



تحلیل ارتعاشات آزاد پانل استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی قرار گرفته بر روی بستر الاستیک پاسترناک تحت تأثیر میدان‌های مغناطیسی با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول

مهدی محمدی مهر^{۱*}، علی قربان پور آرانی^۲ و برهان روستا ناوی^۴

^۱ استادیار، گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان

^۲ استاد، گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

^۳ استاد، پژوهشکده علوم و فناوری نانو، دانشگاه کاشان

^۴ دانشجوی دکتری، گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۶/۱۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۱/۱۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۲/۱۷

چکیده

در این مقاله، تأثیر میدان مغناطیسی روی ارتعاشات آزاد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک پاسترناک با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بررسی می‌شود. معادلات حاکمه حرکت با استفاده از اصل همپلتون و روش انرژی بدست می‌آید. سپس این معادلات با استفاده از روش ناپیر حل می‌گردد. در این تحقیق تأثیر پارامترهای مختلف شامل نسبت شعاع به طول، نسبت ضخامت به طول و زاویه قطاع پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی، بستر الاستیک و میدان‌های مغناطیسی بر روی فرکانس طبیعی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی پانل استوانه‌ای با افزایش نسبت شعاع به طول، ضخامت به طول، زاویه قطاع پانل استوانه‌ای کاهش می‌یابد، در حالی که پایداری آن با در نظر گرفتن تأثیر بستر الاستیک می‌یابد. همچنین فرکانس طبیعی پانل استوانه ساخته شده از مواد مدرج تابعی با اعمال میدان مغناطیسی افزایش می‌یابد و تأثیر میدان‌های مغناطیسی روی فرکانس‌های طبیعی بالاتر بیشتر از فرکانس‌های طبیعی پایین‌تر می‌باشد.

کلمات کلیدی: ارتعاشات آزاد؛ پانل استوانه‌ای؛ مواد مدرج تابعی؛ تئوری برشی مرتبه اول؛ میدان مغناطیسی.

Free vibration of the cylindrical panel made of functionally graded materials resting on pasternak elastic foundation subjected to magnetic fields using first order shear deformation theory

M. Mohammadimehr^{1*}, A. Ghorbanpour Arani^{2,3} and B. Rosta Navi⁴

^{1*} Assist. Prof., Department of Solid Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

² Prof., Department of Solid Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

³ Prof., Institute of Nanoscience & Nanotechnology, University of Kashan, Kashan, Iran

⁴ Ph.D. Student, Department of Solid Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

Abstract

In this paper, magnetic field effect on the free vibration of cylindrical panel made of functionally graded materials resting on pasternak elastic foundation using first order shear deformation theory for simply supported edges is investigated. The governing equations of motion are obtained by using principle of the Hamilton and energy method. These equations are solved by the navier method. The effect of geometrical parameters such as the radius to length ratio, thickness to length ratio, sector angle of cylindrical panel and Pasternak elastic foundation on the natural frequencies are studied. It is observed that the natural frequencies of cylindrical panel made of functionally graded materials with increasing the radius to length ratio, thickness to length ratio, and sector angle of cylindrical panel decreases, while its stability increases by considering the effect of pasternak elastic foundation. Also the natural frequencies of cylindrical panel made of functionally graded materials increases by applied magnetic field and influence of magnetic field on the higher natural frequencies is higher than that of the lower frequencies.

Keywords: Free vibration; cylindrical panel; functionally graded materials; first order shear theory; magnetic field.

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی^۱ دسته‌ای از مواد کامپوزیتی هستند که خواصشان به صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند. این مواد در خیلی از کاربردهای صنعتی شامل: راکتورهای هسته-ای (مواد تشکیل دهنده دیواره داخلی راکتور)، صنایع شیمیایی (غشاءها و کاتالیست‌ها)، استفاده در صنایع پزشکی (کاشت دندان مصنوعی، استخوان‌های مصنوعی)، صنایع الکترونیک و کامپیوتر (ساخت قطعات و مدارها برای تحمل دمای بالا) و سایر فن‌آوری‌های نوین مانند موتورهای سرامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. به علت کاربردهای فراوان مواد مدرج تابعی، محققان علاقه‌مند به بررسی و تحقیق در مورد مشخصه‌های دینامیکی و استاتیکی این مواد می‌باشند.

مطالعه بر روی ارتعاشات پانل‌های استوانه‌ای شکل یک بخش مهمی از مکانیک جامدات را به خود اختصاص داده است. علم ارتعاشات در استوانه‌ها، می‌تواند در مسائل مرتبط با دینامیک تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها، شتاب‌سنج‌ها استفاده شود. مک گی و کیم ارتعاشات سه بعدی جامد الاستیک استوانه‌ای شکل همراه با شیار V شکل و ترک‌های شعاعی تیز را مورد بررسی قرار دادند [۱]. ارتعاشات و سرعت انتشار موج شعاعی در استوانه‌های جدار ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی توسط شاکری و همکارانش مورد مطالعه قرار گرفت [۲]. باچانان ارتعاشات آزاد مخازن الکترومگنتو الاستیک را بررسی نمود [۳]. حل دقیق ارتعاشات کرنش صفحه‌ای مخازن پیروالاستیک جدار ضخیم توسط ردی و تاجودین ارائه شد [۴]. وانگ و همکارانش حل دقیق سه بعدی برای ارتعاشات آزاد صفحات استوانه‌ای شکل الکترومگنتو الاستیک با تکیه گاه ساده را به دست آورد [۵].

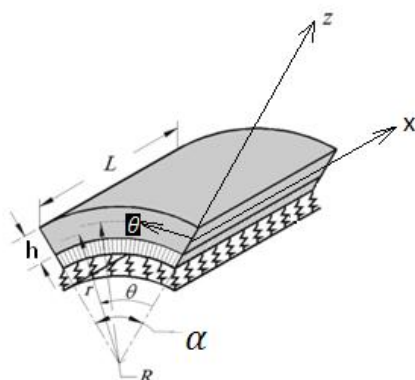
قربان‌پور و همکارانش رفتار الکترومگنتو ترمومکانیکی کره توخالی ضخیم ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند [۶]. هیلگر و جیلانی به تحقیق در مورد ارتعاشات آزاد مخازن استوانه‌ای شکل و کروی الاستیک از جنس مواد مدرج تابعی پرداختند [۷]. خرمی و حسینی به تحلیل ارتعاشات آزاد پانل استوانه‌ای نسبتاً ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی با استفاده از روش مربعات

دیفرانسیلی پرداختند [۸]. ژائو و همکارانش تحلیل ترموالاستیک و ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد مدرج تابعی با استفاده از روش بدون مش kp-Ritz بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول را مورد بررسی قرار دادند [۹]. ارتعاشات آزاد صفحات خمیده ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی در معرض تنش‌های اولیه و حرارتی که بر روی محیط پاسترناک توسط فرید و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت [۱۰]. بوداچی و شاکری روش تحلیلی برای ارتعاشات آزاد و پاسخ گذرای پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت بارهای ضربه‌ای را ارائه دادند [۱۱].

چن و همکارانش تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای با قیود مرزی الاستیک غیر یکنواخت مورد بررسی قرار دادند. نتایج آنها نشان داد شرایط مرزی روی فرکانس طبیعی مودهای ارتعاشی نیز تاثیرگذارند. همچنین اثر مرزهای فنی کششی بر فرکانس طبیعی بیشتر از اثر مرزهای فنی پیچشی می‌باشد [۱۲]. تحلیل ارتعاشات آزاد پانل استوانه‌ای ساخته شده از ماده مدرج تابعی با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالاتر توسط نواس و همکارانش [۱۳] انجام شد. آنها نشان دادند که فرکانس طبیعی با افزایش نسبت شعاع به طول R/a و افزایش پارامتر ماده تابعی کاهش می‌یابد. همچنین فرکانس طبیعی برای پانل استوانه‌ای با شرایط مرزی گیردار بزرگتر از فرکانس طبیعی پانل استوانه‌ای با شرایط مرزی ساده می‌باشد. ملک زاده و همکارانش [۱۴] به بررسی ارتعاشات آزاد سه بعدی پانل استوانه‌ای توخالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی با روش ریتز-چیشف^۲ پرداختند. مواد پانل استوانه‌ای وابسته به دما و متغیر در راستای ضخامت فرض شد. نتایج آنها نشان داد که تغییرات فرکانس طبیعی بر اثر افزایش دما برای پانل استوانه‌ای توخالی ساخته شده از ماده مدرج تابعی بیشتر از پانل استوانه‌ای کامل افزایش می‌یابد. همچنین برای یک میزان ثابت افزایش دما، افزایش پارامتر کسر حجمی باعث کاهش فرکانس طبیعی پانل استوانه‌ای توخالی می‌گردد. شنگ و وانگ [۱۵] ارتعاشات غیر خطی پوسته استوانه‌ای ساخته شده از ماده مدرج تابعی را تحت بارهای گرمایی و محوری بر

2. Chebyshev-Ritz

1. Functionally graded material



شکل ۱- پانل استوانه‌ای جدار ضخیم بر بستر الاستیک پاسترناک

۲-۲- روابط سینماتیکی با استفاده از تئوری

برشی مرتبه اول

با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی برای پانل استوانه‌ای در مختصات استوانه‌ای به صورت رابطه (۲) در نظر گرفته می‌شود [۱۶]:

$$\begin{aligned} U(x, \theta, z) &= u_x(x, \theta, z) + z \beta_x(x, \theta, z) \\ V(x, \theta, z) &= u_\theta(x, \theta, z) + z \beta_\theta(x, \theta, z) \\ W(x, \theta, z) &= w(x, \theta, z) \end{aligned} \quad (2)$$

که u_x ، u_θ و w جابجایی صفحه میانی پانل ($z=0$) به ترتیب در راستای x ، θ و z می‌باشند. همچنین β_x ، β_θ به ترتیب دوران حول محورهای θ و x است. روابط سینماتیکی خطی برای پانل استوانه‌ای به صورت روابط زیر نوشته می‌شود [۸]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z \kappa_x \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\varepsilon_\theta^0 + z \kappa_\theta}{1 + z/R} \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma_x^0 + z \tau_x + \frac{\gamma_\theta^0 + z \tau_\theta}{1 + z/R} \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\mu_\theta^0}{1 + z/R} \\ \gamma_{xz} &= \mu_x^0 \end{aligned} \quad (3)$$

که:

اساس تئوری برشی مرتبه اول^۱ بررسی نمودند. ماده تابعی پوسته استوانه‌ای بر حسب تابع توانی در راستای ضخامت پوسته تغییر می‌کند. آنها نشان دادند که با افزایش پارامتر توانی کسر حجمی پوسته استوانه‌ای، فرکانس غیر خطی را کاهش می‌دهد.

در این مقاله به بررسی تاثیر میدان مغناطیسی روی ارتعاشات آزاد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک پاسترناک با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است در این تحقیق، تاثیر میدان مغناطیسی روی فرکانس‌های طبیعی در راستاهای مختلف به صورت مجزا بررسی شد. معادلات حاکمه حرکت با استفاده از اصل همپلتون و روش انرژی بدست آمده، سپس این معادلات با استفاده از روش ناولر حل می‌گردد.

۲- ارتعاشات آزاد پانل استوانه‌ای

۲-۱- هندسه مسئله

استوانه جدار ضخیم بر بستر الاستیک پاسترناک به طول L ، شعاع R و ضخامت h مطابق شکل ۱ در نظر می‌شود. استوانه از جنس مواد مدرج تابعی می‌باشد که مدول کشسانی و چگالی آن به صورت تابع توانی در راستای ضخامت پانل به صورت رابطه (۱) تغییر می‌کند در حالی که ضریب پواسون آن ثابت می‌باشد.

$$g(z) = g_i + (g_o - g_i) \left(\frac{z}{h} + 1/2 \right)^m \quad (1)$$

که g_i مدول کشسانی یا چگالی در قسمت پایین پانل استوانه‌ای ($z = -h/2$) و g_o مدول کشسانی یا چگالی در قسمت بالای پانل استوانه‌ای ($z = h/2$) می‌باشند. m نشان دهنده پارامتر توانی ماده مدرج تابعی است.

سیستم مختصات (x, θ, z) مطابق شکل ۱ در گوشه بالا سمت راست پانل استوانه‌ای قرار دارد. صفحه پایینی پانل بر روی محیط الاستیک پاسترناک (ثابت فنری نوع وینکلر K_w و ثابت برشی نوع پاسترناک K_g) قرار دارد. فرمولاسیون ارتعاشات آزاد پانل استوانه‌ای با استفاده از اصل همپلتون و روش انرژی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در ادامه بررسی می‌شود.

1. First order shear deformation

و کرنش پانل استوانه‌ای می‌باشند. همچنین Q_{ij} ماتریس سفتی کاهش یافته است که به صورت رابطه (۷) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} - (C_{13}^2 / C_{33}) \\ Q_{12} &= C_{12} - (C_{13}C_{23} / C_{33}) \\ Q_{22} &= C_{22} - (C_{23}^2 / C_{33}) \\ Q_{44} &= C_{44} \\ Q_{55} &= C_{55} \\ Q_{66} &= C_{66} \end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن ضرایب سفتی به صورت رابطه (۸) در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} C_{11} &= E(z)(1-\nu) / ((1-2\nu)(1+\nu)) \\ C_{12} &= E(z)\nu / ((1-2\nu)(1+\nu)) \\ C_{13} &= C_{23} = C_{12} \\ C_{44} &= E(z) / (2(1+\nu)) \\ C_{66} &= C_{55} = C_{44} \end{aligned} \quad (۸)$$

۲-۴- کار انجام شده توسط میدان مغناطیسی

ابتدا نیروی لورنس ناشی از میدان مغناطیسی در پانل استوانه ای محاسبه می‌شود سپس برای محاسبه کار انجام شده حاصل این نیرو، این نیرو در جابجایی متناظرش ضرب می‌شود و در نهایت تغییرات این کار محاسبه می‌شود. نیروی لورنس با معادلات زیر بدست می‌آید [۱۷]:

$$f_l = \eta \left(\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{H}) \right] \right) \times \vec{H} \quad (۹)$$

که \vec{u} ، \vec{H} و η به ترتیب میدان جابجایی (U, V, W)، میدان مغناطیسی و نفوذپذیری مغناطیسی می‌باشند. اگر میدان مغناطیس در راستای z پانل استوانه‌ای اعمال شود، (0, H_z) معادله (۹) نیروهای لورنس به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= u_{x,x} \\ \kappa_x &= \beta_{x,x}, \quad \epsilon_\theta^0 = \frac{u_{\theta,\theta}}{R} + \frac{w}{R} \\ \kappa_\theta &= \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R}, \quad \gamma_x^0 = u_{\theta,x} \\ \tau_x &= \beta_{\theta,x}, \quad \gamma_\theta^0 = \frac{u_{x,\sigma}}{R} \\ \tau_\theta &= \frac{\beta_{x,\theta}}{R}, \quad \mu_x^0 = w_{,x} + \beta_x \\ \mu_\theta^0 &= w_{,\theta} + \beta_\theta - \frac{u_\theta}{R} \end{aligned} \quad (۴)$$

که کما نشان دهنده مشتق نسبت به متغیر که بعد از آن آمده است، می‌باشد. ϵ_x^0 و ϵ_θ^0 کرنش های نرمال داخل صفحه γ_x^0 و γ_θ^0 کرنش های برشی داخل صفحه، κ_x و κ_θ تغییر در انحنا، τ_x و τ_θ پیچش صفحات مرجع و μ_x^0 و μ_θ^0 مؤلفه‌های کرنش برشی می‌باشند.

روابط سینماتیکی پانل استوانه‌ای با قرار دادن روابط (۴) در روابط (۳) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{x,x} + z\beta_{x,x} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u_{\theta,\theta}}{R} + \frac{w}{R} + z\frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} \\ \gamma_{x\theta} &= u_{\theta,x} + z\beta_{\theta,x} + \frac{u_{x,\sigma} + z\frac{\beta_{x,\theta}}{R}}{1+z/R} \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{w_{,\theta} + \beta_\theta - \frac{u_\theta}{R}}{1+z/R} \\ \gamma_{xz} &= w_{,x} + \beta_x \end{aligned} \quad (۵)$$

۲-۳- معادلات متشکله

روابط معادلات متشکله پانل استوانه‌ای برای حالت تنش صفحه‌ای به صورت رابطه (۶) می‌باشد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (۶)$$

که در آن $(\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{xz})$ و نشان دهنده مؤلفه‌های تنش

که $(f_{\theta l}^{\beta_\theta}, f_{\theta l}^{u_\theta}, f_{xl}^{\beta_x}, f_{xl}^{u_x})$ نشان دهنده نیروهای لورنتز ناشی از میدان‌های مغناطیسی در راستاهای مختلف می‌باشند که در پیوست الف آمده‌اند.

۲-۵- استخراج معادلات حاکمه تعادل با استفاده

از روش انرژی

اصل همیلتون برای یک جسم جامد به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\int_0^t \int_V (\delta K - \delta U + \delta W_{ext}) = 0 \quad (12)$$

که U ، K و W به ترتیب انرژی جنبشی، انرژی کرنشی، کار انجام شده توسط نیروهای خارجی می‌باشند. معادلات حرکت با استفاده از روش انرژی با فرض اعمال میدان مغناطیسی در راستای Z به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + \frac{N_{\theta x, \theta}}{R} - f_{xl}^{u_x} &= I_0 \ddot{u}_x + I_1 \ddot{\beta}_x \\ N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta\theta}}{R} + \frac{Q_\theta}{R} - f_{\theta l}^{u_\theta} &= I_0 \ddot{u}_\theta + I_1 \ddot{\beta}_\theta \\ M_{x,x} + \frac{M_{\theta x, \theta}}{R} - Q_x - f_{xl}^{\beta_x} &= I_1 \ddot{u}_x + I_2 \ddot{\beta}_x \\ M_{x\theta,x} + \frac{M_{\theta\theta}}{R} - Q_\theta - f_{\theta l}^{\beta_\theta} &= I_1 \ddot{u}_\theta + I_2 \ddot{\beta}_\theta \quad (13) \\ Q_{x,x} - \frac{N_\theta}{R} + Q_{\theta, \theta} - f_{zl}^w + kw - k_g w_{,xx} \\ - \frac{k_g w_{, \theta\theta}}{R^2} &= I_0 \ddot{w}_\theta \end{aligned}$$

در رابطه (۱۳)، نیروهای محوری، برشی و گشتاورهای منتجه و ممان اینرسی‌های جرمی به صورت تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} f_{xl} &= \eta H_z^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{R \partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \\ &= \eta H_z^2 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{R \partial x \partial \theta} + \frac{z}{R} \frac{\partial^2 \beta_\theta}{\partial x \partial \theta} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\theta l} &= \eta H_z^2 \left(\frac{\partial^2 U}{R \partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 V}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\ &= \eta H_z^2 \left(\frac{\partial^2 u_x}{R \partial x \partial \theta} + \frac{z}{R} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{z}{R^2} \frac{\partial^2 \beta_\theta}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned}$$

تغییرات کار انجام شده توسط نیروهای لورنس ناشی از اعمال میدان مغناطیسی در راستای Z برابر است با:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext}^{f_l} &= \int_V (f_{xl} \delta U + f_{\theta l} \delta V) dV \\ &= \int_V \eta H_z^2 \left[\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{R \partial x \partial \theta} + \frac{z}{R} \frac{\partial^2 \beta_\theta}{\partial x \partial \theta} \right) \times \right. \\ &\quad \left. (\delta u_x + z \delta \beta_x) + \left(\frac{\partial^2 u_x}{R \partial x \partial \theta} + \frac{z}{R} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{z}{R^2} \frac{\partial^2 \beta_\theta}{\partial \theta^2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. (\delta u_\theta + z \delta \beta_\theta) \right] dV \quad (الف-11) \\ &= f_{xl}^{u_x} \delta u_x + f_{xl}^{\beta_x} \delta \beta_x + f_{\theta l}^{u_\theta} \delta u_\theta + f_{\theta l}^{\beta_\theta} \delta \beta_\theta \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} f_{xl}^{u_x} &= \left[p_0 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{R \partial x \partial \theta} \right) + p_2 \left(\frac{R \partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_\theta}{\partial x \partial \theta} \right) \right] \\ f_{xl}^{\beta_x} &= \left[p_1 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{R \partial x \partial \theta} \right) + p_3 \left(\frac{R \partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_\theta}{\partial x \partial \theta} \right) \right] \\ f_{\theta l}^{u_\theta} &= \left[p_0 \left(\frac{\partial^2 u_x}{R \partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{R^2 \partial \theta^2} \right) + p_2 \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \beta_\theta}{R \partial \theta^2} \right) \right] \\ f_{\theta l}^{\beta_\theta} &= \left[p_1 \left(\frac{\partial^2 u_x}{R \partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{R^2 \partial \theta^2} \right) + p_3 \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \beta_\theta}{R \partial \theta^2} \right) \right] \quad (ب-11) \end{aligned}$$

$$a_{11}u_{x,xx} + a_{12}\beta_{x,xx} + b_{11}u_{\theta,\theta x} + b_{11}w_{,x} + b_{12}\beta_{\theta,xx} + \frac{k_{13}u_{x,\theta\theta}}{R} + \frac{k_{14}\beta_{x,\theta\theta}}{R} + \frac{k_{12}\beta_{\theta,x\theta}}{R} + \frac{k_{11}u_{\theta,x\theta}}{R} +$$

$$p_0u_{x,xx} + p_0 \frac{u_{\theta,x\theta}}{R} + p_2(R\beta_{x,xx} + \beta_{\theta,x\theta}) = I_0\ddot{u}_x + I_1\ddot{\beta}_x$$

$$c_{11}u_{\theta,xx} + c_{12}\beta_{\theta,xx} + c_{21}u_{x,\theta x} + c_{22}\beta_{x,\theta x} + \frac{b_{21}u_{x,x\theta}}{R} + \frac{b_{22}\beta_{x,x\theta}}{R} + \frac{h_{11}u_{\theta,\theta\theta}}{R} + \frac{h_{11}w_{,\theta}}{R} + \frac{h_{12}\beta_{\theta,\theta\theta}}{R} + \frac{m_1w_{,\theta}}{R} + \frac{m_1\beta_{\theta}}{R} + \frac{m_2u_{\theta}}{R} +$$

$$p_0 \frac{u_{x,x\theta}}{R} + p_0 \frac{u_{\theta,\theta\theta}}{R^2} + p_2\left(\beta_{x,x\theta} + \frac{\beta_{\theta,\theta\theta}}{R}\right) = I_0\ddot{u}_{\theta} + I_1\ddot{\beta}_{\theta}$$

$$a_{12}u_{x,xx} + a_{13}\beta_{x,xx} + b_{12}u_{\theta,\theta x} + b_{12}w_{,x} + b_{13}\beta_{\theta,xx} + \frac{k_{14}u_{x,\theta\theta}}{R} + \frac{k_{22}\beta_{x,\theta\theta}}{R} + \frac{k_{21}\beta_{\theta,x\theta}}{R} + \frac{k_{12}u_{\theta,x\theta}}{R} -$$

$$d_1w_{,x} - d_1\beta_x - p_1\left(u_{x,xx} + \frac{u_{\theta,x\theta}}{R}\right) - p_3(R\beta_{x,xx} + \beta_{\theta,x\theta}) = I_1\ddot{u}_x + I_2\ddot{\beta}_x$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_{x\theta} \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} Q_{11}\epsilon_x + Q_{12}\epsilon_{\theta} \\ Q_{66}\gamma_{x\theta} \\ z(Q_{11}\epsilon_x + Q_{12}\epsilon_{\theta}) \\ zQ_{66}\gamma_{x\theta} \\ Q_{55}\gamma_{xz} \end{Bmatrix} (1+z/R) dz$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\theta} \\ N_{\theta x} \\ M_{\theta} \\ M_{\theta x} \\ Q_{\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} Q_{12}\epsilon_x + Q_{22}\epsilon_{\theta} \\ Q_{66}\gamma_{x\theta} \\ z(Q_{12}\epsilon_x + Q_{22}\epsilon_{\theta}) \\ zQ_{66}\gamma_{x\theta} \\ Q_{44}\gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} dz$$

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_0(1, z, z^2) dz$$

با قرار دادن روابط (۵) در روابط (۱۴)، نیروها، گشتاورها و نیروهای برشی منته به بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} N_x &= a_{11}u_{x,x} + a_{12}\beta_{x,x} + b_{11}u_{\theta,\theta} + b_{11}w + b_{12}\beta_{\theta,x} \\ N_{x\theta} &= c_{11}u_{\theta,x} + c_{12}\beta_{\theta,x} + c_{21}u_{x,\theta} + c_{22}\beta_{x,\theta} \\ M_x &= a_{12}u_{x,x} + a_{13}\beta_{x,x} + b_{12}u_{\theta,\theta} + b_{12}w + b_{13}\beta_{\theta,x} \\ M_{x\theta} &= c_{12}u_{\theta,x} + c_{13}\beta_{\theta,x} + c_{22}u_{x,\theta} + c_{23}\beta_{x,\theta} \\ Q_x &= d_1w_{,x} + d_1\beta_x \\ N_{\theta} &= b_{21}u_{x,x} + b_{22}\beta_{x,x} + h_{11}u_{\theta,\theta} + h_{11}w + h_{12}\beta_{\theta,\theta} \\ N_{\theta x} &= k_{13}u_{x,\theta} + k_{14}\beta_{x,\theta} + k_{12}\beta_{\theta,x} + k_{11}u_{\theta,x} \\ M_{\theta} &= b_{22}u_{x,x} + b_{23}\beta_{x,x} + h_{12}u_{\theta,\theta} + h_{12}w + h_{13}\beta_{\theta,\theta} \\ M_{\theta x} &= k_{14}u_{x,\theta} + k_{22}\beta_{x,\theta} + k_{21}\beta_{\theta,x} + k_{12}u_{\theta,x} \\ Q_{\theta} &= m_1w_{,\theta} + m_1\beta_{\theta} + m_2u_{\theta} \end{aligned}$$

با قرار دادن روابط (۱۰) و (۱۵) در روابط (۱۳)، معادلات حاکمه حرکت پانل استوانه‌ای بر بستر الاستیک پاسترناک تحت اثر میدان مغناطیسی در راستای z با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} u_x(x, \theta, t) \\ u_\theta(x, \theta, t) \\ \beta_x(x, \theta, t) \\ \beta_\theta(x, \theta, t) \\ w(x, \theta, t) \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} u_{xmn} e^{i\alpha t} \cos(\lambda_s x) \sin(\lambda_n \theta) \\ u_{\theta mn} e^{i\alpha t} \sin(\lambda_s x) \cos(\lambda_n \theta) \\ \beta_{xmn} e^{i\alpha t} \cos(\lambda_s x) \sin(\lambda_n \theta) \\ \beta_{\theta mn} e^{i\alpha t} \sin(\lambda_s x) \cos(\lambda_n \theta) \\ w_{mn} e^{i\alpha t} \sin(\lambda_s x) \sin(\lambda_n \theta) \end{cases} \quad (18)$$

که $\lambda_n = n\pi/\alpha$ و $\lambda_s = s\pi/L$ می‌باشند. s و n به ترتیب اعداد موج در راستاهای x و θ هستند. α نیز زاویه قطاع پانل استوانه‌ای است. با قرار دادن روابط (۱۸) در روابط (۱۶)، استفاده از روابط (۱۷) و با ساده‌سازی روابط، فرم کلی معادلات به صورت زیر به دست می‌آید:

$$KU = \omega^2 MU \quad (19)$$

که در آن K ماتریس سختی، M ماتریس جرم و U بردار جایجایی می‌باشند.

برای داشتن جواب، دترمینان ضرایب در رابطه (۱۹) باید برابر صفر باشد. سپس فرکانس‌های طبیعی پانل استوانه‌ای بر بستر الاستیک پاسترناک با استفاده از تئوری برشی مرتبه یک به دست می‌آیند.

۴- بحث و نتیجه‌گیری

مشخصات مکانیکی ماده مدرج تابعی پانل استوانه‌ای با سطح داخلی آلومینیوم و سطح خارجی آلومینا در جدول ۱ مشاهده می‌شود.

جدول ۱- مشخصات مکانیکی مواد مدرج تابعی

| مقادیر | خواص |
|------------------------|-------------------------------|
| ۲۷۰۷ kg/m ³ | چگالی سطح داخلی |
| ۳۰۰۰ kg/m ³ | چگالی سطح خارجی |
| ۷۰ GPa | مدول یانگ سطح داخلی |
| ۳۸۰ GPa | مدول یانگ سطح خارجی |
| ۰/۳ | ضریب پواسن |
| ۱/۶۲۵۶۶۶۵۰ e-۶ H/m | نفوذ پذیری مغناطیسی سطح داخلی |
| ۱/۶۵۸۸۰ e-۶ H/m | نفوذ پذیری مغناطیسی سطح خارجی |

$$\begin{aligned} & c_{12} u_{\theta,xx} + c_{13} \beta_{\theta,xx} + c_{22} u_{x,\theta x} + \\ & c_{23} \beta_{x,\theta x} + \frac{b_{22} u_{x,x\theta}}{R} + \\ & \frac{b_{23} \beta_{x,x\theta}}{R} + \frac{h_{12} u_{\theta,\theta\theta}}{R} + \frac{h_{12} w_{,\theta}}{R} \\ & + \frac{h_{13} \beta_{\theta,\theta\theta}}{R} - m_1 w_{,\theta} - m_1 \beta_\theta \end{aligned} \quad (5-16)$$

$$\begin{aligned} & -m_2 u_\theta - p_1 \frac{u_{x,x\theta}}{R} - p_1 \frac{u_{\theta,\theta\theta}}{R^2} - \\ & p_3 \left(\beta_{x,x\theta} + \frac{\beta_{\theta,\theta\theta}}{R} \right) = I_1 \ddot{u}_\theta + I_2 \ddot{\beta}_\theta \\ & d_1 w_{,xxx} + d_1 \beta_{x,x} - \frac{b_{21} u_{x,x}}{R} + \\ & \frac{b_{22} \beta_{x,x} + h_{11} u_{\theta,\theta} + h_{11} w + h_{12} \beta_{\theta,\theta}}{R} \end{aligned} \quad (5-16)$$

$$\begin{aligned} & m_1 w_{,\theta\theta} + m_1 \beta_{\theta,\theta} + m_2 u_{\theta,\theta} + \\ & k w - k_g w_{,xx} - \frac{k_g w_{,\theta\theta}}{R^2} = I_0 \ddot{w}_\theta \end{aligned}$$

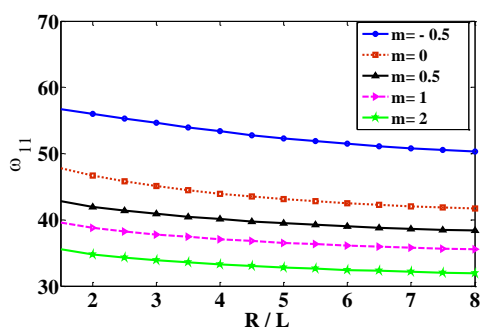
که در روابط بالا ضرایب $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, h_{ij}, k_{ij}, d_i, m_i, p_i, r_i$ در پیوست الف آمده است.

۳- حل تحلیلی ارتعاشات آزاد پانل استوانه‌ای

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده برای پانل استوانه‌ای به صورت زیر است:

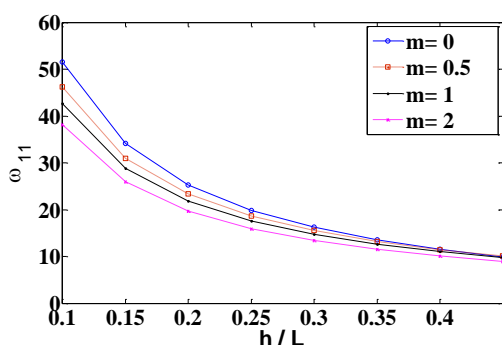
$$\begin{aligned} & x=0: \\ & u_x = 0, \beta_\theta(0, \theta, t) = 0, w(0, \theta, t) = 0, \\ & N_x(0, \theta, t) = 0, N_{x\theta}(0, \theta, t) = 0, M_x(0, \theta, t) = 0, \\ & x=L: \\ & u_x(L, \theta, t) = 0, \beta_\theta(L, \theta, t) = 0, w(L, \theta, t) = 0, \\ & N_x(L, \theta, t) = 0, N_{x\theta}(L, \theta, t) = 0, M_x(L, \theta, t) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

که برای ارضای شرایط مرزی ۱۷ (شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده) و معادله حاکم بر تعادل (۱۶) از روش ناویر استفاده شده است. با حل این معادلات فرکانس طبیعی برای پانل استوانه‌ای به دست می‌آید [۱۶].



شکل ۲- فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک بر حسب نسبت‌های مختلف R/L ، ($L = 1m$ ، $h/L = 0.1$ ، $\alpha = 2\pi/3$)

شکل ۳ فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک برای نسبت‌های مختلف h/L و برای توان‌های مختلف m که نشان دهنده تغییرات مواد مدرج تابعی می‌باشد را نشان می‌دهد. همان طور که در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش نسبت h/L برای یک ماده، فرکانس طبیعی اول بدون بعد کاهش می‌یابد که علت آن افزایش جرم ماده می‌باشد. همچنین برای یک نسبت ضخامت به طول پانل (h/L) ثابت با سفت‌تر شدن مواد مدرج تابعی (افزایش m) فرکانس طبیعی اول بدون بعد کاهش می‌یابد، زیرا ماده صلب‌تر می‌شود.



شکل ۳- فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک بر حسب نسبت‌های مختلف h/L ،

برای اعتبار سنجی نتایج حاصل از این تحقیق، فرکانس‌های طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک با مراجع [۱۰] و [۱۳] در جدول ۲ مقایسه شده است. نتایج حاصل از این مقاله تطابق خوبی با نتایج بدست آمده در مراجع ذکر شده دارد. فرکانس طبیعی اول بدون بعد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\omega}_{11} = L\omega_{11}\sqrt{\rho_i h / D_i} \quad (20)$$

تفاوت مشاهده شده در نتایج بین کار حاضر و دیگران ناشی از در نظر گرفتن ترم z/R در معادلات است. اگر این ترم در معادلات لحاظ شود، مولفه‌های $N_{x\theta} \neq N_{\theta x}$ و $M_{x\theta} \neq M_{\theta x}$ می‌باشند.

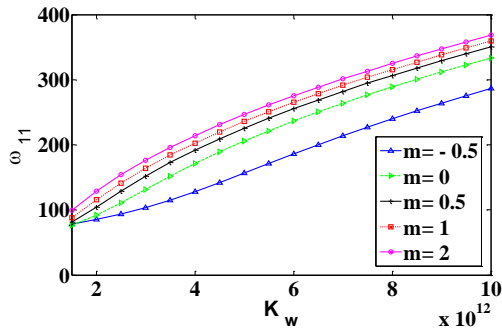
جدول ۲- فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک

$$(\alpha = 2\pi/3 \text{ و } L=1m, h/L=0.1)$$

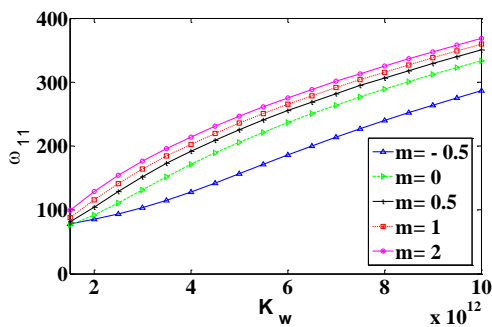
| R/L | m | $\bar{\omega}_{11}$ (حاضر) | $\bar{\omega}_{11}$ (مر) | $\bar{\omega}_{11}$ (مراجع [۱۰]) |
|------------------------|-----|----------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| ۱ | ۰ | ۵۱/۵۹ | ۵۱/۵۲ | ۵۲/۰۵ |
| (۵۲/۰۸) برای $(z/R=0)$ | | | | |
| ۱۰ | ۰ | ۴۲/۰۸ | ۴۱/۹۱ | ۴۲/۳۳ |
| ۱۰ | ۱/۵ | ۳۷/۹۴ | ۳۶/۹۹ | ۳۴/۷۶ |
| ۱ | ۱/۵ | ۴۶/۱۸ | ۴۳/۳۰ | ۴۳/۷۳ |
| ۱ | ۱ | ۴۲/۶۵ | ۳۸/۷۷ | ۳۹/۱۴ |

در شکل ۲ تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای بدون بستر الاستیک پاسترناک برای نسبت‌های مختلف R/L و توان‌های مختلف پارامتر مواد مدرج تابعی (m) نشان داده شده است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود با ثابت بودن ضخامت پانل و افزایش نسبت R/L فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای کاهش می‌یابد. همچنین با سفت شدن ماده (افزایش m) فرکانس طبیعی اول بدون بعد کاهش پیدا می‌کند. زیرا ماده صلب‌تر و سفت‌تر می‌شود.

است که ضرایب سفتی ماده در برابر آن کوچک شده و تغییرات ضرایب سفتی که به موجب تغییر m ایجاد می‌شود در برابر مقدار KW ناچیز می‌باشد.



شکل ۵- فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک بر حسب مقادیر مختلف ثابت فنری نوع وینکلر $(K_w (N / m^3))$ ، $R / L = 1$ ، $\alpha = 2\pi / 3$ ، $(L = 1m, h / L = 0.1)$

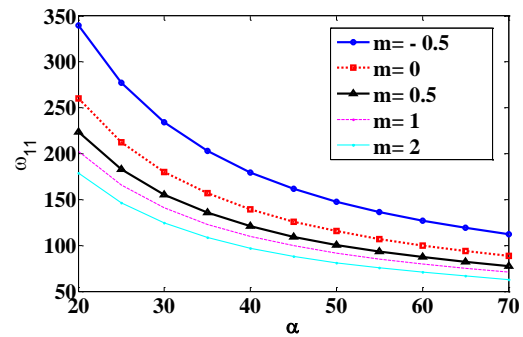


شکل ۶- فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک بر حسب مقادیر کوچکتر ثابت فنری نوع وینکلر $(K_w (N / m^3))$ ، $\alpha = 2\pi / 3$ ، $(L = 1m, h / L = 0.1, R / L = 1)$

در شکل ۷ فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک برای مقادیر مختلف ثابت برش نوع پاسترناک K_g و برای توان‌های مختلف m نشان داده شده است. در این شکل با افزایش مقدار ثابت برشی نوع پاسترناک برای یک

$$(L = 1m, R / L = 1, \alpha = 2\pi / 3)$$

در شکل ۴ فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی برای مقادیر مختلف زاویه قطاع پانل استوانه‌ای و برای توان‌های مختلف m را نشان می‌دهد. در این شکل با افزایش مقدار α ، فرکانس طبیعی اول بدون بعد کاهش می‌یابد، زیرا با افزایش مقدار α ، جرم ماده افزایش می‌یابد. همچنین برای یک مقدار مشخص α با سفت‌تر شدن مواد مدرج تابعی (افزایش m) انعطاف پذیری ماده کاهش می‌یابد و ماده صلب‌تر می‌شود.

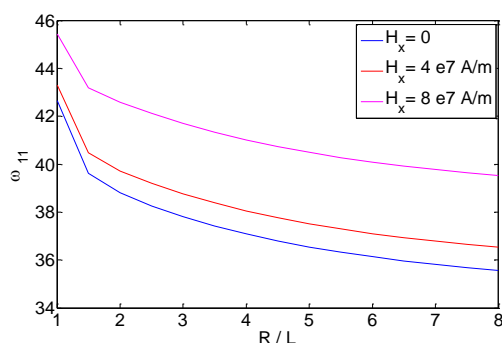


شکل ۴- فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک بر حسب مقادیر مختلف زاویه قطاع پانل استوانه‌ای (α) ، $(h / L = 0.1, R / L = 1)$ ، $(L = 1m)$

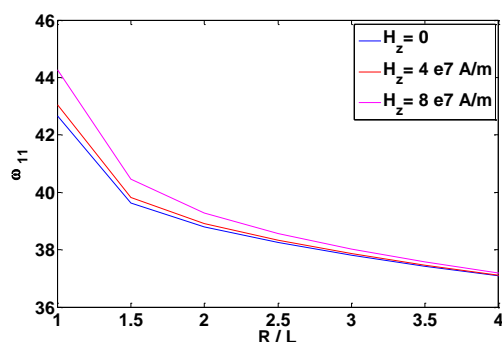
در شکل‌های ۵ و ۶ فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک برای مقادیر مختلف ثابت فنری نوع وینکلر K_w و برای توان‌های مختلف m نشان داده شده است. در این شکل‌ها با افزایش مقدار ثابت فنری وینکلر برای یک پارامتر توانی ماده مدرج تابعی، فرکانس طبیعی اول بدون بعد افزایش می‌یابد، زیرا با افزایش مقدار ثابت فنری نوع وینکلر به سفتی ماده افزوده می‌شود و در نتیجه فرکانس طبیعی اول بدون بعد افزایش می‌یابد. همچنین در شکل ۶ برای مقادیر کوچکتر ثابت فنری وینکلر با افزایش پارامتر توانی ماده مدرج تابعی فرکانس اول بدون بعد کاهش می‌یابد زیرا مقدار عددی پارامتر ثابت وینکلر (KW) آن قدر بزرگ

$$(K_g = 1e10N / m, K_w = 1e12N / m^3)$$

در شکل‌های ۹ و ۱۰ به ترتیب تاثیر میدان مغناطیسی H_x و H_z روی فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای برای نسبت‌های مختلف R/L بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که اعمال میدان مغناطیسی اثر افزایشی بر روی فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای دارد زیرا با اعمال میدان‌های مغناطیسی به صورت جداگانه، نیروهای کششی و عرضی ایجاد می‌شوند که باعث پایداری بیشتر پانل استوانه‌ای می‌گردند.

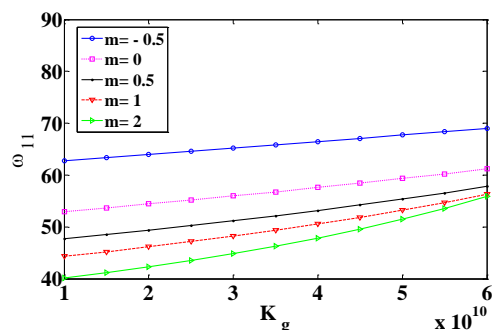


شکل ۹- اثر میدان مغناطیسی H_x بر فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر حسب مقادیر مختلف R/L ($\alpha = 2\pi/3$) ، $(L = 1m, h/L = 0.1)$



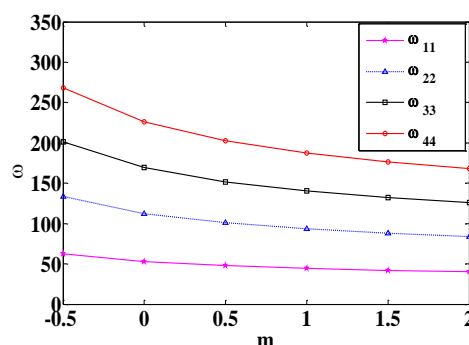
شکل ۱۰- اثر میدان مغناطیسی H_z بر فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک بر حسب مقادیر مختلف R/L

ماده، فرکانس طبیعی اول بدون بعد افزایش می‌یابد، زیرا افزایش مقدار ثابت برشی نوع پاسترناک پایداری ماده را افزایش می‌دهد و در نتیجه فرکانس طبیعی اول بدون بعد افزایش می‌یابد. همچنین برای یک مقدار مشخص ثابت برشی نوع پاسترناک، با سفت‌تر شدن ماده، فرکانس طبیعی اول بدون بعد کاهش می‌یابد.



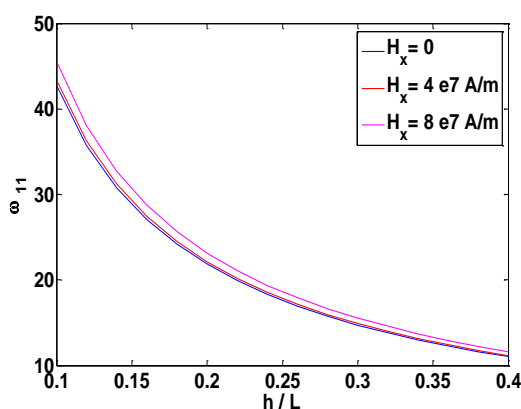
شکل ۷- فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک وینکلر بر حسب مقادیر مختلف ثابت برشی نوع پاسترناک $(K_g (N/m))$ ، $(R/L = 1, \alpha = 2\pi/3)$ ، $(L = 1m, h/L = 0.1)$

چهار فرکانس طبیعی اول بدون بعد را برای پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی با بستر الاستیک پاسترناک برای توان‌های مختلف m را در شکل ۸ مشاهده می‌نمائید. می‌توان دریافت که با افزایش مقدار m (سفت‌تر شدن ماده) فرکانس‌های طبیعی بدون بعد کاهش می‌یابند.



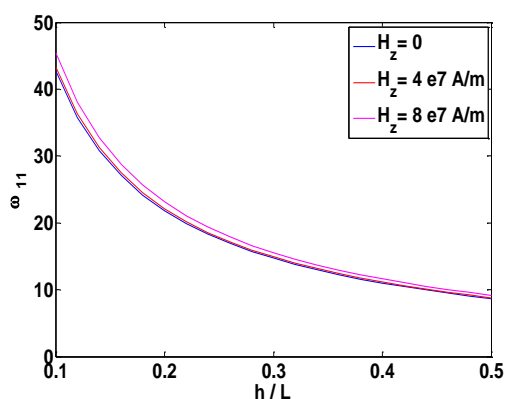
شکل ۸- فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک پاسترناک بر حسب مقادیر مختلف R/L ، $(L = 1m, h/L = 0.1, R/L = 1, \alpha = 2\pi/3)$

شکل‌های ۱۳ و ۱۴ تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون بعد به ترتیب برای میدان‌های مغناطیسی در راستاهای x و z را برحسب نسبت ضخامت به طول پانل استوانه‌ای نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌گردد با افزایش نسبت ضخامت به طول پانل استوانه‌ای اثر میدان مغناطیسی بر فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای کاهش می‌یابد. این بدان دلیل می‌باشد که با زیاد شدن ضخامت پانل استوانه‌ای، انعطاف‌پذیری آن کمتر شده، در نتیجه فرکانس طبیعی اول بدون بعد نیز آن کاهش می‌یابد.



شکل ۱۳- اثر میدان مغناطیسی H_x بر فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک بر حسب مقادیر مختلف نسبت ضخامت به طول $(\alpha = 2\pi/3 R/L = 1)$ ، h/L

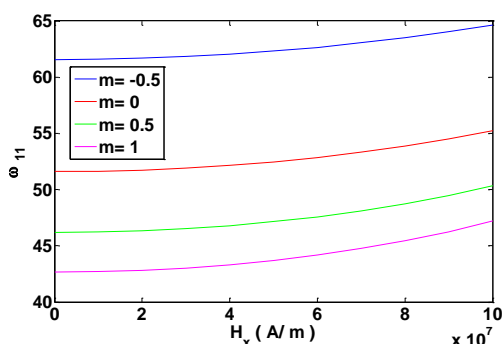
$$(L = 1m)$$



شکل ۱۴- اثر میدان مغناطیسی H_z بر فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک بر حسب مقادیر مختلف

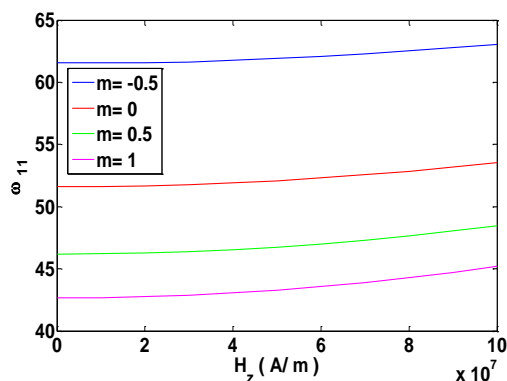
$$(L = 1m, h/L = 0.1, \alpha = 2\pi/3)$$

تأثیر پارامتر ناهمگنی ماده مدرج تابعی (m) و میدان مغناطیسی روی فرکانس طبیعی اول بدون بعد در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکلها مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر ناهمگنی ماده فرکانس طبیعی اول بدون بعد تحت تأثیر میدان‌های مغناطیسی کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، تأثیر میدان مغناطیسی روی مواد صلب کمتر از مواد انعطاف‌پذیر است.



شکل ۱۱- اثر تغییر ناهمگنی مواد (m) بر فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک بر حسب مقادیر مختلف میدان مغناطیسی H_x ($\alpha = 2\pi/3 R/L = 1$)، $h/L = 0.1$

$$(L = 1m, h/L = 0.1)$$



شکل ۱۲- اثر تغییر ناهمگنی مواد (m) بر فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک بر حسب مقادیر مختلف میدان مغناطیسی H_z ($\alpha = 2\pi/3 R/L = 1$)، $h/L = 0.1$

$$(L = 1m)$$

در این مقاله ارتعاشات آزاد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی با تغییرات توانی خواص این مواد برای حالت‌های مختلف با استفاده از اصل همیلتون و بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با صرف نظر کردن از عبارات غیر خطی کرنش‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت فرکانس‌های طبیعی با استفاده از روش ناویر با استفاده از سری فوریه به دست آمدند. اثرات مختلف مثل پارامتر ناهمگنی مواد، بستر الاستیک پاسترناک، نسبت شعاع به طول، نسبت ضخامت به طول پانل استوانه، همچنین زاویه قطاع‌های مختلف از پانل استوانه‌ای و میدان‌های مغناطیسی بر روی فرکانس طبیعی بررسی شد و نتایج حاصل از این تحقیق به صورت زیر لیست می‌شوند:

برای پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک همراه با سفت‌تر شدن ماده (افزایش پارامتر مواد m) فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. مشاهده شد که با افزایش نسبت‌های R/L ، h/L و زاویه قطاع پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک پاسترناک فرکانس طبیعی بدون بعد کاهش می‌یابد.

افزایش پایداری پانل استوانه‌ای که موجب افزایش فرکانس طبیعی پانل استوانه‌ای می‌گردد. با در نظر گرفتن بستر الاستیک پاسترناک تمامی فرکانس‌های طبیعی هم برای پانل‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد همگن و هم ساخته شده از مواد مدرج تابعی افزایش می‌یابند.

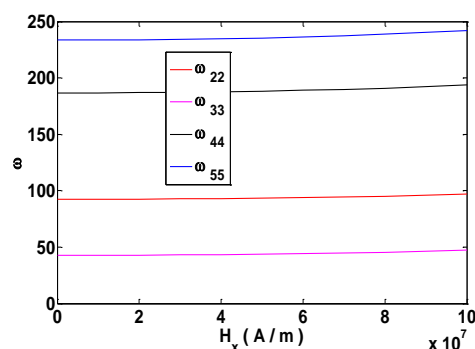
تأثیر ثابت فنری نوع وینکلر بر فرکانس‌های طبیعی بدون بعد بیشتر از تأثیر ثابت برشی نوع پاسترناک می‌باشد. تأثیر محیط الاستیک پاسترناک روی فرکانس‌های طبیعی بالاتر کمتر است.

اعمال میدان‌های مغناطیسی در راستاهای مختلف به طور جداگانه باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی می‌گردند.

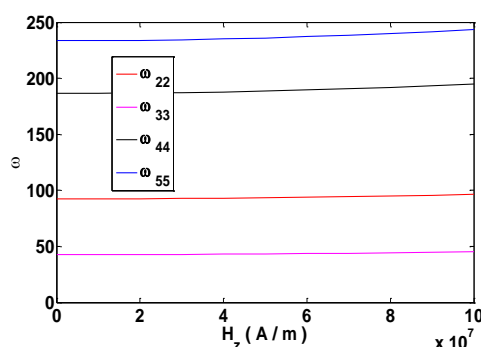
تأثیر میدان مغناطیسی H_x فرکانس طبیعی اول بدون بعد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بیشتر از تأثیر H_z بر فرکانس طبیعی بدون بعد می‌باشد. تأثیر میدان‌های مغناطیسی روی فرکانس‌های طبیعی بالاتر بیشتر از فرکانس‌های طبیعی پایین‌تر می‌باشد.

نسبت ضخامت به طول h/L ، $\alpha = 2\pi/3$ ($R/L = 1$)، $L = 1m$

تغییرات چهار فرکانس طبیعی بدون بعد بر حسب میدان‌های مغناطیسی در راستاهای x و z به ترتیب در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نشان داده شده‌اند. همان‌طور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود فرکانس‌های طبیعی بالاتر بیشتر تحت تأثیر میدان‌های مغناطیسی قرار گرفته‌اند.



شکل ۱۵- فرکانس‌های طبیعی بدون بعد بعد از فرکانس طبیعی اول پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک بر حسب مقادیر مختلف میدان مغناطیسی H_x ، $h/L = 0.1$ ، $R/L = 1$ ، $L = 1m$ ، $\alpha = 2\pi/3$



شکل ۱۶- فرکانس‌های طبیعی بدون بعد بعد از فرکانس طبیعی اول پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون بستر الاستیک پاسترناک بر حسب مقادیر مختلف میدان مغناطیسی H_z ، $h/L = 0.1$ ، $R/L = 1$ ، $L = 1m$ ، $\alpha = 2\pi/3$

تشکر و قدردانی:

نویسندگان از نظرات داوران محترم، تشکر و قدردانی می‌نمایند. همچنین آنها از معاونت پژوهشی دانشگاه کاشان طی قراردادی به شماره ۳۶۳۴۵۲/۱۳ به خاطر حمایت مالی تشکر و قدردانی می‌شود.

$$a_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz$$

$$a_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z Q_{11} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz$$

$$a_{13} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 Q_{11} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz$$

۱-ب

۱-۶- پیوست الف

نیروهای لورنتز برای میدان مغناطیسی در راستای x و تغییرات کار انجام شده توسط این نیروهای:

$$f_{y1} = \eta H_x^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 W}{R \partial z \partial \theta} \right)$$

$$= \eta H_x^2 \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \beta_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{z}{R^2} \frac{\partial^2 \beta_\theta}{\partial \theta^2} \right) \quad (1-الف)$$

$$b_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Q_{12}}{R} dz$$

$$b_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z Q_{12}}{R} dz$$

$$b_{13} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2 Q_{12}}{R} dz$$

$$b_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} dz$$

$$b_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z Q_{12} dz$$

$$b_{23} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 Q_{12} dz$$

۲-ب

$$f_{z1} = \eta H_x^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{R \partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)$$

$$= \eta H_x^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_\theta}{R \partial \theta} \right)$$

$$\delta W_{ext}^{f_i} = \int_V (f_{\theta 1} \delta V + f_{z1} \delta W) dV$$

$$= f_{y1}^{u_\theta} \delta u_\theta + f_{\theta 1}^{\beta_\theta} \delta \beta_\theta + f_{z1}^w \delta w \quad (2-الف)$$

که:

$$c_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz$$

$$c_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z Q_{66} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz$$

$$c_{13} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 Q_{66} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz$$

$$c_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Q_{66}}{R} dz$$

$$c_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z Q_{66}}{R} dz$$

$$c_{23} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2 Q_{66}}{R} dz$$

۳-ب

$$f_{\theta 1}^{u_\theta} = \left[r_0 \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{R^2 \partial \theta^2} \right) + r_2 \left(R \frac{\partial^2 \beta_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_\theta}{R \partial \theta^2} \right) \right]$$

$$f_{\theta 1}^{\beta_\theta} = \left[r_1 \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{R^2 \partial \theta^2} \right) + r_3 \left(R \frac{\partial^2 \beta_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_\theta}{R \partial \theta^2} \right) \right] \quad (3-الف)$$

$$f_{z1}^w = \left[r_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta_\theta}{R \partial \theta} \right) \right]$$

۲-۶- پیوست ب

$$p_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta H_z^2 dz$$

$$p_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \eta H_z^2 dz$$

$$p_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta H_z^2 \frac{z}{R} dz$$

$$p_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta H_z^2 \frac{z^2}{R} dz$$

۷-ب

$$r_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta H_x^2 dz$$

$$r_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \eta H_x^2 dz$$

$$r_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta H_x^2 \frac{z}{R} dz$$

$$r_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta H_x^2 \frac{z^2}{R} dz$$

۷- منابع

- [1] McGee OG III, Kim JW (2010) Three-dimensional vibrations of cylindrical elastic solids with V-notches and sharp radial cracks. J Sound Vib., Vol. 329, pp.457-484.
- [2] Shakeri M, Akhlaghi M, Hoseini SM (2006) Vibration and radial wave propagation velocity in functionally graded thick hollow cylinder. Com Struc, Vol. 76, pp. 174-181.
- [3] Buchanan GR (2003) Free vibration of an infinite magneto-electro-elastic cylinder. J Sound Vib, Vol.268, pp. 413-426.
- [4] Malla Reddy P, Tajuddin M (2000) Exact analysis of the plane-strain vibrations of thick-walled hollow poroelastic cylinders. Int J Solid Struc, Vol. 37, pp. 3439-3456.
- [5] Wang Y, Xu R, Ding H, Chen J (2010) Three-dimensional exact solutions for free vibrations of simply supported magneto-electro-elastic cylindrical panels. Int J Eng Sci, Vol. 48, pp. 1778-1796.
- [6] Ghorbanpour Arani A, Jafari Fesharaki J, Mohammadimehr M, Golabi S (2010) Electro-magneto-thermo-mechanical Behaviors of a Radially Polarized FGPM Thick Hollow Sphere. Jour of Sol Mech, Vol. 2, No. 4, pp. 305-315.

$$d_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad \text{۴-ب}$$

$$k_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} dz$$

$$k_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z Q_{66} dz$$

$$k_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 Q_{66} dz$$

$$k_{13} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Q_{66}}{R \left(1 + \frac{z}{R}\right)} dz \quad \text{۵-ب}$$

$$k_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z Q_{66}}{R \left(1 + \frac{z}{R}\right)} dz$$

$$k_{23} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2 Q_{66}}{R \left(1 + \frac{z}{R}\right)} dz$$

$$h_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Q_{22}}{R \left(1 + \frac{z}{R}\right)} dz$$

$$h_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z Q_{22}}{R \left(1 + \frac{z}{R}\right)} dz \quad \text{۶-ب}$$

$$h_{13} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2 Q_{22}}{R \left(1 + \frac{z}{R}\right)} dz$$

- [12] Chen Y, Jin G, Liu Zh (2013) Free vibration analysis of circular cylindrical shell with non-uniform elastic boundary constraints, *Int J Mech Sci*, Vol. 47, pp. 120–132.
- [13] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, Soares CMM (2013) Free vibration analysis of functionally graded shells by a higher-order shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations, *Erope Jour mech A/Sol Com Struc*, Vol. 37, pp. 24–34.
- [14] Malekzadeh P, BahraniFard F, Ziaee S (2013) Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded cylindrical panels with cut-out using Chebyshev–Ritz method, *J Com Struc*, Vol. 105, pp. 1–13.
- [15] Sheng GG, Wang X (2013) An analytical study of the non-linear vibrations of functionally graded cylindrical shells subjected to thermal and axial loads. *Jour Com Struc, J Com Struc*, Vol. 97, pp. 261–268.
- [16] Vinson JR (2005) *Plate and Panel Structures of Isotropic, Composite and Piezoelectric Materials, Including Sandwich Construction*. USA, Springer.
- [17] Kraus J (1984) *Electromagnetics*. USA: McGrawHill Inc.
- [7] Heyliger PR, Jilani A (1992) The free vibrations of inhomogeneous elastic cylinders and spheres. *Inter J Solid Struc*, Vol. 29, pp. 2689–2708.
- [۸] خرمی کمیل، حسینی هاشمی شاهرخ ارتعاشات آزاد پانل استوانه‌ای نسبتاً ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی. *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، دوره ۱۱، شماره ۲، ۱۳۹۰، ص ص ۹۳–۱۰۶.
- [9] Zhao X, Lee YY, Liew KM (2009) Thermoelastic and vibration analysis of functionally graded cylindrical shells. *Int J Mech Sci*, Vol. 51, , pp. 694–707.
- [10] Farid M, Zahedinejad P, Malekzadeh P (2010) Three-dimensional temperature dependent free vibration analysis of functionally graded material curved panels resting on two-parameter elastic foundation using a hybrid semi-analytic diff quadrature method. *Mater. Design*, Vol. 31, pp. 2–13.
- [11] Bodaghi M, ShakeriM (2012) An analytical approach for free vibration and transient response of functionallygraded piezoelectric cylindrical panels subjected to impulsive loads. *J Com Struc*, Vol. 94, pp. 1721–1735.