



حل مسائل غیرخطی الاستیک تراکم‌ناپذیر با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریکی

بهرروز حسنی^۱، سید مهدی توکلی^۲ و مهدی اردیانی^{۳*}

^۱ استاد، دانشکده مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲ استادیار، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

^۳ دانش آموخته کارشناسی ارشد، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۰/۲۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۱۲/۲۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۲/۳۰

چکیده

در این تحقیق، به فرمول‌بندی و حل مسائل الاستیک غیرخطی تراکم‌ناپذیر که به مسائل هایپرالاستیسیته تراکم‌ناپذیر نیز معروفند، با روش تحلیل ایزوژئومتریکی پرداخته شده است. بدین منظور، پس از تعریف اجزائی این دسته از مسائل هایپرالاستیسیته با در نظر گرفتن روابط حاکم بر مسئله که دارای ماهیت غیرخطی است، به خطی‌سازی معادلات جهت استفاده از الگوریتم عددی حل بر مبنای تکرار نیوتن-رافسون پرداخته می‌شود؛ سپس معادلات تعادل در حالت گسسته نوشته شده، ماتریس ضرایب در رهیافت روش ایزوژئومتریکی استخراج می‌شود. در ادامه، با بهره‌گیری از مفاهیم عنوان شده، الگوریتمی برای مسائل غیرخطی الاستیک تراکم‌ناپذیر پیشنهاد گشته است. با توجه به تغییر شکل‌های بزرگ در مسائل غیرخطی الاستیک، در بکارگیری روش اجزای محدود، علاوه بر وابستگی جواب مسئله به اندازه شبکه المان‌ها که سبب ایجاد دستگاه معادلات با حجم محاسباتی بالا می‌شود، در برخی از مسائل، مش بندی مجدد نیز اجتناب‌ناپذیر است. در روش ایزوژئومتریکی با توجه به استفاده از توابع پایه اسپلاین که قابلیت انعطاف پذیری بالائی در ایجاد هندسه مدل دارد، نیاز به فرآیند تولید مش مجدد تا حد زیادی رفع می‌شود. نتایج این تحقیق، حاکی از مزیت روش ایزوژئومتریکی نسبت به اجزای محدود به دلیل ایجاد دستگاه معادلات کوچکتر و کاهش حجم محاسبات شده است.

کلمات کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریکی؛ تابع پایه نرَبز؛ مصالح هایپرالاستیسیته تراکم‌ناپذیر؛ الگوریتم عددی نیوتن-رافسون.

Solution of Nonlinear Incompressible Hyperelastic Problems by Isogeometric Analysis Method

B. Hassani^{1,*}, S. M. Tavakkoli² and M. Ardiani³

¹ Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran.

² Assoc., Civil Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

³ Msc., Civil Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

Abstract

This article is devoted to the derivation of formulation and isogeometric solution of nonlinear incompressible elastic problems, known as incompressible hyperelasticity. After problem definition, the governing equations are linearized for employing the Newton-Raphson iteration method. Then, the problem is discretized by using concepts of isogeometric analysis method and its solution algorithm is devised. To demonstrate the performance of the proposed approach, the obtained results are compared with finite elements. Due to large deformations in this kind of problems, the finite element method requires a relatively large number of elements, as well as the need for remeshings in some problems, that results in a large system of equations with a high computational cost. In the isogeometric analysis method, using B-Spline and NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) basis functions provides us with a good flexibility in modeling of geometry without any need for further remeshings. The examples studied in this article indicate that by using the isogeometric approach good quality results are obtained with a smaller system of equations and less computational cost. Also, influence of Gauss integration points for the incompressible materials are investigated.

Keywords: Isogeometric analysis; NURBS; Incompressible Hyperelasticity; Newton-Raphson.

۱- مقدمه

در بسیاری از مسائل مهندسی در نظر گرفتن تغییرشکل‌های غیرخطی و بزرگ در محدوده رفتار الاستیک مواد جهت طراحی ایمن، بهینه و استفاده حداکثری از قابلیت مصالح، حائز اهمیت است. با توجه به رفتار غیرخطی این مصالح در ناحیه الاستیک، رابطه خطی تنش- کرنش، نیازمند بازنگری است. در مسائل هایپرالاستیسیته^۱ مقادیر تنش نسبت به تابع انرژی کرنشی ذخیره شده^۲ تعریف می‌شود. با توجه به ماهیت غیرخطی رابطه حاکم بر مسئله، نیازمند خطی‌سازی روابط جهت استفاده از الگوریتم‌های حل عددی مانند نیوتن-رافسون است. اولین بار حل مسائل غیرخطی الاستیک توسط ترنر و همکارانش^۳ [۱]، با استفاده از روش اجزای محدود در سال ۱۹۶۰ انجام شد.

از جمله تحقیقات اولیه در این زمینه، می‌توان به حل مسئله کمانش توسط کاپور^۴ [۲] در سال ۱۹۶۶، کالاجر^۵ (۱۹۶۷) [۳ و ۴] و هولاند^۶ (۱۹۶۹) [۵] بر پایه روش اجزای محدود اشاره کرد. فرآیند اعمال تدریجی بار در چندین مرحله توسط ترنر و همکاران (۱۹۶۰) [۱] و ارگریس^۷ (۱۹۶۴-۱۹۶۵) [۶ و ۷] مطرح و در ادامه تحقیقات، استفاده از روش حل بر مبنای تکرار نیوتن-رافسون توسط اُدن^۸ (۱۹۶۷) [۸]، مالت^۹ و مارکل^{۱۰} (۱۹۶۸) [۹] پیشنهاد گردید. اُدن (۱۹۶۹) [۱۰]، هایسر^{۱۱} و همکاران (۱۹۷۱) [۱۱] و زینکوویچ^{۱۲} (۱۹۷۱) [۱۲] روش نیوتن-رافسون را بهبود بخشیده و بریبا و کانر^{۱۳} (۱۹۶۹) [۱۳]، مفهوم اعمال تدریجی بار و ایجاد همگرایی در هر مرحله افزایش بار را معرفی

کردند. برای آشنایی با مفاهیم بنیادی مسائل غیرخطی مصالح و هندسی مراجع [۱۴-۱۸] پیشنهاد می‌شود.

با توجه به پیشرفت‌های قابل ملاحظه در فناوری طراحی به کمک کامپیوتر^{۱۴} می‌توان هندسه‌های پیچیده را با استفاده از توابع پایه ب-اسپلاین^{۱۵} و یا انواع ارتقاء یافته آن نظیر نریز و ت-اسپلاین^{۱۶} مدل‌سازی کرد [۱۹ و ۲۰]. استفاده از این توابع پایه در مدل‌سازی هندسه و تقریب تابع مجهول مسائل مهندسی، نخستین بار توسط هیوز و همکارانش^{۱۷} با نام روش تحلیلی ایزوژئومتری^{۱۸} در سال ۲۰۰۵ پیشنهاد گردید [۲۱]. برای آشنایی بیشتر با مفاهیم بنیادی روش تحلیلی ایزوژئومتریک، مراجع [۲۲-۲۴] پیشنهاد می‌شوند. به دلیل استفاده از توابع پایه نریز در روش ایزوژئومتریک با قابلیت انعطاف پذیری زیاد در تولید هندسه‌های پیچیده، فرآیند تولید مش مجدد در مسائل غیرخطی الاستیک تا حد زیادی رفع و بنابراین سرعت حل نسبت به روش اجزای محدود افزایش خواهد یافت. نخستین بار توجه به مفهوم ایزوژئومتریک در تغییرشکل‌های بزرگ در سال ۲۰۰۸ توسط هیوز و همکاران [۲۵] مطرح گردید.

در بخش دوم این تحقیق، به مرور خلاصه‌ای از فرمول-بندی مصالح هایپرالاستیسیته تراکم ناپذیر پرداخته شده، ضمن بیان معادله تعادل حاکم بر مسئله، خطی‌سازی آن جهت استفاده از روش حل بر مبنای تکرار نیوتن-رافسون انجام گرفته است. در بخش سوم، ضمن اشاره به مفهوم روش تحلیل ایزوژئومتریک، توابع مجهول و هندسه مدل در مسائل هایپرالاستیسیته خطی‌سازی شده توسط توابع پایه و متغیرهای کنترلی^{۱۹} گسسته‌سازی^{۲۰} می‌شوند. در انتهای این بخش، الگوریتمی برای مسائل غیرخطی الاستیک بر پایه روش تحلیلی ایزوژئومتریک پیشنهاد شده است. بخش چهارم، به نتایج حل و مقایسه آن با روش اجزای محدود

¹ Hyperelasticity

² Stored Strain Energy Function

³ Turner et al.

⁴ Kapur

⁵ Gallager

⁶ Holland

⁷ Argyris

⁸ Oden

⁹ Mallet

¹⁰ Marcal

¹¹ Haisler

¹² Zinckiewicz

¹³ Brebbia & Connor

¹⁴ Computer Aided Design (CAD)

¹⁵ B-Spline

¹⁶ T-Spline

¹⁷ Hughes et al.

¹⁸ Isogeometric Analysis

¹⁹ Control Variable

²⁰ Discretization

مواد و وابسته به نامتغیرهای^۵ آن است. با بازنویسی رابطه (۲)، تانسورهای تنش ثانویه پیولا-کیرشلف و کوشی σ برای مصالح ایزوتروپیک حاصل خواهد شد [۱۷].

$$S = 2 \frac{\partial \psi}{\partial C} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_C} \frac{\partial I_C}{\partial C} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial II_C} \frac{\partial II_C}{\partial C} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial III_C} \frac{\partial III_C}{\partial C} = 2\psi_I I + 4\psi_{II} C + 2J^2 \psi_{III} C^{-1} \quad (6)$$

$$\sigma = J^{-1} F S F^T = 2J^{-1} \psi_I b + 4J^{-1} \psi_{II} b^2 + 2J \psi_{III} I \quad (7)$$

در روابط عنوان شده J تانسور تغییرات حجم ذره و b تانسور تغییر شکل چپ گرین-کوشی نام دارد. برای مواد ایزوتروپیک تراکم ناپذیر، تابع انرژی کرنشی با توجه به مولفه اعوجاجی تانسور C ، بازنویسی می‌شود $\{\hat{C} = III_C^{-1/3} C\}$. که سبب تجزیه تانسور تنش، به دو مولفه تنش انحرافی^۶ و تنش ناشی از فشار هیدرواستاتیکی^۷ و تجزیه تانسور الاستیسیته به مولفه‌های اعوجاجی^۸ و فشار هیدرواستاتیکی می‌شود.

$$\hat{\psi}(C) = \Psi(\hat{C}) \quad (8)$$

$$S = 2 \frac{\partial \hat{\psi}(C)}{\partial C} + p J C^{-1} = S' + p J C^{-1} \quad (9)$$

$$\sigma = \sigma' + p I \quad (10)$$

$$\tilde{C} = \hat{C} + \tilde{C}_p = 4 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial C \partial C} + 2p \frac{\partial (J C^{-1})}{\partial C} \quad (11)$$

$$\tilde{c} = \hat{c} + \tilde{c}_p \quad (11)$$

۲-۲- استخراج و خطی سازی معادلات تعادل

معادله کار مجازی^۹ بر مبنای سرعت مجازی^{۱۰} برای مسائل غیرخطی هندسی و مواد، با توجه به تابع انرژی کرنشی مورد

اختصاص یافته است. در ادامه، نتیجه تحقیق و مقایسه انجام شده گزارش می‌شود.

۲- استخراج روابط و معادلات حاکم بر مسئله

۲-۱- مصالح هایپرالاستیسیته تراکم ناپذیر

در مسائل هایپرالاستیسیته با توجه به استقلال کار انجام شده از مسیر ذره و وابستگی به گرادیان تغییرات ذره و تانسورهای گرین-کوشی^۱، تابع انرژی کرنشی ذخیره شده بر واحد حجم، نسبت به نقاط آغازین و پایانی قابل تعریف است [۱۴، ۱۵ و ۱۷].

$$\psi(C(X), X) = \int_{t_0}^t S(C(X), X) : \dot{C} dt \quad (1)$$

$$S(C(X), X) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial C} = \frac{\partial \psi}{\partial E} \quad (2)$$

که در روابط عنوان شده، S تانسور تنش ثانویه پیولا-کیرشلف، C تانسور تغییر شکل راست گرین-کوشی و E تانسور کرنش گرین است. رابطه بین تنش و کرنش در معادله عنوان شده، غیرخطی است. با خطی سازی رابطه، ماتریس مرتبه چهار الاستیسیته در دستگاه لاگرانژی و اویلری^۲ با توجه به بردارهای یکه E و e ، به صورت زیر حاصل می‌شود [۱۷]. که F تانسور گرادیان تغییر شکل است.

$$DS[u] = \tilde{C} : DE[u] \quad (3)$$

$$\tilde{C} = \frac{\partial S}{\partial E_3} = 2 \frac{\partial S}{\partial C} = \frac{4 \partial^2 \psi}{\partial C \partial C} = \sum_{I, J, K, L=1}^3 \tilde{C}_{IJKL} E_I \otimes E_J \otimes E_K \otimes E_L \quad (4)$$

$$\tilde{c} = \sum_{I, J, K, L=1}^3 J^{-1} F_{II} F_{JJ} F_{KK} F_{LL} \tilde{C}_{IJKL} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \quad (5)$$

با در نظر گرفتن مصالح ایزوتروپیک^۳ با ساختمان رفتاری^۴ یکسان در تمام جهات، رابطه بین تابع انرژی کرنشی و تانسورهای گرین-کوشی مستقل از جهت بردار

⁵ Invariants

⁶ Deviatoric Stress Tensor

⁷ Hydrostatic Component

⁸ Distortional Component

⁹ Virtual Work

¹⁰ Virtual Velocity

¹ Green-Cauchy Tensor

² Lagrangian & Eulerian Elasticity Tensor

³ Isotropic Material

⁴ Constitutive Behavior

$$n = \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\|} \quad (۱۶)$$

$$da = \left\| \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\| d\xi d\eta \quad (۱۷)$$

۳- تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل

هایپرالاستیسیته تراکم ناپذیر

اساس روش تحلیل ایزوژئومتریک [۲۱]، برگرفته از پیشرفت-های صنعت طراحی به کمک کامپیوتر در صنعت مدل‌سازی هندسی^۲ است. مدل سازی منحنی، سطوح و احجام در این شاخه به وسیله توابع پایه ب- اسپلاین و انواع ارتقا یافته آن نظیر، نربز و ت- اسپلاین انجام می‌شود. در این روش، از نقاط کنترلی^۳ شامل، مولفه‌ای علاوه بر مولفه‌های تعریف هندسه با شرط اقتناع معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله استفاده می-شود و با گسسته‌سازی محیط پیوسته به وسیله این نقاط تعریفی و استفاده آن‌ها در تقریب تابع مجهول، جواب مسئله به جای استفاده از المان در روش اجزای محدود، شبکه در دیفرانسیل محدود^۴ یا مجموعه‌ای از نقاط در روش‌های بدون مش^۵ سبب ایجاد رویه‌ای از جواب خواهد شد. نتایج بسیار خوبی توسط هیوز و گروه تحقیقاتی آن در مکانیک محاسباتی با بهره‌گیری از این روش موجود بوده [۲۱، ۲۶-۲۹]، همچنین توانایی این ایده در معادلات دیفرانسیل معمولی^۶ به وسیله حسینی و همکاران، مورد بررسی قرار گرفته است [۳۰-۳۱]. سطوح و احجام با استفاده از توابع پایه نربز و نقاط کنترلی مانند به صورت روابط (۱۸-۲۱) قابل تعریف است (شکل ۱).

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (۱۸)$$

$$V(\xi, \eta, \varsigma) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} R_{i,j,k}(\xi, \eta, \varsigma) P_{i,j,k} \quad (۱۹)$$

استفاده، شرایط بارگذاری و شرایط مرزی مسئله قابل تعریف است [۱۷].

$$\delta W(\phi, \delta v) = \delta W_{int}(\phi, \delta v) - \delta W_{ext}(\phi, \delta v) =$$

$$\int_V \sigma : \delta d \, dv - \int_V f \cdot \delta v \, dv - \int_{\partial V} t \cdot \delta v \, da = 0 \quad (۱۲)$$

در روابط عنوان شده f نیروی کالبدی، t نیروی سطحی و d ، تانسور نرخ تغییرات است. با توجه به حصول یک رابطه غیرخطی، با بهره‌گیری از الگوریتم عددی نیوتن-رافسون، نیاز به خطی‌سازی هر یک از مولفه‌های کار داخلی و خارجی معادله است. البته باید توجه داشت که حاصل خطی‌سازی کار خارجی برای نیروی کالبدی^۱ وزن مورد استفاده در این تحقیق صفر بوده، به بررسی نیروی سطحی فشار نرمال $t = pn$ پرداخته شده است [۱۷].

$$\delta W(\phi_k, \delta v) + D\delta W(\phi_k, \delta v)[u] =$$

$$\left[\delta W_{int} - \delta W_{ext} \right] + \quad (۱۳)$$

$$\left[D\delta W_{int}[u] - D\delta W_{ext}[u] \right] = 0$$

$$(۱۴)$$

$$D\delta W_{ext}^P(\phi, \delta v)[u] =$$

$$D\delta W_{ext}^f(\phi, \delta v) + D\delta W_{ext}^P(\phi, \delta v) =$$

$$0 + \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \times \delta v \right) \right] d\xi d\eta +$$

$$\frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \left[\left(\frac{\partial \delta v}{\partial \eta} \times u \right) \right] d\xi d\eta - \quad (۱۵)$$

$$\frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \times \delta v \right) \right] d\xi d\eta -$$

$$\frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \left[\left(\frac{\partial \delta v}{\partial \xi} \times u \right) \right] d\xi d\eta$$

² Computer Aided Geometry Design (CAGD)

³ Control Point

⁴ Finite Deferential Method (FDM)

⁵ Mesh Free Method

⁶ Ordinary Differential Equation

¹ Body Force

با تعداد تکرار $p+1$ گره ابتدا و انتها را بردار گرهی باز یا نامتناوب^۳ نامیده که تعداد نقاط گره‌ای آن $m=n+p+1$ است؛ همچنین فاصله $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ با تعداد $p+1$ تابع پایه-ای غیرصفر از $N_{i-p,p}(\xi) \dots N_{i,p}(\xi)$ را بازه گره‌ای^۴ می‌نامیم [۱۹، ۲۰ و ۳۲].

در روش ایزوژئومتری، هندسه مدل توسط توابع پایه و نقاط کنترلی تولید و با گسسته‌سازی فضای مسئله، این توابع پایه جهت تقریب فضای جواب با نام توابع شکل^۵ مشابه توابع درون یاب^۶ در روش اجزای محدود، مورد استفاده قرار می‌گیرد. ایجاد رویه جواب در این روش، با افزودن یک مولفه به نقاط کنترلی علاوه بر مولفه‌های تعریف هندسه حاصل خواهد شد؛ بنابراین با توجه به تعریف هندسه مسئله در فضای ۲ یا ۳ بعدی، جواب مسئله در یک فضا بالاتر حاصل می‌شود. در گسسته‌سازی فضای مسئله هایدرواستاتیسته تراکم ناپذیر با استفاده از توابع پایه نریز و متغیرهای کنترلی از تعاریف زیر بهره می‌گیریم.

$$X = \sum_{a=1}^n R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) X_{pa}$$

$$x = \sum_{a=1}^n R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x(t)_{pa}$$

$$v = \sum_{a=1}^n R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_{pa}$$

$$u = \sum_{a=1}^n R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_{pa}$$
(۲۳)

$$F = \sum_{a=1}^n x_{pa} \otimes \nabla_0 R_a$$

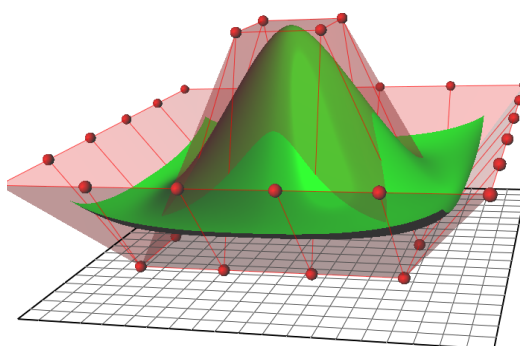
$$C = \sum_{a,b} (x_{pa} \cdot x_{pb}) \nabla_0 R_a \otimes \nabla_0 R_b$$

$$b = \sum_{a,b} \nabla_0 R_a \cdot \nabla_0 R_b (x_{pa} \otimes x_{pb})$$

$$d = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n (v_{pa} \otimes \nabla R_a + \nabla R_a \otimes v_{pa})$$
(۲۴)

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p_1}(\xi) N_{j,p_2}(\eta) \omega_{i,j}}{\sum_{e=0}^{n_1} \sum_{f=0}^{n_2} N_{e,p_1}(\xi) N_{f,p_2}(\eta) \omega_{e,f}} \quad (20)$$

$$R_{i,j,k}(\xi, \eta, \varsigma) = \frac{N_{i,p_1}(\xi) N_{j,p_2}(\eta) N_{k,p_3}(\varsigma) \omega_{i,j,k}}{\sum_{e=0}^{n_1} \sum_{f=0}^{n_2} \sum_{g=0}^{n_3} N_{e,p_1}(\xi) N_{f,p_2}(\eta) N_{g,p_3}(\varsigma) \omega_{e,f,g}} \quad (21)$$



شکل ۱- مدل سازی سطح به وسیله توابع پایه ب- اسپلاین و نقاط کنترلی

i امین تابع ب- اسپلاین از درجه p_1 با بردار گرهی^۱ $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m_1}\}$ در راستای ξ توسط رابطه بازگشتی^۲ (۲۲) تعریف می‌شود.

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p_1} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p_1} - \xi_i} N_{i,p_1-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p_1+1} - \xi}{\xi_{i+p_1+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p_1-1}(\xi) \quad (22)$$

بردارهای گرهی $\varsigma = \{\varsigma_0, \varsigma_1, \dots, \varsigma_{m_3}\}$ و راستاهای $\eta = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m_2}\}$ از درجه p_2, p_3 نیز، مشابه رابطه فوق تعریف می‌شوند. بردار گرهی در یک راستا

³ Open Knot Vector (Non periodic Knot Vector)

⁴ Knot Span

⁵ Shape Function

⁶ Interpolation Function

¹ Knot Vector

² Recursive Formulation

$$D\delta W^{(e)}(\phi, R_a \delta V_a)[R_b u_b] =$$

$$D\left(\delta V_a \cdot \left(T_a^{(e)} - F_a^{(e)}\right)\right)[R_b u_b] = \quad (28)$$

$$\delta V_a \left(D \cdot \left(T_a^{(e)} - F_a^{(e)}\right) \right)[R_b u_b] =$$

$$\delta V_a \cdot K_{ab}^{(e)} u_b$$

ماتریس ضرایب K_{ab}^e رابطه بین تغییرات نیرو در متغیر کنترلی a را نسبت به تغییر مکان در متغیر کنترلی b بیان کرده و با جایگذاری روابط (۲۳) و (۲۴) در معادلات بیان شده در قسمت خطی‌سازی، ماتریس ضرایب به مولفه‌های کار داخلی شامل ساختار رفتاری K_{cab}^e ، تنش ابتدایی $K_{\sigma,ab}^e$ و یک مولفه ناشی از کار خارجی با نام مولفه نیروهای خارجی ماتریس ضرایب $K_{p,ab}^e$ قابل تجزیه است.

$$K_{ab}^{(e)} = K_{c,ab}^{(e)} + K_{\sigma,ab}^{(e)} - K_{p,ab}^{(e)} \quad (29)$$

$$[K_{c,ab}^{(e)}]_{ij} =$$

$$\int_{V^{(e)}} \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial R_a}{\partial X_k} \tilde{c}_{ikjl} \frac{\partial R_b}{\partial X_l} dv ; i, j = 1, 2, 3 \quad (30)$$

$$[K_{\sigma,ab}^{(e)}]_{ij} =$$

$$\int_{V^{(e)}} \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial R_a}{\partial X_k} \sigma_{kl} \frac{\partial R_b}{\partial X_l} \delta_{ij} dv ; i, j = 1, 2, 3 \quad (31)$$

$$[K_{p,ab}^{(e)}]_{ij} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \left[k_{p,ab}^{(e)} \right]_k ; i, j = 1, 2, 3$$

$$k_{p,ab} = \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial X}{\partial \xi} \left(\frac{\partial R_a}{\partial \eta} R_b - \frac{\partial R_b}{\partial \eta} R_a \right) da + \quad (32)$$

$$\frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial X}{\partial \eta} \left(\frac{\partial R_a}{\partial \xi} R_b - \frac{\partial R_b}{\partial \xi} R_a \right) da$$

با توجه به تعریف R به وسیله بردارهای گره‌ای در فضای پارامتریک، محاسبه ∇R با انتقال از فضای فیزیکی به فضای پارامتریک امکان پذیر است.

$$\nabla_\theta R = \frac{\partial R}{\partial X} = \frac{\partial R}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial R}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial X} \quad (25)$$

$$\nabla R = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

از خطی‌سازی رابطه کار مجازی مولفه اول معادله داخلی $T(x)$ و مولفه دوم $D\delta W(\phi, \delta v)[u]$ بیانگر کار نیروهای خارجی $F(x)$ و منحنی $K(x)$ نیرو-جابجائی است. در فضای گسسته این معادله را با توجه به متغیرهای کنترلی و روابط فوق بازنویسی کرده و از الگوریتم حل بر مبنای تکرار نیوتن-رافسون استفاده می‌شود. با نوشتن معادله کار مجازی بر مبنای سرعت مجازی برای هر المان گره‌ای ایزوژئومتریک e شامل متغیرهای کنترلی موثر a و در نظر گرفتن تمامی المان‌های گره‌ای شامل این متغیر کنترلی، به تعمیم آن به کل فضای مسئله خواهیم پرداخت، و با توجه به این مطلب که معادله حاصله برای هر سرعت مجازی متغیرهای کنترلی برقرار است. داریم:

$$\delta W(\phi, \delta v) = \sum_{a=1}^N \delta W(\phi, R_a \delta V_a) =$$

$$\sum_{a=1}^N \delta V_a \cdot (T_a - F_a) = \quad (26)$$

$$\sum_{a=1}^N \sum_{e=1}^N \delta V_a \cdot \int_{V^{(e)}} \sigma \nabla R_a dv -$$

$$\sum_{a=1}^N \sum_{e=1}^N \delta V_a \cdot \left(\int_{V^{(e)}} R_a f dv + \int_{\partial V^{(e)}} R_a t da \right) = 0$$

$$R_a = T_a - F_a = 0 \quad (27)$$

⁴ Constitutive Component

⁵ Initial Stress Component

⁶ External Force Component

¹ External Force

² Internal Force

³ Tangent Stiffness Matrix

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} [(\xi_{i+1} - \xi_i)r + (\xi_{i+1} + \xi_i)] \\ \eta &= \frac{1}{2} [(\eta_{i+1} - \eta_i)s + (\eta_{i+1} + \eta_i)] \\ \zeta &= \frac{1}{2} [(\zeta_{i+1} - \zeta_i)t + (\zeta_{i+1} + \zeta_i)] \end{aligned} \quad (37)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} & \frac{\partial \zeta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} & \frac{\partial \zeta}{\partial s} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (38)$$

بطور خلاصه، گام‌های زیر برای حل مسئله هایپراالاستیسیته در محدوده تراکم ناپذیری پیشنهاد می‌شود. ۱. وارد کردن مشخصات هندسه (بردارهای گره‌ای، نقاط کنترلی و وزن توابع پایه)، تعریف مقایر مواد ایزوژنومتریک در محدوده تراکم ناپذیری و مقادیر تحلیل.

۲. ایجاد حلقه روی سری افزایشی بار:

۱-۲. محاسبه مقدار افزایش بار در هر مرحله ΔF_i

۲-۲. محاسبه مقدار بار در مرحله $\Delta F_i = F_i + \Delta F_i$

۳-۲. محاسبه مقدار باقی‌مانده‌های نقاط کنترلی

$$R_i = R_i - \Delta F_i$$

۴-۲. ایجاد حلقه همگرایی جهت حصول

$$\|R_i\| / \|F_i\| < \varepsilon$$

۱-۴-۲. محاسبه مقدار K_i

۲-۴-۲. حل معادله $K_i u_i = F_i$

۳-۴-۲. محاسبه مختصات جدید نقاط

$$x_{pi} = x_{pi} + u_i$$

۴-۴-۲. محاسبه نیروهای داخلی T_i

۵-۴-۲. محاسبه باقی‌مانده‌های وزنی

$$R_i = T_i - F_i$$

۵-۲. پایان حلقه همگرایی

پایان حلقه سری افزایشی بار.

با مرتب سازی معادلات حاصله دستگاه معادله‌ای جهت حل بر مبنای روش نیوتن-رافسون حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} K(x_k)u = -R(x_k) \\ x_{k+1} = x_k + u \end{cases} \quad (33)$$

در مسائل غیرخطی، اگرچه وارد کردن تمام بار خارجی در یک مرحله به صورت تئوری امکان پذیر است، لیکن در عمل بار خارجی، F به صورت یک سری افزایشی^۱ در چند مرحله بر جسم وارد می‌شود.

$$F = \sum_{a=1}^l \Delta F_i \quad (34)$$

در روش ایزوژنومتریک، هندسه و حل مسئله در فضای فیزیکی $\{x, y, z\}$ ، توسط متغیرهای کنترلی و توابع پایه تعریف می‌شود. این توابع پایه، توسط بردارهای گره‌ای در فضای پارامتریک $\{\xi, \eta, \zeta\}$ قابل محاسبه بوده، با توجه به روش انتگرال گیری گوس^۲ نیازمند انتقال از فضای پارامتریک به فضای الگو^۳ $\{r, s, t\}$ است؛ بنابراین انتگرال گیری در فضای فیزیکی با دو انتقال از فضای الگو به فضای پارامتریک و سپس به فضای فیزیکی همراه خواهد بود. برای نگاشت‌های ذکر شده ماتریس‌های ژاکوبی^۴ به صورت روابط (۳۵-۳۸) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} dx dy dz &= \det J_1 d\xi d\eta d\zeta = \\ &\det J_1 \det J_2 dr ds dt \end{aligned} \quad (35)$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (36)$$

۴- ارائه مثال‌ها

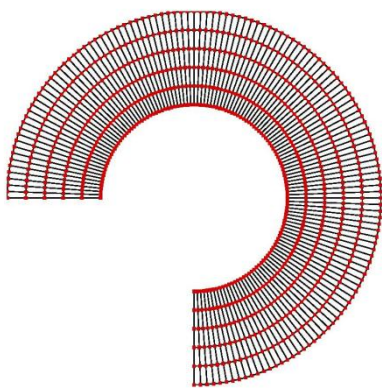
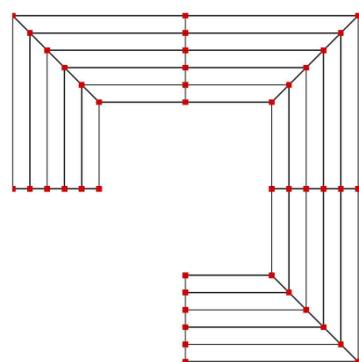
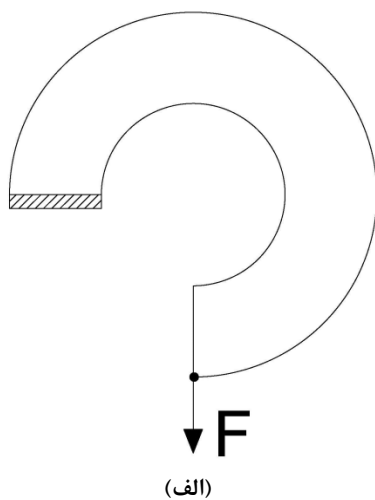
در این بخش، ابتدا نتایج روش اجزای محدود و روش ایزوژنومتریک در مسائل هایپراالاستیسیته تراکم ناپذیر با

¹ Series of Increments

² Gauss Quadrature

³ Parent Space

⁴ Jacobian Matrix



(ج)

شکل ۲- (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب) شبکه
کنترلی در روش ایزوژئومتری (ج) مش بندی اولیه در روش
اجزای محدود

یکدیگر مقایسه و در انتها با ارائه یک مثال به بررسی تاثیر تعداد نقاط گوسی در همگرایی جواب پرداخته شده است. لازم به ذکر است که در این تحقیق از مصالح نئو- هوکین تراکم ناپذیر با تابع انرژی کرنشی زیر استفاده شده است.

$$\Psi(C) = \frac{\mu}{2}(I_C - 3) \quad (39)$$

۴-۱- مدل سازی تیر قوسی تحت اثر بارگذاری در انتها
مدل تحلیلی ارائه شده در این مسئله، قطاعی از دایره با شعاع داخلی ۱ و شعاع خارجی ۲ است. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه گاهی در شکل ۲ نشان داده شده است. بارگذاری در ۱۰۰ مرحله با مقدار همگرایی^۱ $\varepsilon = 1 \times 10^{-8}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می شود. در روش اجزای محدود، از ۶۷۵ المان چهار گره‌ای مستطیلی^۲ شامل، ۸۱۶ گره و برای انتگرال گیری در هر المان از ۴ نقطه گوسی استفاده شده است. در روش ایزوژئومتری، از توابع پایه نریز درجه ۲ برای تقریب هندسه و تابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.33, 0.33, 0.66, 0.66, 1, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$$

همچنین برای انتگرال گیری در هر المان گره‌ای، از ۹ نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابطه $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا چنین است.

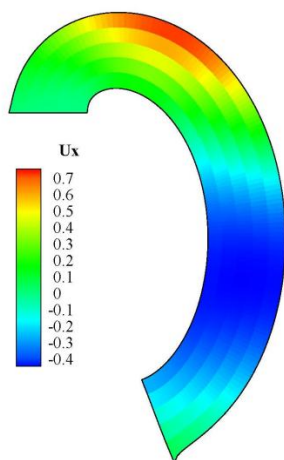
$$P_{\xi} = 7 ; P_{\eta} = 6 ; P_{total} = 42$$

پارامترهای خواص مکانیکی ماده به قرار زیر است.

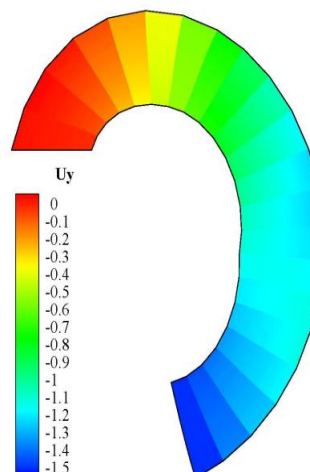
$$\rho = 0 ; \mu = 100$$

¹ Tolerance

² 4-Noded Bilinear Quadrilateral



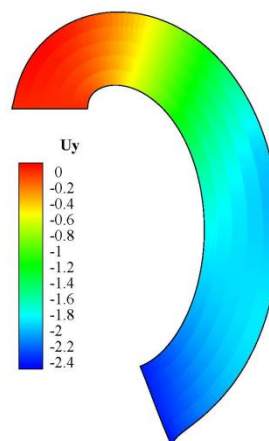
(د)



(الف)

شکل ۳- (الف) کانتور جابجایی در راستای Y در روش ایزوژئومتریک (ب) کانتور جابجایی در راستای Y در روش اجزای محدود (ج) کانتور جابجایی در راستای X در روش ایزوژئومتریک (د) کانتور جابجایی در راستای X در روش اجزای محدود

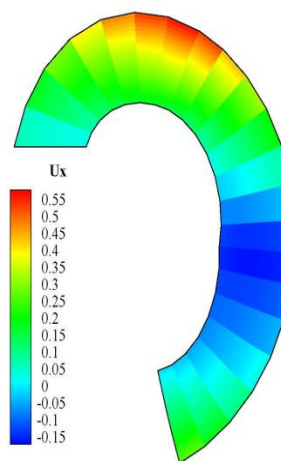
بدلیل بهم ریختگی نسبت المان^۱ تحلیلی در روش اجزای محدود در نقطه اعمال بار در مقادیر کانتورها، اختلاف مشاهده شده و تحلیل دقیق تر در این روش، وابسته به فرآیند ایجاد مش مجدد است.



(ب)

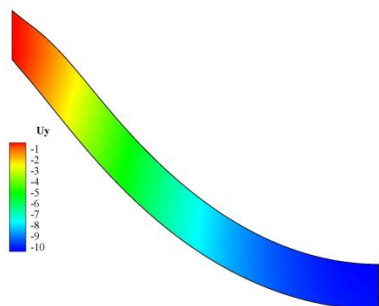
۲-۴- مدل سازی تیر یک سر مفصل، یک سر گیردار تحت اثر نیروی کالبدی وزن

مدل تحلیلی ارائه شده در این مسئله، یک مستطیل با طول ۱۵ و عرض ۲ است. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه گاهی در شکل ۵، نشان داده شده است. بارگذاری در ۱۰۰ مرحله با مقدار همگرایی $\epsilon = 1 \times 10^{-8}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می شود. در روش اجزای محدود، از ۳۰۰۰ المان چهار گره ای مستطیلی شامل، ۳۱۷۱ گره و برای انتگرال گیری در هر المان از ۴ نقطه گوسی استفاده شده است.

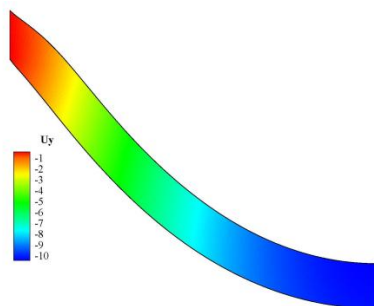


(ج)

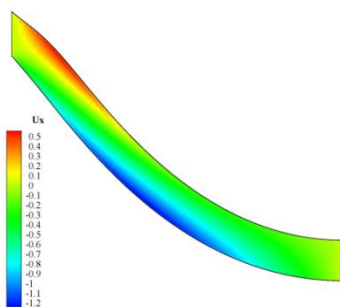
¹ Aspect Ratio



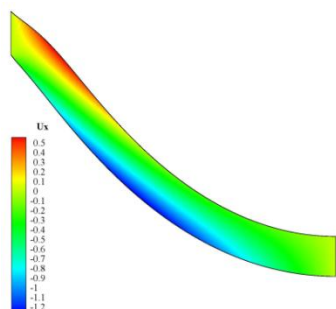
(الف)



(ب)

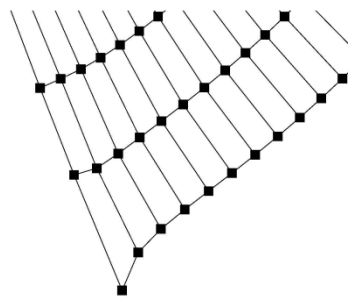


(ج)

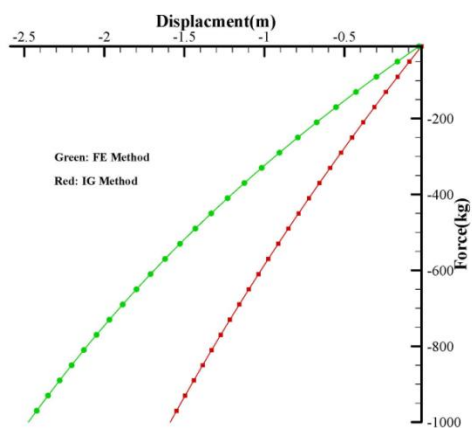


(د)

شکل ۶- (الف) کانتور جابجایی در راستای Y در روش ایزوژئومتری (ب) کانتور جابجایی در راستای Y در روش اجزای محدود (ج) کانتور جابجایی در راستای X در روش ایزوژئومتری (د) کانتور جابجایی در راستای X در روش اجزای محدود



(الف)

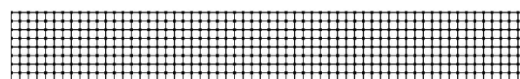


(ب)

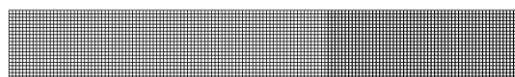
شکل ۴- (الف) بهم ریختگی نسبت المان در زیر نقطه اعمال بار در روش اجزای محدود (ب) نمودار بار - جابجایی در نقطه اعمال بار



(الف)

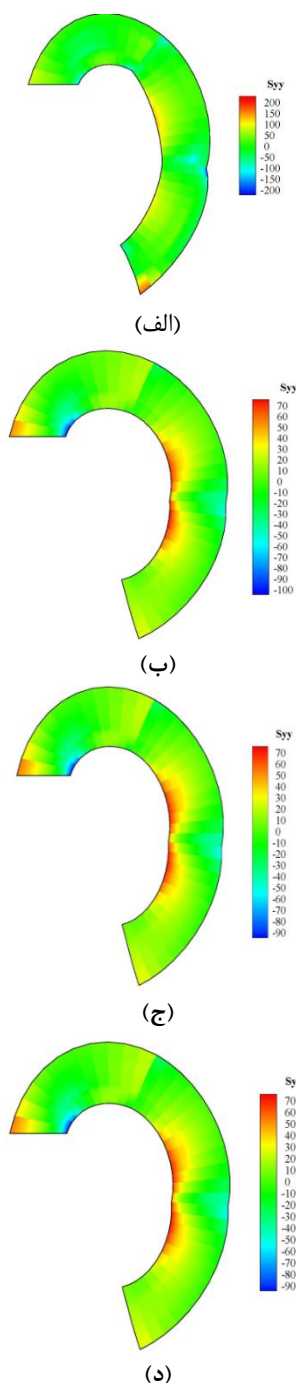


(ب)



(ج)

شکل ۵- (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب) شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتری (ج) مش بندی اولیه در روش اجزای محدود



شکل ۷- (الف) کانتور تنش در راستای YY مدل ۱ (ب) کانتور تنش در راستای YY مدل ۲ (ج) کانتور تنش در راستای YY مدل ۳ (د) کانتور تنش در راستای YY مدل ۴

در روش ایزوژئومتری، از توابع پایه ب-اسپلاین درجه ۲ برای تقریب هندسه و تابع مجهول استفاده شده، بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.1, 0.017, 0.034, \dots, 0.986, 1, 1, 1\}$$

$$m_\xi = 64$$

$$\eta = \{0, 0, 0, 0.14, 0.28, 0.42, 0.56, 0.7, 0.84, 1, 1, 1\}$$

$$m_\eta = 12$$

همچنین برای انگرال گیری در هر المان گره‌ای، از ۹ نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابطه $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا چنین است.

$$P_\xi = 61 ; P_\eta = 9 ; P_{total} = 549$$

پارامترهای خواص مکانیکی ماده به قرار زیر است.

$$\rho = 0.05 ; \mu = 100$$

با توجه به انطباق بسیار نزدیک نتایج ارائه شده در این قسمت، استفاده از روش اجزای محدود علاوه بر وابستگی جواب مسئله به سازه مش بندی که سبب ایجاد دستگاه معادلات با حجم محاسباتی بالا می‌شود. در مواردی مش بندی مجدد اجتناب ناپذیر است. روش تحلیل ایزوژئومتری، علاوه بر آنکه فرآیند تولید مش مجدد را تا حد زیادی کاهش می‌دهد، سبب ایجاد دستگاه معادلاتی با حجم محاسباتی کوچک‌تر نیز می‌شود.

۳-۴- مدل سازی تیر قوسی تحت اثر بارگذاری در انتها (بحث در تعداد نقاط گوسی)

در این مسئله، به بررسی مثال ۴-۱ تحت اثر تعداد نقاط گوسی ارائه شده در جدول ۱ پرداخته شده است.

جدول ۱- تعداد نقاط گوسی مدل

| شماره مدل | تعداد نقاط گوسی در هر المان |
|-----------|-----------------------------|
| ۱ | ۴ |
| ۲ | ۹ |
| ۳ | ۱۶ |
| ۴ | ۳۶ |

جدول ۲- حجم آغازین و پایانی مدل

| شماره مدل | حجم |
|-----------|--------------|
| ۱ | ۷۰.۵/۲۵۰.۴۶۴ |
| ۲ | ۷۰.۶/۸۵۴۷۷۲ |
| ۳ | ۷۰.۶/۸۵۵۷۲۶ |
| ۴ | ۷۰.۶/۸۵۸۳۴۲ |

جدول ۳- جابجایی مدل در زیر نقطه اعمال بار

| شماره مدل | مقدار قدر مطلق جابجایی |
|-----------|------------------------|
| ۱ | ۲/۱۹۰۷۰ |
| ۲ | ۱/۵۸۸۴۲ |
| ۳ | ۱/۶۰۱۱۵ |
| ۴ | ۱/۵۹۹۸۸ |

$$|\Delta_{Model4} - \Delta_{Model3}| = |1.59988 - 1.60115| = 0.00127$$

با توجه به نتایج ارائه شده از ۱۶ نقطه گوسی به بالا نتایج تغییر چندانی نداشته، لذا استفاده از همین تعداد نقطه گوسی برای تحلیل مدل مناسب است.

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق، به فرمول‌بندی و حل مسائل غیرخطی الاستیک تراکم‌ناپذیر که به مسائل هایپر الاستیسیته ناپذیر نیز معروفند، با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریکی و مقایسه نتایج حاصله با روش اجزای محدود پرداخته شده است. با توجه به تغییر شکل‌های بزرگ در مسائل غیرخطی الاستیک، استفاده از روش اجزای محدود علاوه بر وابستگی جواب مسئله به سبب ایجاد دستگاه معادلات با حجم محاسباتی بالا می‌شود؛ در مواردی مش بندی مجدد، اجتناب ناپذیر است. روش تحلیل ایزوژئومتریکی علاوه بر آنکه فرآیند تولید مش مجدد را تا حد زیادی کاهش می‌دهد، سبب ایجاد دستگاه معادلاتی با حجم محاسباتی کوچکتر نیز می‌شود؛ همچنین با توجه به مسئله مطرح شده استفاده از ۱۶ نقطه گوسی برای تحلیل مدل مناسب است.

۶- علائم و نشانه‌ها

| | |
|------------------------------------|-----------|
| تابع پایه ب- اسپلاین | $N_{i,p}$ |
| تابع پایه نریز | $R_{i,p}$ |
| تانسور الاستیسیته مادی یا لاگرانژی | \bar{C} |
| تانسور کرنش گرین | E |
| تانسور تغییر شکل گرین- کوشی راست | C |
| تانسور تنش ثانویه پیولا - کیرشلف | S |
| تانسور گرادیان تغییر شکل | F |
| ماتریس ژاکوبین | J |
| ماتریس ضرایب | K |
| مولفه فشار هیدرواستاتیکی | p |
| نرخ تغییرات | d |
| نسبت تغییرات حجم | J |

علائم یونانی

| | |
|----------------------------------|----------|
| بردار گره‌ای در راستای ξ | ξ |
| بردار گره‌ای در راستای η | η |
| یکبردار گره‌ای در راستای ζ | ζ |
| تابع انرژئی کرنشی ذخیره شده | ψ |
| تانسور تنش کوشی | σ |
| چگالی | ρ |
| ضریب لامه | μ |

۷- مراجع

- [1] Tuner MJ, Drill EH, Martin HC, Melosh RJ (1960) Large deflection of structures subject to heating and external load. J Aero Sci 27: 97-106.
- [2] Kapur WW, Hartz BJ (1966) Stability of plates using the finite element method. J Engng Mech Div, ASCE 92, 177-195.
- [3] Gallagher RJ, Padlog J (1963) Discrete element approach to structural stability. Am Inst Aero & Astro J 1(6): 1437-1439.
- [4] Gallagher RJ, Gellatly RA, Padlog J, Mallet RH (1967) A discrete element procedure for thin shell instability analysis. Am Inst Aero & Astro J 5(1): 138-145.
- [5] Holand I, Moan T (1969) The finite element in plate buckling, Finite Element Meth. in Stress Analysis. 1st edn. Tapir.
- [6] Argyris JH (1964) Recent Advance in matrix method of structure analysis. Pergamon Press.
- [7] Argyris JH (1965) Continua and discontinua. Proc. conf. Matrix Methods in Struct. mech. Air

- [22] Penter PM (1989) Splines and variational methods. John Wiley & Sons.
- [23] Hölling K (2003) Finite element methods with B-Splines. SIAM, Society for industrial and applied mathematics Philadelphia.
- [24] Cottrell JA, Hughes TJR, Bazilves Y (2009) Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA. John Wiley & Sons.
- [25] Elguedj T, Bazilevs Y, Calo VM, Hughes TJR (2008) B and F projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 197: 2732–2762.
- [26] Bazilevs Y, Beirão Da Veiga L, Cottrell J, Hughes TJR, Sangalli G (2006) Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. *Math Mod Meth Appl Sci* 16: 1031–1090.
- [27] Bazilevs Y, Calo V, Cottrell J, Hughes T, Reali A, Scovazzi G (2007) Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Comput Meth Appl Mech Engrg* 197(1–4): 173–201.
- [28] Bazilevs Y, VM Calo, Zhang Y, Hughes TJR (2006) Isogeometric fluid structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. *Comput Mech* 38(4): 310–322.
- [29] Cottrell JA, Reali A, Bazilevs Y, Hughes TJR (2006) Isogeometric analysis of structural vibrations. *Comput Meth Appl Mech Engrg* 195(41–43): 5257–5296.
- [30] Hassani B, Moghaddam NZ (2009) Development of a new numerical method for solution of ordinary differential equations by using spine basis functions. Technical Report No. 1015, Shahrood University of Technology, Iran. (In Persian)
- [31] Hassani B, Moghaddam NZ, Tavakkoli SM (2009) Isogeometric solution of Laplace equation. *Asian j Civil Eng* 10(5): 579–592.
- [32] Bletzinger KU, Kimmich S, Ramm E (1991) Efficient modeling in shape optimal design. *Comput Syst Engrg* 2(5–6): 483–495.
- ForceInst. of Tech. Wright Patterson Air Force Base, Ohio.
- [8] Oden JT (1967) Numerical formulation of non-linear elasticity problems. *Proc. ASCE J. Struct. Dir.* 93, ST3 52–90.
- [9] Mallet RH, Marcal PV (1968) Finite element analysis of non-linear structures. *Proc. ASCE. J. of Struct. Dir.* 94, ST9 2081–2105.
- [10] Oden JT (1969) Finite element application in non-linear structural analysis. *Proc. Conf. on Finite elemnt Meth.* Vanderbilt University Tennessee.
- [11] Haisler WE, Stricklin JE, Stebbins FJ (1971) Development and evaluation of solution procedures for geometrically non-linear structural analysis by the discrete stiffness method. AIAA/ASME, 12th structure, Structural Dynamics & Materials Conf, Anaheim, California.
- [12] Zinckiewicz OC (1971) The finite element in engeneering science. Mc Graw-Hill, London.
- [13] Brebbia C, Connor J (1969) Geometrically non-linear finite element analysis. *Proc. ASCE J. Eng. Mech. Dir. Proc. Paper* 6516.
- [14] Crisfield MA (1991) Nonlinear finite element analysis of solids and structures. vol I & vol II, John Wiley & Sons.
- [15] Belytschko T, Liu WK, Moran B (2000) Nonlinear finite element for continua and structures. John Wiley & Sons.
- [16] Zinkiewicz OC, Taylor RL (2000) The finite element method. 5nd edn. McGraw Hill.
- [17] Bonet J, Wood RD (2008) Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. 2nd edn. Cambridge University Press.
- [18] Wriggers P (2008) Nonlinear finite element methods. Springer.
- [19] Piegel L, Wayne T (1996) The nurbs book, 2nd edn. Springer.
- [20] Rogers DF (2001) An introduction to nurbs with historical perspective. Morgan Kaufmann Publishers.
- [21] Hughes TJR, Cottrell JA, Bazilevs Y (2005) Isogeometric analysis: Cad, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Comput. Meth Appl Mech Engrg* 194(39–41): 4135–4195.