$$

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re}[\phi_0'(z_1) + \psi_0'(z_2)] \quad (15)$$

$$\tau_{xy} = 2 \operatorname{Re}[S_1 \phi_0'(z_1) + S_2 \psi_0'(z_2)]$$

که $i=1,2$ و $z_i=x+s_i y$

توابع تحلیلی $\phi_0(z_1)$ و $\psi_0(z_2)$ به صورت توابع انتگرالی که توسط ساوین تعریف شده اند می‌باشد. البته توابع فوق به فرم‌های دیگری مثل سری لورنت نیز تعریف می‌شود [۲]. روش ارائه شده در بالا توسط لخنیتسکی فقط برای گشودگی دایره و بیضی استفاده شده است که می‌توان با پیدا کردن ارتباط بین شکل‌های هندسی مختلف آن را برای سایر گشودگی‌ها نیز استفاده کرد. در قسمت بعدی مقاله این ارتباط معرفی شده و با استفاده از آن حل به سایر گشودگی‌ها تعمیم داده می‌شود. لازم به توضیح است که تحلیل حاضر براساس فرض تنش صفحه ای انجام شده است.

۴- نحوه ایجاد گشودگی‌های مختلف

همانطور که در قسمت قبل اشاره شد باید روابط ارائه شده برای گشودگی‌های دایره و بیضی را به سایر گشودگی‌ها تعمیم داد. لازم این کار این است که ابتدا بتوان گشودگی‌های مختلف را ایجاد کرد. این رابطه بصورت زیر معرفی می‌شود که با انتخاب پارامترهای مناسب می‌توان گشودگی‌های مختلف را ایجاد کرد [۷]:

$$X = \lambda(\cos\theta + w \cos(n\theta)) \quad (16)$$

$$Y = -\lambda(c \sin\theta - w \sin(n\theta))$$

در این رابطه پارامترهای مختلفی از قبیل λ و n و w و c دیده می‌شود. این پارامترها هم نوع شکل را نشان می‌دهند و هم بزرگی و تیزی یا نرمی آن را. مثلاً c و n نشان دهنده نوع هندسه گشودگی است. λ بزرگی گشودگی را نشان می‌دهد و در گشودگی‌های لبه دار w معیار تیزی یا نرمی انحنای گشودگی است. بعنوان مثال برای گشودگی مثلثی باید $n=2$ و $c=1$ باشد و برای گشودگی شبه مربعی $n=3$ و $c=1$

$$\frac{dF_1}{dz_1} = \phi_0(z_1) \quad , \quad \frac{dF_2}{dz_2} = \psi_0(z_2) \quad (10)$$

$$\overline{\frac{dF_1}{dz_1}} = \overline{\phi_0(z_1)} \quad , \quad \overline{\frac{dF_2}{dz_2}} = \overline{\psi_0(z_2)}$$

با توجه به معادلات (۳) و (۸) و (۱۰) می‌توان نتیجه گرفت که تنش‌های داخل صفحه‌ای بصورت تابعی از دو تابع تنش $\phi_0(z_1)$ و $\psi_0(z_2)$ بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} [F_1(z_1) + F_2(z_2)]$$

$$+ \overline{F_1(z_1) + F_2(z_2)} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{dF_1}{dz_1} \frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{dF_2}{dz_2} \frac{\partial z_2}{\partial y} + \overline{\frac{dF_1}{dz_1} \frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{dF_2}{dz_2} \frac{\partial z_2}{\partial y}} \right] \quad (11)$$

باتوجه به رابطه (۱۰) می‌توان رابطه اخیر را به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial y} [s_1 \phi_0(z_1) + s_2 \psi_0(z_2) + \overline{s_1 \phi_0(z_1) + s_2 \psi_0(z_2)}] \quad (12)$$

حاصل $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ به این صورت محاسبه می‌شود که اگر فرض کنیم $s_1 = \alpha + i\beta$ آنگاه $z_1 = x + (\alpha + i\beta)y$ در نتیجه پس $\overline{z_1} = x + \alpha y - i\beta y$ به همین ترتیب $\frac{\partial \overline{z_1}}{\partial y} = \alpha - i\beta = \overline{s_1}$ می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{\partial \overline{z_2}}{\partial y} = \overline{s_2}$. بنابراین حاصل مشتق بعدی و مقدار تنش σ_x بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma_x = [s_1^2 \phi_0(z_1) + s_2^2 \psi_0(z_2) + \overline{s_1^2 \phi_0(z_1) + s_2^2 \psi_0(z_2)}] \quad (13)$$

باتوجه به رابطه $\overline{z} + z = 2 \operatorname{Re}[z]$ می‌توان نوشت:

مثلی بوده و در مطالعه انجام شده توسط آنها هیچ اشاره‌ای به چرخش گشودگی صورت نگرفته است. در جدول ۲ نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج آنها مقایسه شده است. همانطور که در جدول ۲ دیده می‌شود برای ماده CE9000، دو جواب کاملاً یکدیگر را تایید می‌کنند. این مقایسه برای گشودگی مثلی و برای $w=1/3$ صورت گرفته است. موقعیت نقاط مورد بحث مطابق شکل ۱ است و زاویه θ نشان دهنده نقاطی روی گشودگی است که تحت این زاویه نسبت به محور x قرار گرفته‌اند. دلیل دیگر برای درستی جواب‌ها و نتایج حاصل از این حل تحلیلی، تمرکز تنش گشودگی دایره‌ای مربوط به مواد همسانگرد است. بر اساس کتاب‌های مقاومت مصالح این مقدار برابر ۳ است؛ که تمام شکل‌های مربوطه برای مواد همسانگرد مثلاً شکل ۳ در $w=0$ این موضوع را تایید می‌کند.

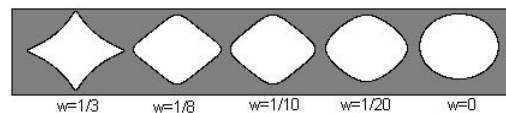
جدول ۲- مقایسه تنش نرمال ماکزیمم برای گشودگی مثلی

θ (درجه)	X (طول)	حل هووا [۶]		حل حاضر		درصد اختلاف
		$w=1/3$	$w=1/3$	$w=1/3$	$w=1/3$	
۰	۱/۳۳۳	-۰/۶۱۷	-۰/۶۲۰	-۰/۶۲۰	-۰/۶۲۰	۰/۴۸
۶۰	۰/۳۳۳	۰/۴۲۶	۰/۴۲۶	۰/۴۲۶	۰/۴۲۶	۰
۱۱۰	-۰/۵۹۷	۵/۸۷۹	۵/۸۳۰	۵/۸۳۰	۵/۸۳۰	۰/۸۳
۱۱۵/۱۷	-۰/۶۳۸	۱۲/۱۳۱	۱۲/۳۹۰	۱۲/۳۹۰	۱۲/۳۹۰	۲/۱۳
۱۲۰	-۱/۱۶۷	۶/۲۷۸	۶/۳۷۰	۶/۳۷۰	۶/۳۷۰	۱/۴۷

۶- نتایج

تاثیر نرمی گشودگی بر توزیع تنش، بسته به نوع گشودگی و نوع ماده از لحاظ همسانگرد یا غیرهمسانگرد بودن متفاوت خواهد بود. لازم به توضیح است که در مورد مواد همسانگرد رفتار به نوع ماده بستگی ندارد و فقط به هندسه گشودگی بستگی دارد. با عنایت به این موضوع تاثیر نرمی گشودگی در گشودگیهای مختلف بصورت جداگانه بررسی می‌شود. ذکر این نکته لازم است که در مورد مواد همسانگرد بیشترین تنش نرمال همان تمرکز تنش نیز است. منظور از تنش نرمال (تمرکز تنش)، تقسیم بیشترین تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی به تنش اعمالی است. در تحلیل‌های انجام شده زاویه بار و زاویه ناهمسانگردی صفر می‌باشند ولی زاویه چرخش گشودگی تغییر می‌کند؛ با تغییر این زاویه، در هر زاویه چرخش خاص یک تنش نرمال ماکزیمم در اثر کشش

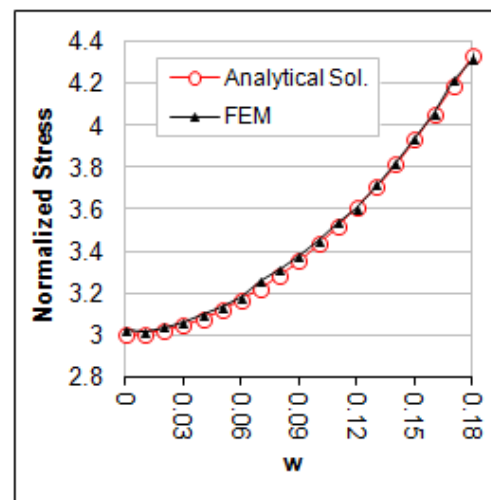
مقاله هدف بررسی تاثیر w در توزیع تنش است. برای مشخص شدن اثر w در ایجاد گشودگی‌ها شکل ۲ آورده شده است. در شکل ۱ زاویه بار و چرخش گشودگی نشان داده شده است. در این شکل α زاویه بار و گشودگی در سه زاویه چرخش صفر، ۱۵ و ۴۵ درجه آورده شده است. لازم به توضیح است که در این مقاله زاویه بار صفر در نظر گرفته شده است.



شکل ۲- اثر w برای گشودگی شبه مربعی

۵- راستی آزمایی جواب‌ها

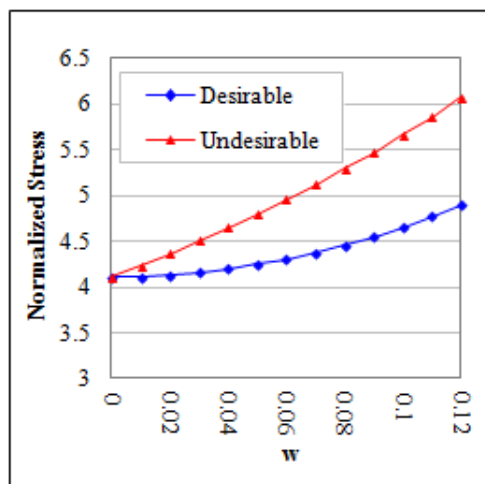
جهت راستی آزمایی جواب‌ها و نتایج ارائه شده در این مقاله از روش‌های عددی و کارهای انجام شده توسط سای محققین استفاده شده است. در ابتدا همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است، نزدیکی خوبی بین حل موجود و حل عددی حاصل از روش المان محدود ملاحظه می‌شود. این تحلیل برای ماده همسانگرد و گشودگی مثلی انجام شده است.



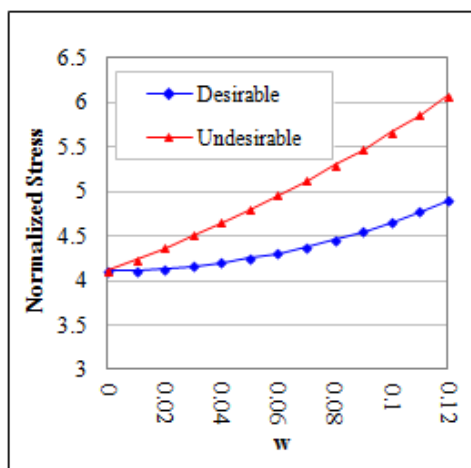
شکل ۳- مقایسه حل المان محدود و حل تحلیلی حاضر برای گشودگی مثلی

بیشتر حل مشابهی توسط هووا و همکارانش [۶] ارائه شده است؛ با این تفاوت که نتایج آنها فقط برای گشودگی

کمتر شدن w یا ملایم‌تر شدن گشودگی تمرکز تنش مطلوب و نامطلوب هر دو کاهش می‌یابند؛ طوری که کمترین مقدار تمرکز تنش در کمترین w ($w=0$) و گشودگی دایره‌ای رخ می‌دهد. همانطور که برای گشودگی دایره‌ای انتظار می‌رود مقدار این تمرکز تنش ۳ است. در این حالت برای گشودگی مثلی همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، تمرکز تنش مطلوب و نامطلوب بترتیب در زاویه چرخش صفر (یا ۶۰ و ۳۰) درجه اتفاق می‌افتد. تابع تمرکز تنش برحسب زاویه چرخش یک تابع متناوب با دوره تناوب ۶۰ درجه است.

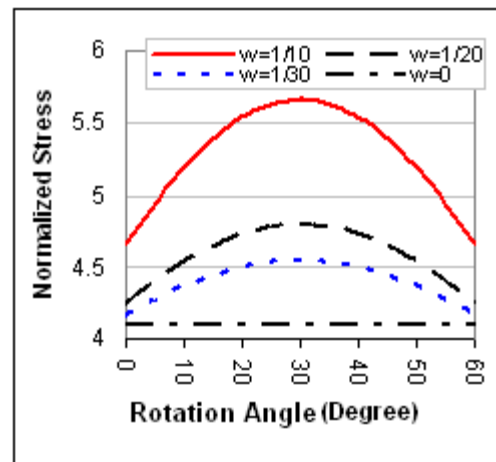


شکل ۵- تغییرات ماکزیمم تنش نرمال (تمرکز تنش) با w برای مواد همسانگرد و گشودگی مثلی



شکل ۶- تغییرات ماکزیمم تنش نرمال با w برای مواد غیرهمسانگرد و گشودگی مثلی

بدست می‌آید؛ پس اگر زاویه چرخش از صفر تا ۱۸۰ تغییر کند به ازای هر زاویه چرخش یک تنش نرمال ماکزیمم وجود دارد؛ از بین این تنش‌های نرمال ماکزیمم کمترین و بیشترین مقدار بترتیب تنش مطلوب و تنش نامطلوب نامیده شده است. در طراحی‌ها باید از تنش نامطلوب اجتناب کرد و به شرایط تنش مطلوب نزدیک شد. بعنوان مثال برای گشودگی مثلی در شکل ۴ برای w های مختلف و ماده CE9000 تغییرات تنش نرمال ماکزیمم برحسب زاویه چرخش آورده شده است. باتوجه به شکل، تنش مطلوب برای این گشودگی در زاویه صفر یا ۶۰ درجه اتفاق می‌افتد و تنش نامطلوب در زاویه ۳۰ درجه رخ می‌دهد. ضمناً بخاطر رفتار تناوبی تابع، نتایج در فاصله زاویه چرخش صفر تا ۶۰ درجه آورده شده است.

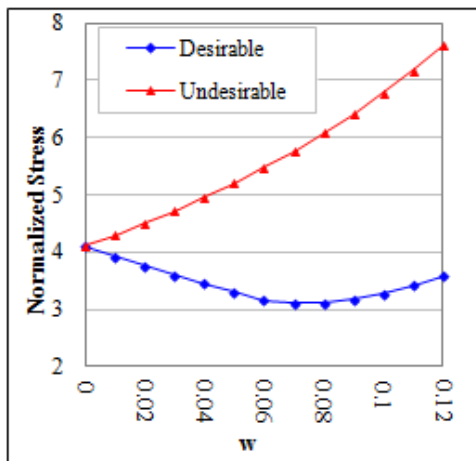


شکل ۴- تغییرات تنش نرمال ماکزیمم برحسب زاویه چرخش برای گشودگی مثلی

۶-۱- گشودگی مثلی

همانطور که قبلاً نیز بیان شد اثر نرمی گشودگی با پارامتر w در معادله (۷) مشخص می‌شود. مطابق آنچه در شکل ۲ نشان داده شده است، با کمتر شدن w گشودگی ملایم‌تر می‌شود و در $w=0$ گشودگی، به دایره تبدیل می‌شود. البته این شکل برای گشودگی شبه‌مربعی است ولی برای سایر گشودگی‌ها اثر w به همین صورت است. در مورد گشودگی مثلی همانطور که در شکل ۵ برای ماده همسانگرد دیده می‌شود، با

نسبت به گشودگی دایره‌ای رسید. مقدار این w برای مواد همسانگرد و غیرهمسانگرد متفاوت است. این مقدار برای ماده همسانگرد و غیرهمسانگرد (CE9000) بترتیب برابر ۰/۰۵ و ۰/۰۷ است.



شکل ۸- تغییرات ماکزیمم تنش نرمال با w برای مواد غیرهمسانگرد و گشودگی شبه مربعی

در مورد مواد غیرهمسانگرد مقدار w بهینه همانطور که در شکل ۹ نیز نشان داده شده است با نوع ماده متفاوت است. برحسب نوع ماده w بهینه در جدول ۳ مشخص شده است. این کمترین تنش در زاویه چرخش ۴۵ درجه رخ می‌دهد. همچنین ماکزیمم تنش نامطلوب در زاویه صفر یا ۹۰ اتفاق می‌افتد. پس این گونه نیست که همیشه گشودگی دایره‌ای بهترین گشودگی باشد. گشودگی‌های خاصی وجود دارد که تحت آنها می‌توان به تنش نرمال ماکزیمم کمتری نسبت به گشودگی دایره‌ای رسید. در این حالت نیز تابع تنش نرمال ماکزیمم برحسب زاویه چرخش یک تابع متناوب با دوره تناوب ۹۰ می‌باشد.

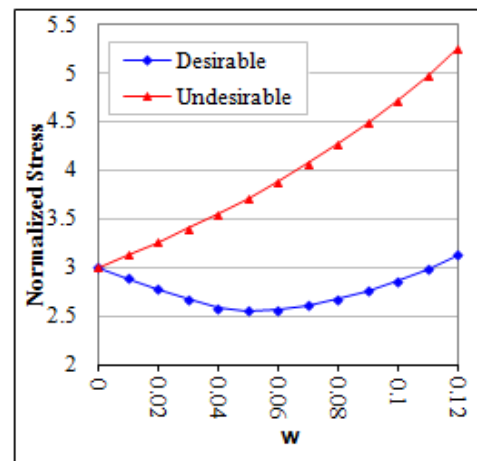
جدول ۳- w بهینه برای مواد مختلف و گشودگی شبه مربعی

w	ماده
۰/۰۵	Isotropic
۰/۰۷	Woven Glass/Epoxy(7781/5245C)
۰/۰۷	CE9000 Glass/Epoxy
۰/۰۸	Plywood
۰/۰۹	Carbon/Epoxy

برای مواد غیرهمسانگرد، نتایج کلی مشابه مواد همسانگرد است یعنی برای این مواد نیز با کاهش w تمرکز تنش می‌یابد و کمترین تنش در حالت $w=0$ رخ می‌دهد. با این تفاوت که مقادیر تنش نرمال ماکزیمم مطلوب و نامطلوب با مواد همسانگرد کاملاً فرق می‌کند و در مواد غیرهمسانگرد نوع ماده تاثیر زیادی در مقادیر تنش نرمال ماکزیمم دارد؛ حال آنکه در مورد مواد همسانگرد تمرکز تنش مستقل از ماده می‌باشد. این نتایج برای ماده CE9000 آورده شده است. در شکل ۶ تاثیر w بر روی تنش نرمال ماکزیمم برای CE9000 نشان داده شده است.

۶-۲- گشودگی شبه مربعی

برای گشودگی شبه مربعی همانطور که در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است، رفتار متفاوتی نسبت به گشودگی مثلثی دیده می‌شود.

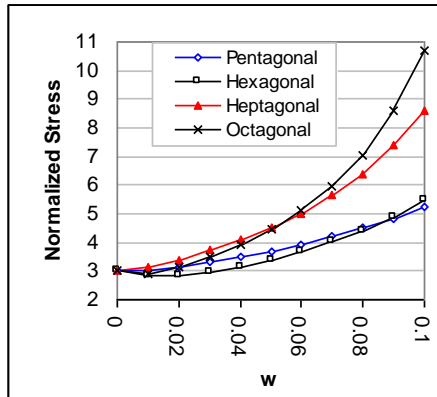


شکل ۷- تغییرات ماکزیمم تنش نرمال (تمرکز تنش) با w برای مواد همسانگرد و گشودگی شبه مربعی

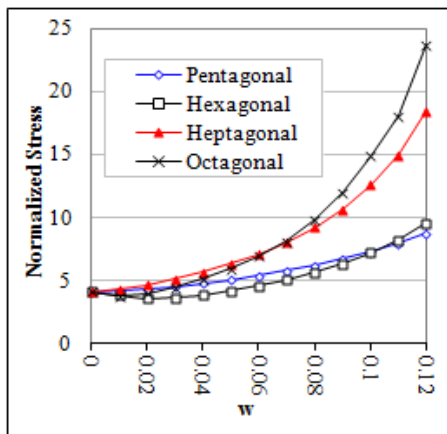
در این نوع گشودگی برای ماده همسانگرد و غیرهمسانگرد تنش نامطلوب با کاهش w کاهش می‌یابد و در نهایت به مقدار تنش نرمال ماکزیمم برای گشودگی دایره‌ای می‌رسد. ولی تنش مطلوب دارای مقداری کمتر از تنش نرمال ماکزیمم گشودگی دایره‌ای است. این شکل‌ها نشان می‌دهند که برای گشودگی شبه مربعی w بهینه‌ای وجود دارد که با ایجاد گشودگی مطابق آن می‌توان به تمرکز تنش کمتری

۳-۶- گشودگی n- ضلعی

برای گشودگی‌های n ضلعی دوگونه رفتار دیده می‌شود. برای برخی از چند ضلعیها (چندضلعی‌های با اضلاع فرد) رفتاری مشابه گشودگی مثلثی ملاحظه می‌شود و برخی دیگر (چندضلعی‌های با اضلاع زوج) رفتاری مشابه گشودگی شبه مربعی دارند. برای گشودگی‌های چند ضلعی با اضلاع فرد، تنش نرمال ماکزیمم بهینه همان گشودگی دایره‌ای است. برای گشودگی‌های با اضلاع زوج، w بهینه ای وجود دارد که مقدار آن برای گشودگی‌ها و مواد مختلف در جدول ۴ نشان داده شده است. در اینجا نیز برای مواد غیرهمسانگرد مختلف، w های بهینه متفاوت وجود دارد. برای تمام گشودگیها رفتار تناوبی دیده می‌شود. شکل‌های ۱۰ و ۱۱ فقط تنش مطلوب را نشان می‌دهند.



شکل ۱۰- تغییرات ماکزیمم تنش نرمال (تمرکز تنش) با w برای مواد همسانگرد و گشودگیهای n ضلعی



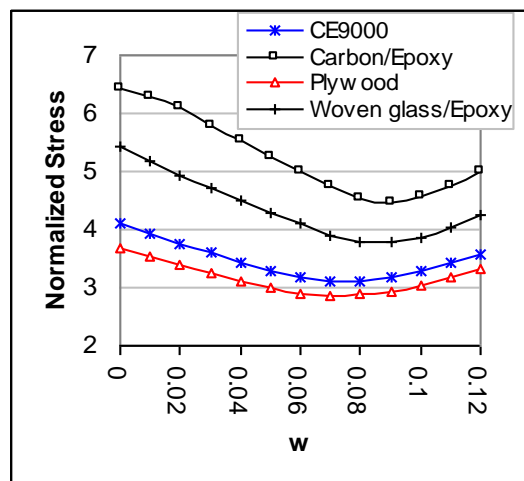
شکل ۱۱- تغییرات ماکزیمم تنش نرمال با w برای مواد غیرهمسانگرد و گشودگیهای n ضلعی

۷- نتیجه گیری

در این مقاله اثر نرمی و تیزی گشودگیهای مختلف در صفحات تحت کشش با استفاده از روش تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. در حالت کلی می‌توان از این تحقیق چنین نتیجه گرفت که اولاً نوع گشودگی و نرمی یا تیزی گشودگی در مقدار تنش نرمال ماکزیمم تاثیر بسزایی دارد و در گشودگی‌ها با شکل‌های متفاوت این ماکزیمم در نقاط متفاوتی رخ می‌دهد. ثانیاً با نرمتر شدن شعاع انحنای برای برخی از گشودگی‌ها تنش نرمال ماکزیمم کاهش می‌یابد. ثالثاً برای بعضی از گشودگی‌ها مانند شبه مربعی، شش ضلعی و هشت

جدول ۴- w بهینه برای مواد مختلف و گشودگیهای مختلف

w	ماده	نوع بریدگی
۰/۰۱۵	Isotropic	شش ضلعی
۰/۰۲	CE9000	هشت ضلعی
۰/۰۰۵	Isotropic	شش ضلعی
۰/۰۱	CE9000	شش ضلعی



شکل ۹- تغییرات تنش نرمال در اثر تغییر w برای مواد مختلف

- [6] Daoust J, Hoa SV (1991) An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes. *Compos Struct.*19:107–30.
- [7] Abuelfoutouh NM (1993) Preliminary Design Of Unstiffend Composite Shells, Symposium Of 7th technical Conference of ASC.686–693.
- [8] Ukadgaonker VG, Rao DKN (2000) A general solution for stress resultants and moments around holes in asymmetric laminates. *Compos Struct.*49:27-39.
- [9] Berbinau P, Soutis C (2001) A New Approach for Solving Mixed Boundary Value Problems Along Holes in Orthotropic Plates. *Internatinal Journal of Solids and Structures* 38:143–159.
- [10] Rezaeepazhand J, Jafari M (2005) Stress analysis of perforated composite plates. *Compos Struct.*71:463–468.
- [11] Rezaeepazhand J, Jafari M (2006) Stress concentration in composite plates with special shaped cutout. *Proceeding of 12th European Conference on Composite Materials.*
- [12] Rezaeepazhand J, Jafari M (2010) Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout. *Int J Mech Sci* : 96–102.
- [13] Rezaeepazhand J, Jafari M (2010) Stress analysis of composite plates with quasi-square cut out subjected to uniaxial tension. *J Reinf Plast Comp*: 29: 2015–2026.

ضلعی با در نظر گرفتن چرخش گشودگی می‌توان به تنش نرمال ماکزیمم کمتری از گشودگی دایره‌ای دست یافت. رابعاً نوع ماده غیرهمسانگرد نیز در مقدار w (معیار تیزی یا نرمی بریدگی) بهینه تاثیر دارد ولی برای ماده همسانگرد، ماده هیچ تاثیری در تمرکز تنش ندارد. در اینجا تنش بصورت تنش نرمال ارائه شده است و بصورت تقسیم ماکزیمم تنش بر تنش اعمالی تعریف می‌شود.

مراجع

- [1] Savin GN (1961) Stress concentration around holes. Pergamon Press, New York.
- [2] Lekhnitskii SG (1968) Anisotropic plates, Gordon & Breach Science Publishers, New York.
- [3] Theocaris PS, Petrou L (1986) Stress distributions and intensities at corners of equilateral triangular holes. *Int J Fract.* 31: 271–89.
- [4] Naik NK (1984) Optimum quasi-rectangular holes whit minimum SCF in finite plates under uniaxial loading. *J Reinf Plast Comp* 2: 164–177.
- [5] Hufenbach W, Schaffer M, Herrmann (1990) Calculation of the stress and displacement field of anisotropic plates with elliptical hole. *Ingenieur Arch* 60:507–17.