



پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی خمیده دارای هسته انعطاف‌پذیر تحت ضربه شعاعی با سرعت پایین

فرامرزی آشنای قاسمی^{۱*}، کرامت ملکزاده فرد^۲ و محمد علی خلیلی^۳^۱ دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی، تهران^۲ دانشیار مهندسی مکانیک، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران^۳ کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۸/۲۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۱۰/۱۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۱/۳۰

چکیده

در مقاله حاضر پاسخ دینامیکی یک تیر خمیده با هسته انعطاف‌پذیر تحت یک ضربه عرضی شعاعی با سرعت پایین در وسط رویه بالا، مطالعه شده است. این پاسخ شامل جابجایی شعاعی و محیطی رویه‌ها و هسته و تنش‌های برشی و شعاعی در هسته است. ابتدا از تئوری برشی مرتبه بالا برای میدان جابجایی استفاده شد. نیروی ضربه نیز با مدل جرم و فنر دو درجه آزادی برای محدوده بارگذاری الاستیک معادل سازی گردید و از اصل همپلتون برای استخراج معادلات حاکم بر حرکت تیر استفاده شد. نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از نرم افزار المان محدود آباکوس و آخرین تحقیقات انجام شده مقایسه شدند. آنگاه نحوه تاثیر خصوصیات اجزای سازه‌ی ساندویچی نظیر مدول الاستیسیته هسته و ضخامت هسته بر جابجایی شعاعی و تنش برشی تیر و نیز تاثیر سرعت ضربه زننده و ضخامت هسته بر مقدار نیروی ضربه مورد بررسی قرار گرفت. مشخص گردید که با دو برابر شدن نسبت مدول الاستیسیته هسته به رویه بالایی (از ۰/۰۵ تا ۰/۱)، جابجایی هسته تنها ۰/۱ درصد کاهش می‌یابد. در حالی که با افزایش نسبت ضخامت هسته به تیر (از ۰/۱ تا ۰/۹)، جابجایی هسته تا ۶ برابر کاهش خواهد یافت.

کلمات کلیدی: تیر خمیده ساندویچی، ضربه سرعت پایین، تئوری ورق‌های ساندویچی، مدل جرم و فنر.

Dynamic Response of Curved Sandwich Beam with a Soft Flexible Core Subjected to Radial Low Velocity Impact

Faramarz Ashenai Ghasemi^{1,*}, Keramat Malekzadeh Fard² and Mohammad Ali Khalili³¹ Assoc. Professor, Faculty of Mechanical Engineering, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran² Assoc. Professor, Aerospace Research Institute, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran³ M. Sc., Faculty of Mechanical Engineering, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran

Abstract

In this paper, the dynamic response of a curved sandwich beam with soft flexible core, subjected to a radially low velocity foreign impact on the middle of top face sheet is studied. The dynamic responses which are composed of circumferential and radial displacement of the core, top and bottom face sheets, as well as the radial and shear stresses in the core layer are identified. The higher order shear deformation theory was used in the structural formulation. The two degrees of freedom mass-spring model with linearized stiffness was used for modeling of impact phenomena. In order to derive the governing equations of beam structure, the Hamilton principle was used. The results were validated and compared with the results obtained from finite element ABAQUS software and the latest available literature. The effects of some structural properties like the module of elasticity and the thickness of core layer on the displacement, shear stresses and strains were studied. Also, the effects of radius and initial velocity of the impactor on contact force history were investigated. It was seen that by multiplying by 2 of the elasticity modulus of core to upper layer ratio (from 0.05 to 0.1), the core deflection only reduces about 0.1 percent. One sees that by multiplying by 9 the core to beam thickness ratio (from 0.1 to 0.9), the core deflection reduces about 6 times.

Keywords: Sandwich Curved Beam, Low Velocity Impact, Sandwich Plate Theory, Mass-Spring Model.

* نویسنده مسئول؛ تلفکس: ۰۲۱۲۲۹۷۰۰۵۲

آدرس پست الکترونیک: f.a.ghasemi@srutu.edu

۱- مقدمه

ترکیب مناسب پوسته‌های کامپوزیتی و فوم‌های چگالی پایین، سازه‌های ساندویچی با کاربردهای جدید بوجود آورده است. داشتن خواص مناسب باعث استفاده‌ی روز افزون این نوع سازه‌ها شده است. این سازه‌ها بعلاوه جذب انرژی مناسب در مقابل وزن کم، جایگاه ویژه‌ای در صنایع هوا فضا، خودروسازی و حمل و نقل دارند.

در زمینه بارگذاری‌های ضربه‌ای و دینامیکی بر روی اجسام تحقیقات بسیار زیادی صورت گرفته است. شاید اولین آن به سال ۱۹۷۰ بر گردد که در آن سال ویتنی و پاگانو [۱]، پاسخ دینامیکی ورق مستطیلی غیر ایزوتروپیک را بررسی کردند. همچنین پاگانو [۲]، حل دقیقی برای مسائل چندلایه‌های ارتوتروپیک مستطیلی تحت بار گسترده عرضی ارائه نمود. فراستیگ و همکارانش [۳]، تئوری مرتبه بالایی را برای تیر ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر عرضی بر پایه اصول تغییرات ارائه دادند. فراستیگ [۴]، با استفاده از تئوری مرتبه بالای پانل‌های ساندویچی به بررسی کماتش پانل‌های ساندویچی پرداخت. فراستیگ و بوزهلنایا [۵]، به تحلیل ارتعاشات آزاد یک تیر خمیده ساندویچی با هسته فومی با شرایط تکیه‌گاهی ساده در دو انتها پرداختند.

فراستیگ و تامسون [۶]، ارتعاشات آزاد پانل‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر و با استفاده از مرتبه بالا را بررسی کردند. ابریت [۷،۸]، در دو مقاله جامع به بررسی و مروری کامل دینامیک ضربه و پاسخ مواد و سازه‌های کامپوزیتی به بار ضربه‌ای جرم خارجی پرداخت. اولسون [۹]، رفتار مواد را در برابر ضربه طبقه‌بندی کرد. شیواکومار و همکاران [۱۰] به بررسی پاسخ ضربه ورق‌های دایروی پرداختند. کریستوفرو و همکاران [۱۱]، به آنالیز پاسخ ضربه در ورق‌های کامپوزیتی پرداختند. سوانسون و همکاران [۱۲]، پاسخ کرنش استوانه‌های کربن اپوکسی را تحت ضربه به دو روش تحلیلی و تجربی یافتند.

خلیلی [۱۳]، به بررسی ضربه بر روی ورق‌های کامپوزیتی مستطیلی پرداخت. لی و همکاران [۱۴]، رفتار ورق ساندویچی بار رویه‌های کامپوزیت الیافی گرافیت اپوکسی با لایه چینی ۰ و

۹۰ درجه^۱ را تحت بار ضربه‌ای حاصل از یک ساچمه فولادی به قطر ۱۲/۷ میلی‌متر بررسی کردند. میجا و کیانو [۱۵]، مدل ضربه بر روی تیر ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر را با استفاده از تئوری مرتبه بالای پانل‌های ساندویچی ارائه دادند.

آشنای قاسمی و همکاران [۱۶]، پاسخ دینامیکی ورق یک‌سرگردار کامپوزیتی با لایه فلزی (FML) تحت ضربه با جرم کوچک و بزرگ با استفاده از روش حل سیستم دو درجه آزادی جرم و فنر و نرم افزار المان محدود ABAQUS را بررسی کردند. آنها نشان دادند که استفاده از ورق آلومینیومی با ضخامت کم مابین لایه‌های کامپوزیت معمولی باعث بهبود مقاومت ورق در اثر اعمال ضربه می‌شود.

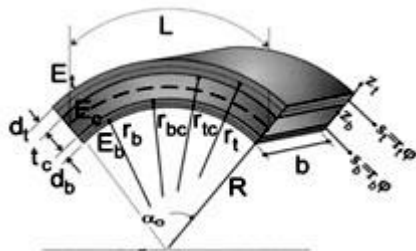
در تحلیل‌های انجام شده توسط گانگ [۱۷] (در مورد ضربه روی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی)، نسبت جرم موثر سازه برابر یک چهارم جرم کل سازه در نظر گرفته شده است. ژو و سترونج [۱۸] در سال ۲۰۰۶ نشان دادند که نسبت مزبور به شدت وابسته به نسبت سفتی برشی به سفتی خمشی سازه در محل اعمال بار ضربه‌ای است.

ایوانز و همکاران [۱۹]، پاسخ تیر ساندویچی را به ضربه با سرعت پایین با مدل تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند، آنها در این تحقیق از آنالیز ابعادی برای تعیین تاثیر پارامترهای مهم بر پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی استفاده کردند. نتایج مدل تحلیلی توافق خوبی با تست‌های ضربه با سرعت پایین در بیشترین نیروی برخورد، زمان برخورد و منحنی نیرو- زمان داشتند. در این تحقیق نشان داده شد که سفتی کلی، سفتی محلی و سرعت ضربه بیشترین تاثیر را بر نیرو و زمان برخورد دارند.

ایوانز و همکاران [۲۰] پاسخ تیر خمیده ساندویچی را تحت ضربه با سرعت پایین با استفاده از مدل المان محدود در نرم افزار ABAQUS بررسی کردند. در این تحقیق سهم هسته و رویه‌ها در جذب انرژی ناشی از ضربه مورد بررسی قرار گرفت و مشخص شد که در کمترین سرعت ضربه، هسته بیشترین سهم را در جذب انرژی دارد اما در بیشترین سرعت، این رویه‌ها بودند که بیشتر درگیر بودند. آنها برای اعتبار سنجی نتایج حل عددی از آزمایش‌های تجربی بهره بردند که توافق خوبی در

^۱.Cross-ply

مختصات محلی هسته (r, φ) ، نیز به صورت قطبی است که از مرکز انحنای تیر اندازه‌گیری می‌شود. شعاع هسته، r_t شعاع رویه بالا و r_b شعاع رویه پایین می‌باشد. L طول تیر، b عرض تیرو E_b ، E_t و E_c نیز به ترتیب مدول الاستیسیته هسته، رویه بالایی و پایینی‌اند. شرایط تکیه‌گاهی در دو سر تیر نیز از نوع ساده در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- هندسه مدل تیر [۵].

در مدل ارائه شده فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

- ۱- مقدار طول تیر در حدود انحنای تیر است، $L \leq R$. در غیر این صورت باید اثرات دوزنقه ای شدن z/r در سطح مقطع را در نظر گرفت که باعث پیچیده شدن حل مساله می‌شود.
- ۲- ضخامت صفحات، d_t و d_b که مقدار آنها در مقایسه با طول و انحنای تیر کوچک است، می‌توانند مقادیر متفاوتی داشته باشند.
- ۳- هسته با ضخامت t_c کاملاً به صفحات چسبیده است. از تنش‌های محیطی هسته صرف‌نظر شده است چرا که در سازه‌های ساندویچی مدرن از رویه‌های خیلی سفت (فلز یا کامپوزیت) و هسته‌هایی با مقاومت کم مثل فوم یا هانیکومب^۱ ساخته می‌شوند. در حالت هسته هانیکومب به عنوان یک خصوصیت هندسی سلول، سفتی دو بعدی صفحه‌ای برابر صفر است. در حالت فومی، مدول الاستیسیته هسته بسیار کوچکتر از مدول الاستیسیته رویه‌ها است. اما چون ضخامت هسته چند برابر ضخامت رویه‌هاست، می‌توان از سفتی خمشی هسته در مقایسه با رویه‌ها چشم پوشی کرد.
- ۴- در آنالیز تیر تحت بار ضربه عرضی با سرعت پایین، لایه‌ها و هسته میانی کاملاً به هم چسبیده و توابع کرنش در سطوح اتصال لایه‌ها پیوسته می‌باشند.

پیشینه نیروی برخورد، پیشینه انرژی، انرژی جذب شده و واماندگی نیر ساندویچی حاصل شد.

پایگانه و همکاران [۲۱]، پاسخ ورق کامپوزیتی با لایه فلزی FML با تکیه‌گاه‌های ثابت را تحت ضربه با سرعت پایین بررسی کردند. آنها با استفاده از سری‌های فوری و تئوری برشی مرتبه اول تغییر شکل برشی، معادلات خیز ورق و با در نظر گرفتن شرایط مرزی ورق بصورت تکیه‌گاه ساده معادلات مورد نظر را استخراج کردند. آنها نشان دادند با استفاده از لایه‌های آلومنیوم بجای لایه‌های کامپوزیتی متداول، مقاومت ضربه‌ای سازه، زمان اعمال نیرو و همچنین خیز تیر و تنش‌های اصلی بهبود می‌یابد.

با توجه به بررسی تحقیقات انجام شده موجود در مراجع تا به حال در زمینه ضربه روی تیرهای خمیده ساندویچی کار چندانی انجام نشده است. در این تحقیق، آنچه مهم است استفاده از تئوری مرتبه بالای ورق‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر در حل ضربه و جفت شدن آن با مدل جرم و فنر در تیرهای خمیده است. به این منظور، ابتدا پاسخ دینامیکی تیر خمیده ساندویچی با هسته فومی تحت بار ضربه با سرعت پایین در مرکز تیر، با شرایط تکیه‌گاه ساده در دو سر، با استفاده از تئوری مرتبه بالا، مطالعه می‌شود. برای استخراج معادلات حاکم از روش انرژی و اصل همیلتون استفاده می‌شود. معادلات حاکم بر تیر خمیده در حالت ضربه و دینامیکی به صورت مرتبط و کوپله با مدل جرم و فنر حل می‌گردد. آنگاه تأثیر پارامترهای مختلفی نظیر مدول الاستیسیته هسته و ضخامت هسته بر جابجایی شعاعی هسته و تنش برشی آن بررسی می‌شود. همچنین تأثیر پارامترهایی نظیر سرعت ضربه زننده و ضخامت هسته بر نیروی ضربه مطالعه می‌شود.

۲- تئوری مسئله

۱-۲- هندسه مسئله، روابط سینماتیکی و فرضیات

مسئله مورد بحث، تعیین میدان جابجایی و تنش یک تیر خمیده ساندویچی با هسته فومی تحت ضربه ناشی از برخورد یک گوی فولادی با آن می‌باشد. در شکل ۱، یک تیر ساندویچی خمیده، با پهنای b در نظر گرفته شده، که در آن چگونگی قرار گرفتن هسته و رویه‌ها به تصویر کشیده شده است. در تحقیق حاضر زیر نویس‌های t و b به ترتیب به رویه‌های بالایی و پایینی و c به هسته اشاره دارد [۵].

^۱.Honeycomb

در مختصات قطبی روابط سینماتیکی رویه‌ها برابر است با [۵]:

$$u_i = u_{0i} + z_i \beta_i \quad (۱)$$

$$\varepsilon_{ssi}(\varphi) = \varepsilon_{0i}(\varphi) + z_i K_i(\varphi) \quad , i = (t, b) \quad (۲)$$

$$\beta_i = \frac{u_{0i}(\varphi) + w_i(\varphi)}{r_i} \quad (۳)$$

$$\varepsilon_{0i}(\varphi) = \frac{u_i(\varphi) + w_i(\varphi)}{r_i} \quad (۴)$$

$$K_i(\varphi) = \frac{u_{0i}(\varphi) - w_i(\varphi)}{r_i^2} \quad (۵)$$

در روابطه فوق u_{0i} تغییر مکان محیطی در رویه‌ها و ε_{0i} و K_i به ترتیب مقدار کرنش در مرکز و مقدار انحنا در هر یک از رویه‌ها می‌باشد. روابط سینماتیکی در هسته نیز برابر است با [۵]:

$$\varepsilon_{rr}(r, \varphi) = w_c(r, \varphi) \quad (۶)$$

$$\gamma_{rs}(r, \varphi) = \gamma_{r\varphi}(r, \varphi) = u_c(r, \varphi) - \frac{u_c(r, \varphi)}{r} \quad (۷)$$

$$+ \frac{w_c(r, \varphi)}{r}$$

که ε_{rr} کرنش شعاعی و γ_{rs} کرنش برشی می‌باشد. شرایط سازگاری از فرض چسبندگی کامل هسته به رویه‌ها بدست می‌آید که عبارتست از:

$$\begin{aligned} r = r_{tc}: w_c = w_b, u_c = u_{0t} - (dt/2)\beta_t \\ r = r_{bc}: w_c = w_b, u_c = u_{0b} + (db/2)\beta_b \end{aligned} \quad (۸)$$

تنش در اجزا تیر در شکل ۳ نشان داده شده است. روابط تنش-کرنش برای رویه‌ها و هسته در معادلات (۹) بیان شده است که σ_c و τ_c به ترتیب تنش شعاعی و برشی در هسته، σ_t و σ_b به ترتیب تنش شعاعی در رویه بالا و پایین می‌باشند. روابط تنش-کرنش برای رویه‌ها و هسته عبارت است از [۵]:

$$\begin{aligned} \tau_c = G_c \gamma_c, \sigma_c = E_c \varepsilon_c, \\ \sigma_t = E_t \varepsilon_t, \sigma_b = E_b \varepsilon_b \end{aligned} \quad (۹)$$

۵- به جهت استفاده از حل تحلیلی و استفاده از سری‌های فوریه، در فرمول‌بندی، لایه‌چینی در تیر، متقارن و بالانس در نظر گرفته شده است. در غیر این صورت باز میتوان معادلات حاکم بر سیستم را بدست آورد و حل نمود، ولی به علت ایجاد جفت شدن معادلات، باید از حل عددی استفاده کرد.

۶- ضربه عرضی توسط ضربه‌زننده کروی، الاستیک و ایزوتروپیک بطور عمود بر سطح رویه بالایی تیر و در وسط آن در نظر گرفته می‌شود. همچنین سفتی ضربه زننده نسبت به تیر بزرگ فرض می‌شود. در غیر این صورت باید میزان تغییر شکل و فرو رفتگی در ضربه زننده را هم در نظر گرفت و این موضوع به این معنا است که باید معادلات دیفرانسیل دینامیکی پاره‌ای حاکم بر ضربه زننده الاستیک را هم به صورت توأم با معادلات دینامیکی تیر حل کرد. در این حالت نمیتوان به طور ساده از مدل‌های جرم و فنر معادل بهره برد. پس باید معادلات جفت شده غیر خطی حاکم بر سیستم را به روش عددی حل نمود.

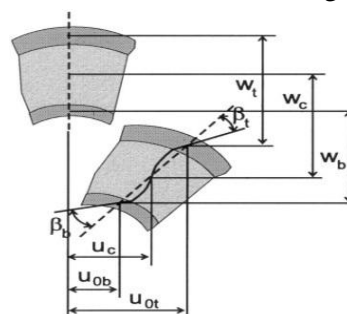
۷- از اثر اصطکاک در هنگام برخورد ضربه زننده با تیر در آنالیز دینامیکی تیر صرف‌نظر می‌شود.

۸- تیر ساندویچی، دارای سطح مقطع مستطیلی است (دارای دو رویه با سه لایه‌ی کامپوزیتی و یک هسته میانی انعطاف‌پذیر از جنس فوم می‌باشد).

۹- در آنالیز دینامیکی تیر، تغییر مکان‌ها کوچک و آنالیز در محدوده الاستیک خطی مورد نظر می‌باشد.

۱۰- هیچ فرض اولیه‌ای برای جابجایی در راستای ضخامت در هسته انجام نشده است.

جابجایی‌های شعاعی (w_b, w_t) و مماسی (u_{0b}, u_{0t}) مرکز رویه‌ها در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- میدان‌های جابجایی هسته و برخی پارامترهای

تیر [۵].

تعدادل هسته، مشخص می‌شود. روابط خطی برای جابجایی‌های شعاعی و محیطی هسته عبارتند از:

$$w_c(r, \varphi, t) = [w_t(\varphi, t) - w_b(\varphi, t)] \frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}} \quad (14)$$

$$+ w_b(\varphi, t)$$

$$u_c(r, \varphi, t) = [u_t^t(\varphi, t) - u_c^b(\varphi, t)] \quad (15)$$

$$\frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}} u_c^b(\varphi, t)$$

که با لحاظ کردن شرایط سازگاری هسته با رویه‌ها شتاب محیطی و شعاعی هسته عبارت می‌شود از:

$$\ddot{w}_c = (\ddot{w}_t - \ddot{w}_b) \frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}} + \ddot{w}_b \quad (16)$$

$$\ddot{u}_c = \ddot{u}_{0t} \left(1 - \frac{d_t}{2r_t}\right) \left(\frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}}\right) + \ddot{u}_{0b} \left(1 + \frac{d_b}{2r_b}\right) \left(1 - \frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}}\right) +$$

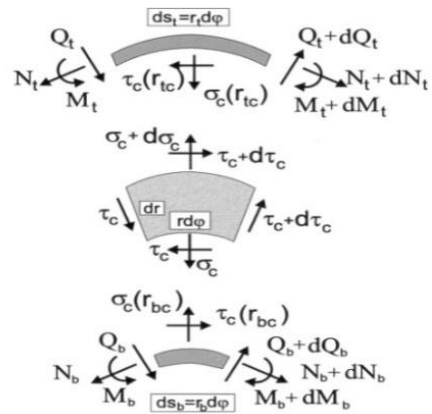
$$\ddot{w}_{t,\varphi} \frac{d_t}{2r_t} \left(\frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}}\right) \quad (17)$$

$$- \ddot{w}_{b,\varphi} \frac{d_b}{2r_b} \left(1 - \frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}}\right)$$

۲-۲- مدل کردن نیروی ضربه

شکل ۴ برخورد بین تیر و ضربه‌زننده را به تصویر می‌کشد. در ابتدا و انتهای تیر و بر رویه‌های بالا و پایین شرایط تکیه‌گاهی لولا اعمال شده است. با توجه به نرم بودن نسبی هسته میانی نسبت به رویه‌ها، شرایط مرزی دو سر لولا در رویه‌های بالایی و پایینی در نظر گرفته می‌شود [۱۰].

در ابتدا و انتهای تیر و بر رویه‌های بالا و پایین شرایط تکیه‌گاهی ساده اعمال شده است. ضربه توسط یک ضربه‌زننده کروی به شعاع ۱۲/۷ میلیمتر، جرم ۰/۵ کیلوگرم و سرعت اولیه ۳ متر بر ثانیه و در برخورد با رویه بالا به صورت شعاعی ایجاد می‌گردد. شایان ذکر است که محل برخورد در وسط رویه بالا می‌باشد. در این تحقیق از روش جرم و فنر دو درجه آزادی برای مدل کردن ضربه استفاده شده که در ادامه بدان پرداخته می‌شود.



شکل ۳- تنش‌های وارد بر تیر [۵].

نیرو و گشتاور خمشی در صفحه، برای رویه‌ها عبارتست از:

$$N_i = \int_{-d_t/2}^{d_t/2} \sigma_i dZ \quad (10)$$

$$M_i = \int_{-d_t/2}^{d_t/2} \sigma_i Z dZ \quad (11)$$

روابط اساسی با فرض رفتار مواد به صورت ایزوتروپ در هسته میانی و کامپوزیت لایه‌ای با لایه چینی متقارن در رویه‌ها به دست می‌آیند. بنابراین روابط صفحه‌ای برابر است با:

$$N_i = EA_i \frac{u_{0i,\varphi} + w_i}{r_i} \quad (12)$$

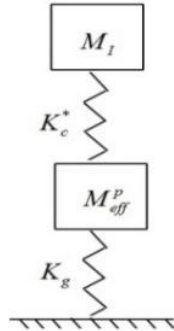
$$M_i = EI_i \frac{u_{0i,\varphi} + w_{i,\varphi\varphi}}{r_i^2} \quad (13)$$

که EI_i و EA_i در حالت کامپوزیت لایه‌ای به ترتیب همان A_{11i} و D_{11i} ، سفتی‌های محوری و خمشی در رویه بالا و پایین هستند.

انرژی سینماتیک تیر ساندویچی وابسته به مولفه‌های سرعت و شتاب می‌باشد [۱۰]. در رویه‌ها از روابط جابجایی در طول ضخامت و طبق معادلات (۱) الی (۵) استفاده می‌شود. اگر توزیع بارها یکنواخت باشد در حالت عمومی، توزیع جابجایی در ضخامت هسته خیلی نزدیک به توزیع خطی می‌باشد و اگر بارها متمرکز یا محلی باشند توزیع غیرخطی می‌شود [۱۰].

توجه کنید که این میدان جابجایی فقط برای تعیین انرژی جنبشی مورد استفاده قرار می‌گیرد و وقتی که توزیع غیرخطی باشد، میدان جابجایی در هسته از حل معادله

واحد در محل اصابت ضربه‌زننده است. چون ضربه‌زننده‌ها می‌توانند در نقاط مختلفی به سازه برخورد کنند، رابطه حاضر توانایی محاسبه سفتی سازه را در هر نقطه‌ای دارد.



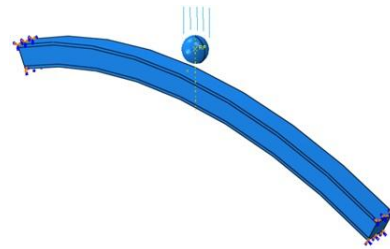
شکل ۵- مدل جرم و فنر دو درجه آزادی.

۲-۳- محاسبه‌ی جرم موثر پوسته (M_{eff}^P)

سوانسون [۱۹] در سال ۱۹۹۲ نشان داد که نسبت جرم موثر سازه به کل جرم آن به نوع سازه مانند شکل هندسی سازه و ضخامت جداره سازه، محل اعمال بار، شرایط مرزی و ناهمسانگردی خواص ماده بستگی دارد. او نسبت جرم موثر سازه به کل جرم آن را به طور تقریبی برای تیرهای دو سرگیردار 0.375 و برای تیرهای دو سر لولا 0.5 تخمین زد. در این مقاله هم برای تیر ساندویچی دو سر لولا نسبت 0.5 اختصاص یافته است. وی مقدار این نسبت‌ها را در مورد ورق‌ها تقریباً نصف مقدار این نسبت‌ها در مورد تیرها با همین شرایط مرزی در نظر گرفت. سوانسون یک رابطه‌ی تقریبی و ساده برای محاسبه‌ی جرم موثر سازه‌های کامپوزیتی به صورت زیر ارائه داد:

$$M_{eff}^P = \frac{K}{\omega_f^2} \quad (20)$$

در رابطه‌ی (۲۰)، ω_f کوچکترین فرکانس طبیعی سازه است که از حل ارتعاشات آزاد بدست می‌آید. برای این منظور کافی است معادلات پاره‌ای حاکم بر تیر خمیده در حالت ارتعاشات آزاد حل گردیده و فرکانس طبیعی پایه بدست آید. در این مقاله توسط کد محاسباتی نوشته شده توسط همین محققین، این کار انجام گرفته است. بنابراین یکی از نوآوری‌های فرمولبندی حاضر بکاربردن یک حل جفت شده برای حل مسئله ضربه است که در آن نیروی ضربه ورودی در معادلات دینامیکی سیستم، خود وابسته به فرکانس طبیعی



شکل ۴- برخورد ضربه‌زننده گروی با تیر خمیده ساندویچی.

یکی از روش‌های بدست آوردن تاریخچه نیرو، استفاده از مدل جرم و فنر می‌باشد که در سال ۱۹۸۵ توسط شیواکومار و همکاران [۱۰] ارائه شده، که در واقع گسترش یافته مدل جرم و فنر لی [۱۴] می‌باشد که به منظور محاسبه تاریخچه نیروی ضربه روی یک تیر پیشنهاد شده بود. البته بعد از او هم مدل‌هایی با یک، دو و سه درجه آزادی با افزودن فنر و دمپر ارائه شده که پایه و اساس همه آنها مدل دو درجه آزادی شیواکومار است.

در مدل جرم و فنر، ضربه زننده و جسم هدف به ترتیب با جرم‌های M_I و M_P ، میزان فرورفتگی ضربه زننده در جسم هدف توسط یک فنر به سفتی K_c و تغییر شکل عرضی جسم هدف با فنرهایی به سفتی غشایی K_m ، سفتی خمشی K_b و سفتی برشی K_s نشان داده می‌شود. در مدل شیواکومار [۱۰]، سفتی کل جسم هدف به صورت زیر می‌باشد:

$$K_g = K_m + \frac{K_b K_s}{K_b + K_s} \quad (18)$$

شکل ۵، نشان دهنده مدل جرم و فنر است. M_I و M_{eff}^P به ترتیب جرم ضربه زننده و جرم موثر سازه (شامل انواع سازه‌های کامپوزیتی، هدفمند و ساندویچی) می‌باشد. در رابطه (۱۸)، K_m سفتی معادل غشایی، K_b سفتی معادل خمشی و K_s سفتی معادل برشی تیر خمیده ساندویچی در محل برخورد می‌باشند که در مرجع [۱۰] بیان شده‌اند و در شکل ۵ معادل آنها یعنی K_g آورده شده است.

در شکل ۵، K_c سفتی تماسی و K_c^* سفتی تماسی خطی شده هستند و K_g سفتی معادل سازه در زیر نقطه ضربه زننده می‌باشد که به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$k_g = \frac{1}{\delta_l}, \delta_l = w(x,y) \quad (19)$$

در رابطه (۱۹)، δ_l همان خیز بدست آمده از تحلیل استاتیکی در نقطه‌ی زیرین مرکز اعمال بار در اثر نیروی

$$M_I \ddot{Z}_2 + k_c^*(Z_1 - Z_2) = 0 \quad (27)$$

شرایط اولیه‌ی معادله (۲۷) به صورت زیر می‌باشد:

$$Z_1(t=0) = 0; Z_2(t=0) = 0 \\ \dot{Z}_1(t=0) = 0; \dot{Z}_2(t=0) = V \quad (28)$$

پس از حل معادلات (۲۷) و جایگذاری $Z_1(t)$ و $Z_2(t)$ در رابطه (۲۵)، عبارت نیرو به شکل رابطه (۲۹) تعیین می‌شود:

$$F(t) = \frac{k_c^*}{(\varphi_2 - \varphi_1)} \left[\frac{1 - \varphi_2}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) - \frac{1 - \varphi_1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] \quad (29)$$

در رابطه (۲۹)، φ_1 ، φ_2 ، ω_1 و ω_2 به ترتیب در روابط (۳۰) تا (۳۳) بیان گردیده‌اند:

$$\varphi_1 = \frac{k_c^*}{k_c^* - M_I \omega_1^2} \quad (30)$$

$$\varphi_2 = \frac{k_c^*}{k_c^* - M_I \omega_2^2} \quad (31)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \frac{(N+1)k_c^* + k_g}{NM_I} - \sqrt{\left(\frac{(N+1)k_c^* + k_g}{NM_I} \right)^2 - 4 \frac{k_c^* k_g}{NM_I}} \quad (32)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \frac{(N+1)k_c^* + k_g}{NM_I} + \sqrt{\left(\frac{(N+1)k_c^* + k_g}{NM_I} \right)^2 - 4 \frac{k_c^* k_g}{NM_I}} \quad (33)$$

در رابطه (۳۲) و (۳۳) مقدار N برابر با رابطه زیر است:

$$N = \frac{M_{eff}^p}{M_I} \quad (34)$$

۲-۴- استخراج معادلات حاکم بر تیر خمیده

استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی بر اساس اصل همپلتون و با مینیمم کردن لاگرانژین سیستم تغییرشکل یافته می‌باشد:

$$\int_{t_2}^{t_1} (T + U + W) dt = 0 \quad (35)$$

پایه سیستم است. در تیر خمیده این تکنیک برای اولین بار در این مقاله استفاده شده است.

تغییر شکل تماسی بین ضربه زننده و هدف به صورت زیر می‌باشد [۱۰]:

$$\delta(t) = Z_1(t) - Z_2(t) \quad (21)$$

$Z_1(t)$ و $Z_2(t)$ به ترتیب جابجایی سازه‌ی مورد برخورد (در سازه‌های ساندویچی روبه‌ی مورد برخورد می‌باشد) و ضربه زننده را در لحظه t در نقطه برخورد نشان می‌دهند.

برای بدست آوردن نیروی تماسی ایجاد شده، از قانون تماس هرگز استفاده می‌شود که رابطه آن به شکل زیر است:

$$F(t) = k_c \delta^n \quad (22)$$

که در آن n برابر ۱/۵ می‌باشد. همچنین k_c به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$k_c = \delta^n \frac{3 \sqrt{R}}{4 \pi (k_1 + k_2)} \quad (23)$$

که در آن k_1 و k_2 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}, i = 1, 2 \quad (24)$$

در رابطه (۲۴)، E_i و ν_i به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون ضربه‌زننده و سازه‌ی مورد برخورد می‌باشد.

در مسئله حاضر از فرم خطی شده قانون هرگز استفاده می‌شود. بنابراین برای ایجاد تغییرشکل تماسی خطی یا به عبارتی نیروی تماسی خطی میان هدف و ضربه‌زننده، لازم است که سفتی تماسی خطی شده K_c^* معرفی شود. بنابراین نیروی تماسی خطی مطابق زیر می‌تواند، نوشته شود.

$$F(t) = k_c^* (Z_1(t) - Z_2(t)) \quad (25)$$

چوی و همکاران [۲۰]، سفتی تماسی خطی شده را به صورت زیر ارائه کرده‌اند:

$$k_c^* = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^{\frac{2(n+1)}{n+1}} \quad (26)$$

$$\left(\frac{N}{N+1} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} \cdot \nu^{\frac{2(n+1)}{n+1}} \cdot k_c^{\frac{2}{n+1}} \cdot M_I^{\frac{n-1}{n+1}}$$

برای مشخص شدن نیروی تماس باید معادلات حرکت حاکم بر سیستم جرم و فنر (شکل ۵) تعیین شود. این معادلات به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$M_p \ddot{Z}_1 + k_g Z_1 + k_c^* (Z_1 - Z_2) = 0$$

در رابطه (۳۵)، U و W به ترتیب انرژی‌های جنبشی، داخلی و کار نیروی خارجی δ عملگر تغییراتی باشد، با فرض صفر بودن میدان جابجایی مجازی در محدوده زمانی t_1 و t_2 اقدام به استخراج معادلات می‌شود:

$$\delta T = \int_{t_1}^{t_2} \int [\rho_t (\ddot{u}_t \delta u_t + \dot{w}_t \delta w_t) dv_t + \int \rho_b (\ddot{u}_b \delta u_b + \dot{w}_b \delta w_b) dv_b - \int \rho_c (\ddot{u}_c \delta u_c + \dot{w}_c \delta w_c) dv_c] dt \quad (۳۶)$$

$$\delta U = \int_{t_1}^{t_2} \int [\sigma_t \delta \epsilon_t dv_t + \int \sigma_b \delta \epsilon_b dv_b + \int (\tau_{rs} \delta \gamma_{rs} + \sigma_{rr} \delta \epsilon_{rr}) dv_c] dt \quad (۳۷)$$

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \int [F(\varphi, t) \delta w_t] dv dt \quad (۳۸)$$

در رابطه (۳۸)، $F(\varphi, t)$ برابر است با $[1 \cdot 0]$:

$$F(\varphi, t) = \sum_{m=1}^M Q_m(t) \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right) \quad (۳۹)$$

مقدار Q_m در رابطه (۳۹)، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$Q_m(t) = \sum_{m=1}^M b_m \sin\left(\frac{m\pi}{T} t\right) \quad (۴۰)$$

در رابطه (۴۰)، b_m برابر است با:

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T F_c(t) \sin\left(\frac{m\pi}{T} t\right) dt \quad (۴۱)$$

مقدار $F_c(t)$ در رابطه (۴۱)، از رابطه (۲۹) بدست می‌آید.

برای حداقل کردن لاگرانژین سیستم تغییرشکل یافته از روابط سینماتیکی، شرایط سازگاری، روابط نیرو، گشتاور و شتاب در هسته استفاده شده است. با برابر صفر قرار دادن ضرایب مجهولات w_t ، w_b ، u_{ot} ، u_{ob} ، u_c و w_c و معادلات حاکم بر تیر خمیده ساندویچی به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$2\tau_c + (\pi_c)_{,r} = 0 \quad (۴۲)$$

$$\tau_{c,\varphi} + r\sigma_{rr,r} + \sigma_{rr} = 0 \quad (۴۳)$$

$$\begin{aligned} & \frac{A}{r_t} \frac{11t}{t} u_{0t,\varphi\varphi} + \frac{A}{r_t} \frac{11t}{t} w_t - \frac{D}{r_t^3} \frac{11t}{t} u_{0t,\varphi\varphi\varphi} \\ & + k \frac{k}{t} \frac{k}{b} \frac{k}{2} \ddot{w}_{b,\varphi\varphi} + \frac{D}{r_t^3} \frac{11t}{t} w_{t,\varphi\varphi\varphi\varphi} \\ & - br \frac{k}{tc} \frac{k}{t} \frac{\tau}{c} (r=r_{tc}) \\ & + br \frac{\sigma}{tc} \frac{rr}{rr} (r=r_{tc}) - k \frac{(1+k_b)k}{t} \frac{\ddot{u}}{2} u_{0b,\varphi} \\ & + k \frac{\dot{w}}{2} u_{b,\varphi} + (m \frac{r}{t} + k \frac{J}{t}) \ddot{w}_t + br \frac{d}{t} F(t,\varphi) \\ & - (k \frac{2}{t} \frac{k}{1} + J \frac{J}{t}) \ddot{w}_{t,\varphi\varphi} - (k \frac{(1-k_t)k}{t} \frac{J}{1} - J \frac{J}{t}) u_{0t,\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (۴۴)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{A}{r_b} \frac{11b}{b} u_{0b,\varphi\varphi} - \frac{A}{r_b} \frac{11b}{b} w_{b,\varphi} - (k_b \frac{(1-k_b)k}{b}) \frac{\ddot{u}}{3} \\ & + J \frac{\dot{w}}{b} u_{b,\varphi} - \frac{D}{r_b^3} \frac{11t}{t} u_{0b,\varphi\varphi\varphi} + \frac{D}{r_b^3} \frac{11b}{b} w_{t,\varphi\varphi\varphi\varphi} \\ & + br \frac{(1-k_t)\tau}{bc} (r=r_{bc}) + (1-k_t) \frac{(1+k_b)k}{t} \frac{\ddot{u}}{2} u_{0t} \\ & + (k \frac{(1+k_b)k}{t}) \frac{\ddot{w}}{2} u_{t,\varphi} \\ & + (m \frac{r}{b} + J \frac{J}{b} + (1-k_b) \frac{2}{b}) \frac{\ddot{u}}{3} u_{0b} = 0 \end{aligned} \quad (۴۵)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{A}{r_t} \frac{11t}{t} u_{0t,\varphi\varphi} + \frac{A}{r_t} \frac{11t}{t} w_{t,\varphi} - \frac{D}{r_t^3} \frac{11t}{t} u_{0t,\varphi\varphi\varphi} \\ & + \frac{D}{r_t^3} \frac{11t}{t} w_{t,\varphi\varphi\varphi\varphi} + br \frac{(1-k_t)\tau}{tc} (r=r_{tc}) \\ & + (m \frac{r}{t} + J \frac{J}{t} + (1-k_t) \frac{2}{t}) \frac{\ddot{u}}{3} u_{0t} \\ & + (1-k_t) \frac{(1+k_b)k}{t} \frac{\ddot{u}}{2} u_{0b} + (k \frac{(1-k_t)k}{t} \frac{J}{1} - J \frac{J}{t}) \ddot{w}_{t,\varphi} \\ & - k \frac{(1-k_t)k}{b} \frac{\ddot{w}}{2} u_{b,\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (۴۶)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{r}{r^2} \tau_{t,\varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{w_b - w_t}{\tau_{t,\varphi} \ln \frac{r_{bc}}{r_{tc}}} - \frac{r_{tc}^2 \left(\frac{1}{r_{tc}} - \frac{1}{r_{bc}} \right)}{\ln \frac{r_{bc}}{r_{tc}}} \right) \tau_{t,\varphi} \quad (50)$$

در روابط (۴۹) و (۵۰)، τ_t بیانگر تنش برشی هسته در محل اتصال هسته میانی به رویه بالا می‌باشد. پس از بدست آمدن تنش‌های برشی و شعاعی در هسته، با کمک رابطه (۱۴) و (۱۵)، جابجایی‌های شعاعی و مماسی هسته به شکل زیر محاسبه می‌گردند:

$$w_c(r,\varphi) = w_b + \frac{\tau_{t,\varphi}}{E_c} \left[\frac{1}{r_{bc}} - \frac{1}{r} + k_0 \frac{r_{tc}}{\ln \frac{r_{bc}}{r_{tc}}} \right] + (w_b - w_t) \frac{\ln \frac{r}{r_{tc}}}{\ln \frac{r_{bc}}{r_{tc}}} \quad (51)$$

$$u_c(r,\varphi) = \frac{r}{r_{tc}} (1 - k_t) u_{0t} + \frac{r}{r_{tc}} k_t w_{t,\varphi} + (1 - \frac{r}{r_{tc}}) w_{b,\varphi} + \left[\frac{r_{tc} - r}{r_{tc} \ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} + \frac{\ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right] + \frac{r}{r_{tc}} \left[(w_{b,\varphi} - w_{t,\varphi}) - \frac{\tau_{t,\varphi}}{2G_c} \left(\frac{r_{tc}^2 - r^2}{r_{tc}^2 r} \right) + \frac{\tau_{t,\varphi}}{E_c} \frac{r_{tc} - r}{r_{tc} r_{bc}} \right] - \left(\frac{r_{tc}^2 - r^2}{r_{tc}^2 r} \right) + k_0 \left[\frac{r_{tc} - r}{r_{tc} \ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} + \frac{\ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} + \frac{r}{r_{tc}} \right] \quad (52)$$

برای تعیین مجهولات باقی مانده در معادلات یعنی $w_t, w_b, u_{0t}, u_{ob}, \tau, \sigma_{rr}$ می‌توان آنها را به شکل سری فوریه و با نمایش تغییرات متغیرهای وابسته در جهت φ به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} & \frac{A_{11b}}{r_b} u_{0b,\varphi} + \frac{A_{11b}}{r_b} w_b - \frac{D_{11b}}{r_b^3} u_{0t,\varphi\varphi\varphi} \\ & + \frac{D_{11b}}{r_b^3} w_{b,\varphi\varphi\varphi} - br_{bc} k_b \tau_{c,\varphi}(r=r_{bc}) \\ & - br_{bc} \sigma_{rr}(r=r_{bc}) + (m_b r_b + k_3) \ddot{w}_b \\ & + k_2 \ddot{w}_t + k_b (1 - k_t) k_2 \ddot{u}_{0t,\varphi} \\ & + (k_b (1 + k_b) k_3 + J_b) u_{0b,\varphi} \\ & - (k_b^2 k_3 + J_b) \ddot{w}_{b,\varphi\varphi} + k_b k_t k_2 \ddot{w}_{t,\varphi\varphi} = 0 \quad (47) \\ & (1 - k_t) u_{0t} - \frac{r_{tc}}{r_{bc}} (1 + k_b) u_{0b} - [(1 - k_t) + \frac{k_0 r_{tc}}{\ln \frac{r_{bc}}{r_{tc}}}] w_{t,\varphi} \\ & + \frac{r_{tc}}{r_{bc}} [(1 + k_b) + \frac{k_0 r_{bc}}{\ln \frac{r_{bc}}{r_{tc}}}] w_{b,\varphi} - \tau \frac{k_0}{2G_c} \frac{r_{tc} + r_{bc}}{r_{bc}} \\ & + \tau_{\varphi\varphi} \frac{k_0}{2E_c} \left[\frac{r_{tc} + r_{bc}}{r_{bc}} + 2k_0 \frac{r_{tc}}{\ln \frac{r_{bc}}{r_{tc}}} \right] J = 0 \quad (48) \end{aligned}$$

۵-۲- روش حل مسئله

با دقت در محاسبات انجام شده مشخص است که هفت مجهول در معادلات وجود دارد که شامل $\tau_c, \sigma_{rr}, \tau, u_{0t}, u_{ob}, w_t, w_b$ معادلات حاکم و روش حلی که در ادامه بیان می‌گردد این مجهولات بدست می‌آیند. برای تعیین تنش برشی و شعاعی در هسته از روابط (۴۲) و (۴۳) استفاده می‌شود. این روابط از نوع معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول هستند که با استفاده از روش جداسازی متغیرها بدست می‌آیند:

$$\tau_c = \frac{\tau(\varphi) r_{tc}^2}{r^2} \quad (49)$$

پوسته‌ای^۳، هسته تیر ساندویچی به صورت فوم همگن^۴ و ضربه زننده به‌صورت جسم صلب^۵ مدل شده‌اند. خواص رویه‌های بالا و پایین طبق جدول ۱ در نرم افزار وارد شده است.

اجزای تیر ساندویچی و ضربه‌زننده در ادامه باید مونتاژ گردند. لازم به توضیح است که رویه‌های بالا و پایین با استفاده از گره^۶ به هسته متصل شده‌اند. واضح است که بین سطح بیرونی ضربه زننده و رویه بالا باید از قید تماس استفاده گردد. برای مدل کردن تماس، تعدادی قانون تماس وجود دارد که می‌توانند در آباکوس بکار برده شود. در تحقیق حاضر فاصله بین سطح ضربه‌زننده و سطح بالایی رویه بالا صفر فرض شده و از قانون تماس هرگز برای بیان رفتار دینامیکی ضربه استفاده شده است. حال با مونتاژ سازه ساندویچی و ضربه‌زننده، لازم است که شرایط مرزی به روی تیر ساندویچی و ضربه‌زننده اعمال شود. به منظور تعریف شرایط مرزی از سیستم مختصات قطبی استفاده شده است. با توجه به اینکه هسته دارای چگالی بسیار پایینی نسبت به رویه‌ها بوده و در واقع فوم می‌باشد، لذا شرایط تکیه‌گاهی برای آن اعمال نشده بلکه شرایط تکیه‌گاهی مفصلی فقط بر روی رویه‌های بالا و پایین اعمال می‌گردد.

به منظور تعریف شرایط مرزی برای ضربه‌زننده، حرکت چرخشی ضربه‌زننده در همه جهتها مقید شده و همچنین به جزء مختصه در راستای حرکت (بردار عمود بر تیر ساندویچی) بقیه مختصه‌های حرکت نیز مقید می‌باشد. سرعت اولیه ضربه‌زننده بر روی نقطه مرجع که در قسمت مدل‌سازی مرکز گوی تعریف شده است اعمال می‌گردد. بعلاوه در مورد جسم صلب چون هیچ خواصی به جز جرم به آن تعلق نمی‌گیرد، بنابراین جرم ضربه‌زننده نیز در نقطه‌ی مرجع اعمال می‌شود. پس از مونتاژ تیر و ضربه‌زننده نوبت به مش‌بندی سازه می‌رسد، مش‌بندی در نرم‌افزارهای المان‌محدود شبیه آباکوس به منظور تقسیم سازه به المان‌های ریزتر و حل معادله حاکم در این ناحیه‌ها و مونتاژ کردن نهایی معادلات می‌باشد.

$$w_t(t, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_{wt}^m(t) \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha_0} \varphi\right) \quad (53)$$

$$w_b(t, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_{wb}^m(t) \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha_0} \varphi\right) \quad (54)$$

$$u_{0t}(t, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_{ut}^m(t) \cos\left(\frac{m\pi}{\alpha_0} \varphi\right) \quad (55)$$

$$u_{0b}(t, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_{ub}^m(t) \cos\left(\frac{m\pi}{\alpha_0} \varphi\right) \quad (56)$$

$$\tau(t, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_{\tau}^m(t) \cos\left(\frac{m\pi}{\alpha_0} \varphi\right) \quad (57)$$

در روابط (۵۳) تا (۵۷)، m اندیسی برای طول موج سری فوریه و M تعداد عبارتهای سری فوریه می‌باشد. ضرایب فوریه C_{wt} ، C_{wb} ، C_{ut} ، C_{ub} و C_{τ} ثوابت زمانی هستند که باید محاسبه شوند. برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار تیر خمیده ساندویچی، پس از جایگذاری توابع فرض شده (سری‌های فوریه) در معادلات حاکم، آنها را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$[M]\ddot{C}_m(t) + [K]C_m(t) = Q_m(t) \quad (58)$$

مقادیر ماتریس‌های M ، K و Q در رابطه (۵۸)، در مرجع [۵] ارائه شده‌اند. برای حل معادله فوق از نرم افزار متلب^۱ و دستور ODE45 استفاده گردیده است. پس از مشخص شدن ضرایب زمانی، با جایگذاری این ضرایب در روابط (۵۳) تا (۵۷) و بسط سری فوریه مجهولات ذکر شده تعیین می‌گردند.

۳- شبیه‌سازی تیر خمیده تحت ضربه در آباکوس^۲

در این بخش چگونگی شبیه‌سازی یک تیر ساندویچی تحت ضربه یک ضربه‌زننده کروی در وسط تیر بیان می‌شود. در تحقیق حاضر رویه‌های بالا و پایین به صورت المان

³.Shell

⁴.Solid

⁵.Rigid body

⁶.Tie

¹.MATLAB

².ABAQUS

مدل‌های ارائه شده خوب و دقت نتایج بالا می‌باشد. اختلاف موجود در نتایج نیز به خاطر تئوری‌های مورد استفاده در این مقاله و مرجع [۱۵] است، زیرا در مرجع ذکر شده معادلات حاکم با استفاده از تئوری دو بعدی استخراج گردیده‌اند.

ب: با توجه به نبود تحقیق در زمینه تحلیل ضربه بر روی تیر خمیده ساندویچی در مراجع، در اینجا به منظور صحت‌گذاری در تحلیل ضربه، از نرم افزار ABAQUS استفاده می‌گردد. در این حالت خواص هندسی و مادی ضربه‌زننده و تیر مطابق با جداول ۵ الی ۷ در نظر گرفته می‌شود. در تحقیق حاضر، رویه‌های بالایی و پایینی به صورت المان پوسته‌ای^۲، هسته تیر ساندویچی به صورت فوم همگن^۳ و ضربه زننده به صورت جسم صلب^۴ مدل شده‌اند. ضربه روی سطح بالایی در وسط تیر وارد شده است. رویه‌های بالایی و پایینی با استفاده از گره^۵ به هسته متصل شده‌اند [۲۴].

جدول ۱- خصوصیات مکانیکی تیر ساندویچی [۱۵].

مدول یانگ (GPa)	ضرب پواسون	مدول برشی (GPa)	دانسیته (kg/m ³)	
۰/۱۰۵	۰/۲۸۶	۰/۰۴	۱۱۰	هسته
E ₁₁ =۱۳۸	ν ₁₁ =۰/۲۱	G ₁₁ =۵/۹	۱۵۵۰	رویه‌ها
E ₂₂ =۱۴/۵	ν ₁₃ =۰/۲۱	G ₁₃ =۵/۹		(گرافیت-)
E ₃₃ =۱۴/۵	ν ₂₃ =۰/۲۱	G ₂₃ =۵/۹		(اپوکسی)

جدول ۲- خصوصیات هندسی تیر [۱۵].

ضخامت (mm)	هسته	رویه
۲۵	۲۵	۳
(mm)	۱۰۰	۱۰۰
طول (mm)	۴۷۱	۴۷۱

جدول ۳- خصوصیات مکانیکی و هندسی ضربه‌زننده [۱۵].

مدول یانگ (GPa)	۲۰۷
ضرب پواسون	۰/۳
مدول برشی (GPa)	۷۸
جرم (kg)	۰/۵
شعاع (mm)	۱۲/۷

در مسائل ضربه یک جسم خارجی با جسم هدف برخورد می‌کند، لذا در ناحیه تماس المان‌ها باید به قدر کافی ریز باشند که نتایج قابل قبولی حاصل گردد. در تحقیق حاضر از المان CPS4R برای مش بندی رویه‌ها و از المان CPS8R برای مش بندی هسته استفاده گردیده است.

۴- نتایج و بحث

۴-۱ صحت‌سنجی

صحت‌سنجی در دو قسمت الف و ب انجام می‌شود:

الف: برای صحت‌سنجی نتایج ابتدا یک تیر تخت را در نظر بگیرید. خصوصیات مکانیکی و هندسی تیر در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده است، همچنین خصوصیات مکانیکی و هندسی ضربه‌زننده در جدول ۳ مشاهده می‌شود [۱۵]. در جدول ۴ نیز تعداد لایه‌ها و زاویه آنها در رویه‌های بالایی و پایینی آورده شده است. در حالت تیر تخت (تیر با شعاع بینهایت) مقایسه نتایج، با نتایج بدست آمده از مرجع [۱۵] و نیز با نتایج بدست آمده از روش المان محدود انجام شده است.

در شکل ۶ الف نتایج مربوط به آنالیز تاریخچه جابجایی هسته حاصل از دو روش (حل تحلیلی و مدلسازی در آباکوس) با هم، و همچنین با نتایج دو مدل تحلیلی و المان محدود LS-DYNA، موجود در مرجع [۱۵]، مقایسه گردیده‌اند.

نتایج نشان می‌دهد که اختلافی بین دو مدل تحلیلی و المان محدود آباکوس^۱ دیده می‌شود، اما نتایج تحلیلی مقاله حاضر به نتایج تحلیلی مرجع [۱۵] نزدیکتر می‌باشد. مقدار بیشینه خیز به وجود آمده از تحلیل حاضر ۰/۰۰۸۱۲ متر بوده که دارای ۶/۷ درصد اختلاف با روش تحلیلی مرجع [۱۵] و ۱۱/۶ درصد اختلاف با مدل المان محدود مرجع مزبور بوده که مقدار قابل قبولی است.

همچنین خیز ماکزیمم از مدل آباکوس برابر ۰/۰۰۹۱۸ متر می‌باشد که این مقدار نیز دارای ۵/۴ درصد اختلاف با مدل تحلیلی مرجع [۱۵] و ۷ درصد اختلاف با مدل المان محدود مرجع ذکر شده بوده و مقدار قابل قبولی است. بنابراین در حالت کلی می‌توان گفت که صحت‌سنجی

^۱. ABAQUS

^۲. Shell

^۳. Solid

^۴. Rigid body

^۵. Tie

محور زمان در لحظه نیروی حداکثر داشته و تطابق مناسبی نیز دارند.

جدول ۵ خصوصیات مکانیکی تیر ساندویچی [۲۴].

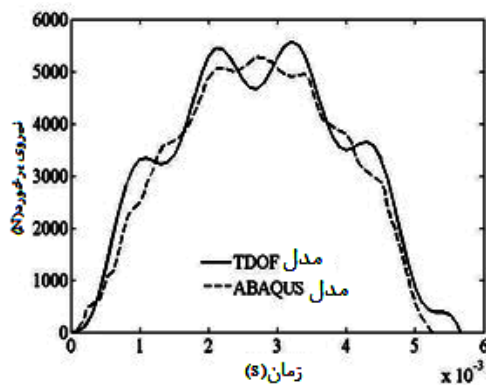
دانسیته (kg/m ³)	مدول برشی (GPa)	ضریب پواسون	مدول یانگ (GPa)
۹۴/۱۹۵	۰/۰۰۳۴۵	۰/۳۲	۰/۰۰۶۸۹
۱۵۵۰	$G_{11}=۶/۸۹۵$	$\nu_{11}=۰/۲۲$	$E_{11}=۱۳۱$
	$G_{13}=۶/۸۹۵$	$\nu_{13}=۰/۲۲$	$E_{22}=۱۰/۳۴$
	$G_{23}=۶/۲۰۵$	$\nu_{23}=۰/۴۹$	$E_{33}=۱۰/۳۴$

جدول ۶ خصوصیات هندسی تیر [۲۴].

رویه	هسته	
۳	۳۰	ضخامت (mm)
۳۶۰	۳۶۰	عرض (mm)
۱۲۴/۵	۱۰۸	شعاع (mm)
۱۹/۵	۱۹/۵	زاویه دهانه تیر (درجه)

جدول ۷ خصوصیات مکانیکی و هندسی ضربه زننده [۲۴].

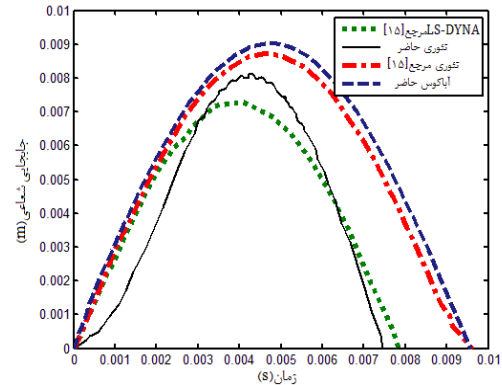
۲۰۰	مدول یانگ (GPa)
۰/۳	ضریب پواسون
۷۸۰۰	دانسیته (kg/m ³)
۳	جرم (kg)
۸/۷۴	شعاع (mm)



شکل ۶ ب- مقایسه نیروی برخورد بدست آمده توسط دو روش تحلیلی و عددی (المان محدود).

جدول ۴- ترتیب لایه چینی در رویه‌ها.

رویه	آرایش لایه‌ها
رویه بالا	[۰/۹۰/۰/۰/هسته/۰/۹۰/۰]
رویه پایین	[۰/۹۰/۰/۰/هسته/۰/۹۰/۰]



شکل ۶ الف- پیش‌بینی تاریخچه خیز توسط دو روش تحلیلی و عددی (المان محدود).

واضح است که بین سطح بیرونی ضربه‌زننده و رویه بالا باید از قید تماس استفاده گردد. در تحقیق حاضر از قانون تماس هرگز برای بیان برخورد دینامیکی استفاده شده است. با توجه به اینکه هسته دارای چگالی بسیار پایینی نسبت به رویه‌ها بوده، شرایط تکیه‌گاهی برای آن اعمال نشده بلکه شرایط تکیه‌گاهی مفصلی فقط بر روی رویه‌های بالا و پایین اعمال می‌گردد [۱۰]. شرایط مرزی برای ضربه زننده مثل مثال قبل می‌باشد. در تحقیق حاضر از المان CPS4R برای مش بندی رویه‌ها و از المان CPS8R برای مش بندی هسته استفاده گردیده است.

در شکل ۶ ب تابع نیروی بدست آمده توسط رابطه (۲۹) از روش جرم و فنر دو درجه آزادی با روش حل المان محدود آباکوس برای تیر خمیده با هم مقایسه شده است. نوسانات ایجاد شده به دلیل تبادل انرژی جنبشی و پتانسیل و ارتعاشات حاکم و حرکت موج ضربه در تیر می‌باشد. نتایج بدست آمده به روش جرم و فنر دو درجه آزادی مطابقت خوبی با نتایج بدست آمده از روش المان محدود دارد. با توجه به این که کلاس مسئله حالت جرم بزرگ است (جرم ضربه زننده بزرگتر از جرم معادل تیر است). لذا نتایج حاصل از روش جرم و فنر و المان محدود تقارن خوبی را نسبت به

۴-۲ مطالعه پارامترها

در این قسمت در حالت تیر خمیده جابجایی شعاعی هسته و تنش برشی در هسته نمایش داده می‌شود. در این حالت خواص هندسی و مادی ضربه‌زننده و تیر مطابق با جداول ۵ الی ۷ در نظر گرفته می‌شود. اثر افزایش پارامترهایی نظیر نسبت مدول الاستیسیته هسته به رویه و نسبت ضخامت هسته به تیر بر جابجایی شعاعی و تنش برشی هسته مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین اثر افزایش نسبت ضخامت هسته به شعاع تیر بر جابجایی شعاعی هسته بررسی و در ادامه اثر افزایش سرعت ضربه‌زننده و ضخامت هسته بر نیروی برخورد مطالعه می‌شود.

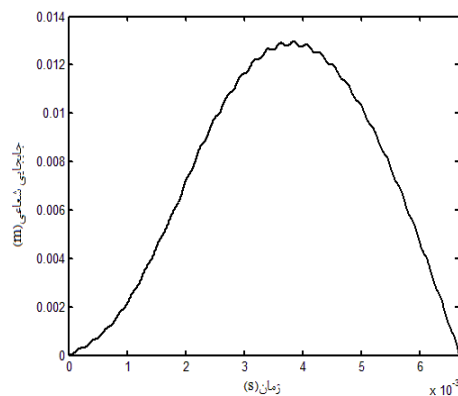
شکل ۷، جابجایی شعاعی هسته را نشان می‌دهد. بیشترین مقدار این جابجایی برابر با $13/18$ میلی‌متر است. شکل ۸، تنش برشی هسته را نشان می‌دهد، بیشترین مقدار مثبت تنش برشی هسته 1709 و بیشترین مقدار منفی آن 1696 پاسکال می‌باشد.

همان‌طور که در شکل ۹ دیده می‌شود، مقدار جابجایی شعاعی تیر در حالتی که نسبت مدول الاستیسیته هسته به رویه بالا برابر با $0/05$ است برابر با $13/49$ میلی‌متر و وقتی این نسبت به $0/1$ می‌رسد برابر است با $13/48$ میلی‌متر است. این مقدار کاهش برابر با $0/1$ درصد کاهش جابجایی شعاعی تیر می‌باشد. با توجه به افزایش مدول الاستیسیته هسته و به تبع آن مدول الاستیسیته معادل تیر جابجایی کاهش یافته است.

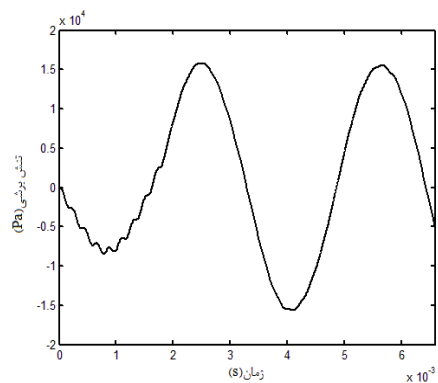
همان‌طور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، در حالتی که نسبت مدول الاستیسیته هسته به رویه بالا برابر با $0/1$ است، تنش برشی هسته برابر با 17410 پاسکال و وقتی این نسبت به $0/1$ می‌رسد برابر با 22610 پاسکال می‌شود. این مقدار افزایش برابر با $29/87$ درصد افزایش تنش برشی در هسته است. افزایش مدول الاستیسیته هسته باعث کاهش جابجایی هسته گردید، ولی با توجه به قانون هوک تنش برشی متأثر از حاصل ضرب مدول الاستیسیته در کرنش است. چون افزایش مدول الاستیسیته هسته بیش از کاهش جابجایی آن است پس حاصل ضرب‌شان هم روند افزایشی تنش برشی را نشان می‌دهد.

در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت هسته از میزان جابجایی شعاعی تیر کاسته می‌شود. وقتی

نسبت ضخامت هسته به تیر برابر با $0/1$ است جابجایی شعاعی هسته $14/5$ میلی‌متر و وقتی این نسبت به $0/9$ می‌رسد مقدار جابجایی برابر با $12/7$ میلی‌متر می‌گردد. مقدار کاهش جابجایی در اثر افزایش ضخامت هسته برابر با $15/1$ درصد است. با توجه به افزایش اینرسی سطحی و به تبع آن سفتی خمشی تیر این کاهش قابل پیش‌بینی می‌باشد و روند کاهش منطقی به نظر می‌رسد.



شکل ۷ جابجایی شعاعی هسته در وسط تیر ($\varphi=0/2$) و در فصل مشترک رویه بالا.

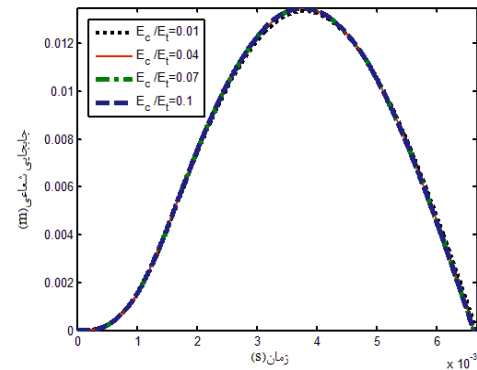


شکل ۸ تنش برشی هسته در وسط تیر ($\varphi=0/2$) و در فصل مشترک رویه بالا.

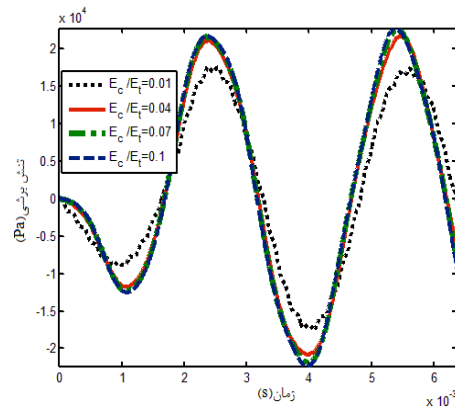
در شکل ۱۲، تاثیر افزایش ضخامت هسته بر تنش برشی هسته مشاهده می‌شود. روند تغییرات به این گونه است که با افزایش نسبت ضخامت هسته به تیر از ۰/۱ به ۰/۹، مقدار تنش برشی از ۴۱۰۴۰ پاسکال به ۱۷۵۰۰ پاسکال کاهش پیدا می‌کند. این مقدار کاهش برابر با ۵۷/۴ درصد است. با ثابت ماندن شرایط مرزی و نحوه حرکت (سینماتیک) تیر، در اثر کاهش جابجایی، کرنش کاهش پیدا می‌کند و با کاهش کرنش برشی و ثابت ماندن مدول الاستیسیته اجزا تیر، تنش برشی کاهش می‌یابد.

مقدار جابجایی شعاعی هسته نیز، همان‌طور که در شکل ۱۳ دیده می‌شود، در حالتی که نسبت ضخامت هسته به شعاع تیر برابر با ۰/۱ است برابر با ۱۰/۹۸ میلی‌متر و وقتی این نسبت به ۰/۹ می‌رسد برابر است با ۱/۵۷۷ میلی‌متر است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش نسبت ضخامت هسته به شعاع تیر، میزان جابجایی تیر کم می‌شود. آنچه مسلم است آن است که با افزایش این نسبت زمان تماس کاهش می‌یابد. این در حالی است که برای نسبت‌های کمتر زمان تماس زیاد شده و تعداد موجک‌ها بیشتر می‌شود. بنابراین با دانستن این موضوع هماهنگی لازم در تفسیر نتایج معلوم می‌شود. آنچه بدیهی است آن است که در هر صورت با افزایش نسبت ضخامت هسته به شعاع تیر، میزان جابجایی تیر و دامنه موجک‌ها کم می‌شود.

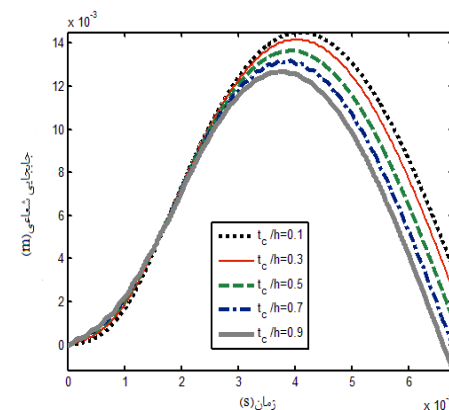
به منظور بررسی سرعت ضربه زنده بر تاریخچه نیرو، مقادیر سرعت اولیه ۳، ۶ و ۹ متر بر ثانیه، با فرض ثابت بودن بقیه پارامترها در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۱۴ تغییرات تاریخچه نیرو برای سرعت‌های برخورد مختلف آورده شده است. شکل ۱۴ نشان می‌دهد که با افزایش سرعت ضربه زنده مقدار نیروی برخورد افزایش می‌یابد. زمان تماس چندانی تغییری نمی‌کند. با افزایش سرعت ضربه زنده در واقع سفتی تماس افزایش می‌یابد که این نیز باعث افزایش مقدار نیروی ضربه می‌گردد. به دلیل اینکه انرژی جنبشی اولیه ضربه زنده که در برخورد دلیل اصلی بوجود آمدن نیروی برخورد است، با توان دوم به سرعت اولیه وابسته است و اندک تغییری در سرعت اولیه می‌تواند حداکثر نیروی ایجاد شده در محل برخورد را افزایش دهد. همچنین حداکثر زمان ضربه با افزایش سرعت اولیه تغییری نداشته که این امر سبب شوک بر سازه شده و نیروی زیاد برخورد به تیر وارد می‌گردد. با



شکل ۹ اثر افزایش مدول الاستیسیته هسته بر جابجایی شعاعی تیر در وسط تیر ($\varphi=0.2$) و در فصل مشترک با رویه بالا.



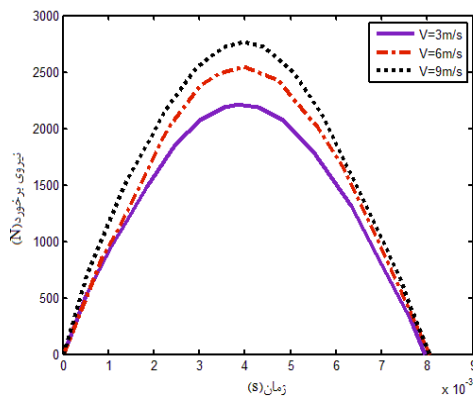
شکل ۱۰ اثر افزایش مدول الاستیسیته هسته بر تنش برشی هسته در وسط تیر ($\varphi=0.2$) و در فصل مشترک با رویه بالا.



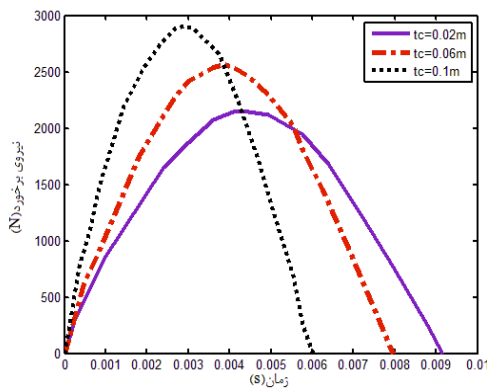
شکل ۱۱ اثر افزایش ضخامت هسته بر جابجایی شعاعی هسته در وسط تیر ($\varphi=0.2$) و در فصل مشترک با رویه بالا.

افزایش سرعت از ۳ به ۹ متر بر ثانیه، مقدار نیرو از $2207/6$ نیوتن به $2754/39$ نیوتن افزایش پیدا می‌کند و این برابر با $24/77$ درصد افزایش نیروی ضربه است.

شکل ۱۵ نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت هسته مقدار نیروی برخورد افزایش و زمان تماس کاهش پیدا می‌کند. در تحلیل این رخ داد می‌توان گفت که با افزایش ضخامت هسته، در واقع سفتی برخورد تیر افزایش پیدا می‌کند که این نیز باعث افزایش مقدار نیروی ضربه می‌گردد. از طرفی با افزایش ضخامت هسته فرکانس نوسان نیروی حاصل از مدل جرم و فنر کاهش پیدا می‌کند و این امر باعث افزایش زمان ضربه می‌گردد. با افزایش ضخامت هسته از 20 به 100 میلیمتر، مقدار نیرو از $2156/43$ به $2887/76$ نیوتن افزایش پیدا می‌کند.



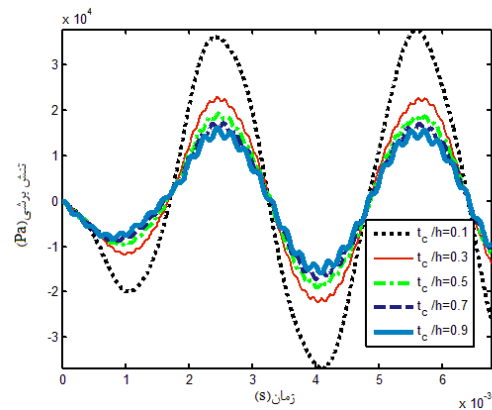
شکل ۱۴ تغییرات تاریخچه نیرو با افزایش سرعت برخورد.



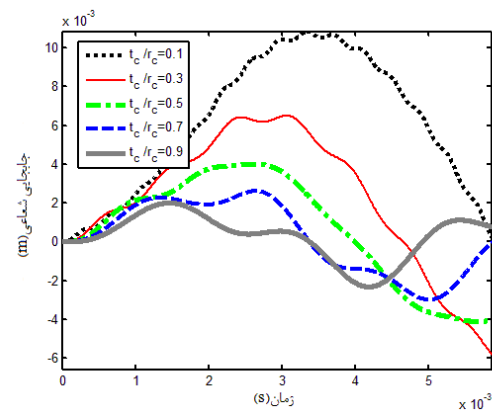
شکل ۱۵ تغییرات تاریخچه نیرو با افزایش ضخامت هسته.

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق پاسخ دینامیکی یک تیر خمیده تحت یک ضربه عرضی با سرعت پایین مورد بررسی قرار گرفته است. برای استخراج روابط حاکم از اصل همپلتون و تئوری مرتبه بالای ورق‌های ساندویچی استفاده شد. از تئوری برشی مرتبه اول برای میدان جابجایی رویه‌ها و برای هسته، با فرض ثابت بودن تنش برشی در ضخامت هسته، از روابط تنش-کرنش و کرنش-جابجایی، استفاده گردید. نیروی ضربه به کمک مدل جرم و فنر دو درجه آزادی تعیین گردید. تأثیر افزایش مدول الاستیسیته هسته و افزایش نسبت ضخامت هسته به تیر بر جابجایی شعاعی هسته و تنش برشی آن بررسی گردید. نتایج مهم این تحقیق عبارت است از:



شکل ۱۲ اثر افزایش ضخامت هسته بر تنش برشی هسته در وسط تیر ($\varphi=\alpha/2$) و در فصل مشترک رویه بالا.



شکل ۱۳ اثر افزایش ضخامت هسته بر جابجایی شعاعی هسته در وسط تیر ($\varphi=\alpha/2$) و در فصل مشترک رویه بالا.

- [8] S. Abrate, "Impact on Laminated Composites: recent advances", *Journal of Applied Mechanic Rev*, Vol.47,1994, pp.517-544.
- [9] R. Olsson, "Impact Response of Orthotropic Composite Plates Predicted from a One-parameter Differential Equation", *Journal of AIAA*, Vol. 30,1992, pp. 1587-1596.
- [10] K.N. Shivakumar, W. Elber, W. Illg, "Prediction of Impact Force and Duration due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.52,1985, pp. 674-680.
- [11] P. christoforou, H. Lotfi, "An inverse solution for low-velocity impact in composite plate", *composite and structure*, Vol. 79,2001, pp. 2607-2619.
- [12] S. R. Swanson, N. L. Smith, Y. Qian, "Analytical and experimental strain response in impact of composite cylinders", *Composite structures*, Vol. 18, 1991, pp. 95-108.
- [13] M. R. Khalili, "Analysis of the Dynamic Response of Large Orthotropic Elastic Plates to Transverse Impact and its Application to Fiber Reinforced Plates", [PhD Thesis], Indian Institute of Technology, Delhi, 1992.
- [14] L.J. Lee, K. Y. Huang, Y. J. Fann, "Dynamic Response of Composite Sandwich Plate Impact by a Rigid Ball", *Journal of Composite Materials*, Vol.27,1993, pp. 1238-1256.
- [15] Y. Mijia, Q. Pizhong, "Higher-order impact modeling of sandwich structures with flexible core", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42,2005, pp. 5460-5490.
- [16] F. AshenaiGhasemi, K. MalekzadehFard, R. Paknejad, "Response of cantilever fiber metal laminate (FML) plates using an analytical-numerical method", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 3, 2013, pp. 57-67 (In Persian).
- [17] S. W. Gong, "A study of impact on composite laminated shells", [PhD Dissertation], National University of Singapore, 1995.
- [18] D. W. Zhou, W. J. Stronge, "Low velocity impact denting of HSSA lightweight sandwich panel", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, 2006, pp. 1031-1045.
- [19] I. Ivanez, E. Brabero, S. Sanchez-saez, *Analytical study of the low-velocity impact response of composite sandwich beam*, *composite structures*, vol 111, 2014, pp. 459-467.
- [20] I. Ivanez, S. Sanchez-saez, *Numerical modeling of the low-velocity impact response of composite sandwich beam with honeycomb core*, *composite structures*, vol 106, 2013, pp. 716-723.
- [21] G. H. Payeganeh, F. AshenaiGhasemi, K. MalekzadehFard, *Dynamic response of fiber-metal laminate (fmls) subjected to low-velocity impact*, *Thin-walled structures*, vol47, 2010, pp. 62-70.
- ۱- با افزایش نسبت مدول الاستیسیته هسته به رویه از ۰/۰۵ به ۰/۱، جابجایی شعاعی هسته به مقدار ۰/۱ درصد کاهش می‌یابد.
- ۲- مدل حل ارائه شده در این مقاله تحلیلی بوده و به سرعت می‌توان پاسخ تیر خمیده ساندویچی را یافت.
- ۳- با افزایش نسبت مدول الاستیسیته هسته به رویه از ۰/۰۵ به ۰/۱، تنش برشی هسته ۲/۲ درصد افزایش می‌یابد.
- ۴- با افزایش نسبت ضخامت هسته به تیر جابجایی شعاعی هسته کاهش پیدا می‌کند.
- ۵- با افزایش نسبت ضخامت هسته به تیر از ۰/۱ به ۰/۹، تنش برشی هسته ۵۷/۴ درصد کاهش پیدا می‌کند.
- ۶- با افزایش نسبت ضخامت هسته به شعاع تیر از ۰/۱ به ۰/۹، جابجایی شعاعی هسته به میزان ۵۹۶/۲۵ درصد کاهش می‌یابد.
- ۷- با افزایش سرعت از ۳ به ۹ متر بر ثانیه، مقدار نیرو ۲۴/۷۷ درصد افزایش می‌یابد.
- ۸- با افزایش ضخامت هسته از ۲۰ میلیمتر به ۱۰۰ میلیمتر، مقدار نیرو ۳۳/۹۲ درصد افزایش می‌یابد.

۶- مراجع

- [1] J. M. Whitney, N. J. Pagano, "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates", *j.appl.mech*, 1970, pp.1031-1036.
- [2] N. J. Pagano, "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", *journal of composites materials*, vol.4, 1970, pp.20-34.
- [3] Y. M. Forstig, O. Baruch, I. Shteinman, "Higher-order theory for sandwich beams behavior with transversely flexible core", *journal of engineering mechanics*, vol.118,1992, pp.1026-1043.
- [4] Y. M. Forstig, "Buckling of sandwich panels with a flexible core higher order theory", *International Journal of Solids and Structures*, vol.35, 1998, pp. 183-204.
- [5] E. Bozhevolnaya, Y. M. Forstig, "Free Vibrations of Curved Sandwich Beams with a Transversely Flexible Core", *journal of Sandwich Structures and materials*, vol. 3, 2001, pp. 311-342.
- [6] Y. M. Forstig, O. T. Thomsen, high-order free vibrations of sandwich panels with a Flexible core". *Journal of solid and structure*, vol.41,2004, pp.1697-1724.
- [7] S. Abrate, "Impact on Laminated Composite Materials", *Journal of Applied Mechanic Rev.*, Vol. 44,1991, pp.155-190.

- [22] S. R. Swanson, "Limits of quasi-static solutions in impact of composite structures", *Comp Engng*, Vol. 2, 1992, pp.261-7.
- [23] I. H. Choi, C. H. Lim, Low-velocity impact analysis of composite laminates using linearized contact law. *Composite Structures* 66, 2004, pp.125-132.
- [24] A. E. Armenakas, D. C. Gazis, G. Herrmann, 1969. *Free vibrations of circular cylindrical shells*. Oxford: Pergamon Press.