



کنترل فازی تطبیقی ربات تک چرخ الکتریکی

محمد مهدی فاتح^{۱*} و جواد کیقبادی^۲^۱ استاد کنترل، دانشگاه شاهرود، دانشکده برق و رباتیک^۲ کارشناس ارشد کنترل، دانشگاه شاهرود، دانشکده برق و رباتیک

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۲/۰۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۰۷/۱۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۰/۲۳

چکیده

در این مقاله برای نخستین بار طرح کنترل فازی تطبیقی ربات تک‌چرخ چهار درجه آزادی با وجود محرکه های الکتریکی ارائه می‌گردد. نوآوری دیگر مقاله ارائه مدل جدیدی از ربات تک‌چرخ چهار درجه آزادی برای اجرای راهبرد کنترل ولتاژ و راهبرد کنترل گشتاور است. دینامیک حرکت بصورت سیستم غیرخطی و چند متغیره با اثر متقابل بین ورودی‌ها و خروجی‌ها توصیف می‌گردد. ربات تک‌چرخ مانند آونگ وارون در وضعیت ناپایدار قرار دارد. علاوه بر آن، تعداد محرکه‌های ربات کمتر از تعداد درجات آزادی آن است. پیچیدگی دینامیک ربات، اهمیت طراحی کنترل‌کننده را دو چندان می‌سازد. در این تحقیق، کنترل‌کننده خطی‌سازی پسخورد مبتنی بر مدل با راهبرد کنترل گشتاور طراحی می‌گردد. سپس، کنترل‌کننده فازی تطبیقی غیرمستقیم با راهبرد کنترل ولتاژ نیز طراحی می‌شود که پایداری سیستم کنترل را در حضور عدم قطعیت تضمین می‌نماید. پایداری نقطه تعادل با روش مستقیم لیاپانوف بررسی می‌شود. نتایج شبیه سازی موفقیت کنترل‌کننده را در حفظ تعادل و پایداری ربات تک‌چرخ نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: ربات تک‌چرخ الکتریکی؛ خطی‌سازی پسخورد؛ فازی تطبیقی غیرمستقیم؛ راهبرد کنترل ولتاژ.

Adaptive Fuzzy Control of an Electrical Single-Wheel Robot

M.M. Fateh^{1*}, J. Keighobadi²¹ Professor of Control Eng., Univ. of Shahrood, Shahrood, Iran² M.Sc., Control Eng., Univ. of Shahrood, Shahrood, Iran

Abstract

In this paper, a novel adaptive fuzzy control design for a four degrees of freedom single-wheel robot including its electric motors is presented. Another novelty of this paper is to derive a novel model for this robot for using voltage control strategy in the control design. The dynamics of motion is described as a nonlinear multivariable system with couplings between inputs and outputs. Similar to an inverse pendulum, the single-wheeled robot is in the instable equilibrium point. In addition, number of actuators of robot are less than the degrees of freedom of robot. The control design becomes so important due to this complexity. Based on the derived model in this research, a novel feedback linearization controller by using torque control strategy is designed. Then, a novel indirect adaptive fuzzy controller in voltage control strategy is designed. The stability is guaranteed in the presence of uncertainties. The stability of equilibrium point is analyzed by direct method of Lyapunov. Simulation results show the effectiveness of controllers to keep the balance and stability of the single-wheel robot.

Keywords: Single-Wheel Electrical Robot; Feedback Linearization; Indirect Adaptive Fuzzy Control; Voltage Control Strategy.

۱- مقدمه

در طی سال‌های اخیر مراکز تحقیقاتی و محققین تلاش‌های خود را برای تولید وسایل نقلیه با سوخت پاک، کم حجم، قابلیت جابجایی آسان و کمترین میزان آلودگی متمرکز نموده‌اند. در این خصوص، طرح‌ها و ایده‌های بسیاری در زمینه‌ی ربات‌های دو چرخ و تک‌چرخ ارائه شده است. ربات‌های تک‌چرخ فضای کمتری را نسبت به ربات‌های دوچرخ به خود اختصاص می‌دهند و قادر به حرکت در مکان‌های باریک هستند. بنابراین، توجه و مطالعه در این زمینه ارزشمند خواهد بود.

در دو دهه‌ی اخیر، تحقیقات گسترده‌ای در زمینه‌ی ربات‌های تک‌چرخ تعادلی انجام گرفته‌است و به مرور زمان پیشرفت‌هایی در این حوزه پیش‌بینی می‌شود. برای حفظ تعادل و پایداری آنها، از اثر ژیرسکوپی یا سنسورهای متعدد یا کنترل کننده‌های مبتنی بر مدل و آزاد از مدل استفاده شده‌است. مقالات متعددی در زمینه اثر ژیرسکوپی وجود دارد که می‌توان به طراحی ربات تک‌چرخ به منظور حفظ تعادل زوایای مختلف آن با اثر ژیرسکوپی [۱]، طراحی و کنترل ربات تک چرخ به کمک ژیرسکوپ عمود بر چرخ به منظور حفظ تعادل [۲]، طراحی و حفظ تعادل ربات تک چرخ با استفاده از دیسک دوار عمود بر چرخ [۳] و ساخت ربات تک چرخ با استفاده از اثر ژیرسکوپی اشاره کرد.

کنترل ربات‌های تک‌چرخ پیشرفته‌ترین روش‌ها را به خود اختصاص می‌دهد. در روش کنترل بر مبنای مدل لازم است که معادلات دقیق ریاضی ربات محاسبه شده و با طراحی کنترل کننده سعی در تحقق اهداف کنترلی می‌شود. بحث مدل سازی از نقطه نظر شناختن پیچیدگی سیستم، شبیه سازی و کنترل سیستم حائز اهمیت است. یکی از نکات مهم در زمینه مدلسازی ربات‌های تک چرخ منظور نمودن تعداد درجات آزادی ربات است. هرچه تعداد درجات آزادی ربات بیشتر باشد مدل پیچیده‌تر می‌شود. در نتیجه، کنترل بر مبنای مدل و تحلیل پایداری دشوارتر خواهد بود. از جمله مقالات موجود در زمینه طراحی ربات‌های تک‌چرخ بر مبنای مدل و مستقل از مدل می‌توان به کنترل بهینه خطی ربات تک چرخ دو درجه آزادی [۴]، کنترل کننده تناسبی-انتگرالی- مشتق‌گیر برای ربات تک‌چرخ دو درجه آزادی و بکارگیری دو فن در طرفین ربات به منظور حفظ تعادل

زاویه‌ی رول [۵]، کنترل بهینه خطی با در نظرگرفتن چرخ کروی شکل [۶]، کنترل فازی در حضور یک روبتگر با فرض یک چرخ بسیار پهن [۷ و ۸]، کنترل فازی بهینه ربات دو درجه آزادی [۹]، کنترل تطبیقی ربات تک چرخ سه درجه آزادی با بهره گیری از منطق فازی و قانون کنترل بهینه خطی [۱۰]، کنترل تناسبی-مشتق‌گیر ربات تک چرخ [۱۱]، کنترل فازی مودلغزشی ربات تک‌چرخ دو درجه آزادی [۱۲] و کنترل عصبی ربات تک‌چرخ به منظور حفظ تعادل زوایای پیچ و رول [۱۳] اشاره کرد. کلیه طرح‌های قبلی مبتنی بر راهبرد کنترل گشتاور می‌باشد. در این راهبرد، گشتاور ربات به عنوان ورودی سیستم می‌باشد اما در عمل فرمان گشتاور نمی‌تواند مستقیماً به چرخ ربات اعمال شود و نیازمند محرکه است.

به منظور سادگی در مدلسازی در اکثر مقالات، مدل دو درجه آزادی ربات تک چرخ مطرح شده‌است و درجات آزادی چرخ ربات در مدل سازی لحاظ نشده‌است. مدل دینامیکی چهار درجه آزادی ربات تک‌چرخ به شرح پیوست این مقاله، چند متغیره و دارای اثر متقابل شدید بین ورودی‌ها و خروجی‌ها، متغیرها، مشتقات اول و دوم آنهاست. در واقع، با یک سیستم پیچیده سر و کار داریم. با توجه به پیچیدگی معادلات، تا کنون مدل فضای حالت چهار درجه آزادی ربات تک‌چرخ ارائه نشده‌است. در این مقاله، مدل جدیدی از ربات تک‌چرخ چهار درجه آزادی با توسعه کارهای قبلی ارائه می‌شود [۱۴-۱۷]. برای نخستین بار، راهبرد کنترل ولتاژ برای ربات تک‌چرخ تبیین می‌شود و کنترل خطی سازی پس‌خورد مبتنی بر مدل و کنترل فازی تطبیقی مبتنی بر دانش مدل برای ربات تک‌چرخ طراحی می‌شود. در راهبرد کنترل ولتاژ، ولتاژ موتورها به عنوان ورودی‌های کنترلی سیستم در نظر گرفته شده‌است و دینامیک الکتریکی و مکانیکی محرکه‌ها لحاظ شده‌است [۱۸].

مدل ربات تک‌چرخ مورد نظر از یک چرخ بزرگ، مجموعه‌ای از چرخ‌های کوچک، یک زین برای استقرار سرنشین و دو موتور تشکیل شده است. در شکل ۱ شمای کلی این ربات مشاهده می‌شود. موتور متصل به چرخ بزرگ وظیفه چرخش چرخ بزرگ برای حرکت در راستای جلو-عقب و موتور متصل به مجموعه چرخ‌های کوچک وظیفه چرخش چرخ‌های کوچک برای حرکت در جهت چپ-راست

انحراف را جبران و تعادل و پایداری ربات را تضمین می‌کند. در راهبرد کنترل گشتاور، سیگنال گشتاور مرجع توسط موتورها به چرخ‌ها اعمال می‌شود ولی در راهبرد کنترل ولتاژ، ولتاژ موتورها بطور مستقیم کنترل می‌شوند تا انحراف از بین رفته و پایداری و تعادل ربات تضمین گردد.

حتی اگر اثر موتورها بر روی ربات را بعنوان اغتشاش منظور نماییم راهبرد کنترل گشتاور با راهبرد کنترل ولتاژ تفاوت اساسی دارد. در راهبرد کنترل گشتاور سیگنال گشتاور مرجع برای موتور محاسبه می‌شود که از طریق حلقه کنترل جریان توسط موتور تولید می‌گردد. معمولاً از این حلقه داخلی صحبت نمی‌شود و با تقریب از دینامیک آن صرف نظر می‌شود. در مقایسه، راهبرد کنترل ولتاژ از این حلقه داخلی استفاده نمی‌کند زیرا سیگنال کنترل به صورت ولتاژ محاسبه شده و به موتور اعمال می‌شود. علاوه بر این، قانون کنترل در راهبرد کنترل گشتاور بر مبنای مدل ربات چند متغیره، غیرخطی با تزویج بین ورودی‌ها و خروجی‌ها و با محاسبه زیاد است ولی قانون کنترل در راهبرد کنترل ولتاژ بر مبنای مدل موتور معمولاً به صورت خطی، مجزا، ساده و تک ورودی-تک خروجی است.

در ادامه مقاله، بخش دوم، مدل‌سازی و فرم فضای حالت ربات تک‌چرخ را به دو صورت بدون محرکه‌ها و در حضور محرکه‌ها ارائه می‌نماید. در بخش سوم، کنترل کننده خطی-ساز پیچیده با راهبرد کنترل گشتاور توصیف می‌شود. در بخش چهارم، کنترل کننده فازی تطبیقی با راهبرد کنترل ولتاژ طراحی می‌شود. در بخش پنجم، نتایج حاصل از شبیه‌سازی ارائه می‌شود و در بخش ششم نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲- مدل‌سازی

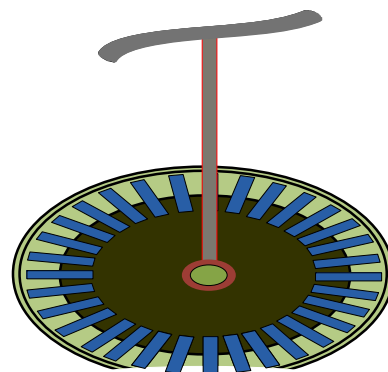
در این بخش، ربات تک‌چرخ الکتریکی را با در نظر گرفتن موتورهای DC مدل‌سازی می‌کنیم. در محاسبه معادلات حرکت از روش لاگرانژ استفاده شده‌است. در این روش، انرژی جنبشی و پتانسیل کل سیستم محاسبه می‌شود. معادله لاگرانژ به فرم زیر است:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = Q_{knc} \quad (1)$$

که L را لاگرانژین، Q_{knc} گشتاور ورودی، x_k متغیر موقعیت می‌باشد. بردار درجات آزادی سیستم چنین است:

را بر عهده دارند. مدل ربات تک‌چرخ مفروض دارای چهار درجه آزادی است که به ترتیب زاویه چرخش چرخ بزرگ، زاویه چرخش مجموعه چرخ‌های کوچک، انحراف به چپ-راست و انحراف در راستای جلو-عقب می‌باشند. ربات تک‌چرخ یک سیستم ناپایدار بوده و مکانیزم حرکت و تعادل ربات تک‌چرخ از پاندول معکوس الهام گرفته شده است [۱۹]. در پاندول معکوس، هرگاه پاندول از نقطه تعادل منحرف شود، کنترل کننده وظیفه جبران انحراف را بر عهده دارد. در ربات تک‌چرخ نیز هدف از طراحی کنترل کننده، حذف انحرافات و حفظ تعادل ربات در راستای قائم است. مکانیزم حرکت ربات به گونه‌ای است که با خم شدن سرشین در هر جهت، حرکت ربات در آن جهت را به دنبال دارد. می‌توان گفت استفاده از عمل و عکس‌العمل گشتاور موتورها، روش حفظ تعادل و پایداری در ربات‌ها و وسایل نقلیه تک‌چرخ می‌باشد [۲۰].

انحراف توسط حسگر زاویه که در زیر زمین قرار دارد، اندازه‌گیری و سپس به کنترل کننده فیدبک می‌شود. کنترل کننده برای رفع انحراف، تلاش کنترلی مشخصی را به محرکه اعمال می‌نماید. از آنجایی که کنترل کننده‌ها در عمل پردازنده‌ها هستند و قدرت سیگنال خروجی آن‌ها توانایی چرخاندن موتورها را ندارد از مدار الکترونیک قدرت واسط به منظور تقویت توان سیگنال کنترل استفاده می‌شود. در نتیجه، پس از تقویت سیگنال کنترلی، گشتاور مورد نیاز توسط موتورها به چرخ‌ها اعمال می‌شود. عکس‌العمل گشتاورهای تولیدی از طریق بدنه و شاسی به محل استقرار سرشین وارد شده که



شکل ۱- ربات تک‌چرخ

شکل ۲- مدار معادل موتور DC مغناطیس دائم

$$A\ddot{X} = BU + W \quad (۷)$$

که $A \in R^{4 \times 4}$ ، $B \in R^{4 \times 2}$ ماتریس ثابت و $W \in R^{4 \times 1}$ می-باشد. ماتریس A ، B و بردار W در پیوست آمده است. ورودی کنترلی سیستم بصورت زیر است

$$U = \begin{bmatrix} -T_\psi \\ -T_\theta \end{bmatrix} \quad (۸)$$

با نگاهی به پیوست در می‌یابیم که معادله (۷) محاسبه بسیار دارد. اکنون مدل‌سازی ربات با حضور موتورهای بیان می‌شود. در شکل ۲ مدار معادل موتور DC مغناطیس دائم که چرخ بزرگ ربات را می‌چرخاند ترسیم شده است. ربات به صورت بار مکانیکی روی موتور عمل می‌کند.

ولتاژ موتورها به عنوان ورودی‌های کنترلی سیستم عمل می‌نماید. دینامیک الکتریکی موتورها با معادله زیر بیان می‌شود

$$V = RI + L\dot{I} + K_b r^{-1} \dot{q} + \varphi(t) \quad (۹)$$

R ماتریس قطری مقاومت موتورها، L ماتریس قطری اندوکتانس موتورها، K_b ماتریس قطری ضرایب القاء، $V = [v_1 \ v_2]^T$ بردار موقعیت زاویه‌ای چرخ‌ها، $\varphi(t)$ بردار ولتاژ موتورها و $\varphi(t)$ بردار اغتشاش خارجی می‌باشد. دینامیک حرکت موتورها چنین است.

$$J_m r^{-1} \ddot{q} + B_m r^{-1} \dot{q} + rU = \tau_m \quad (۱۰)$$

$J_m \in R^{2 \times 2}$ ماتریس قطری از ممان اینرسی موتورها، $B_m \in R^{2 \times 2}$ ماتریس قطری از ضرایب میرایی، $r \in R^{2 \times 2}$ ماتریس قطری ضرایب چرخ دنده است.

$$\tau_m = k_m I \quad (۱۱)$$

$k_m \in R^{2 \times 2}$ یک ماتریس قطری از ثابت القای موتورها و

جریان موتورها را نشان می‌دهد.

با استفاده از معادله ۷ می‌توان نوشت:

$$U = M(A\ddot{X} - W) \quad (۱۲)$$

$$X = [\theta \ \psi \ \beta \ \xi]^T \quad (۲)$$

که θ زاویه‌ی چرخش چرخ بزرگ، ψ زاویه‌ی چرخش چرخ کوچک، β زاویه‌ی انحراف به چپ-راست (زاویه رول) و ξ زاویه انحراف به جلو-عقب (زاویه پیچ) است.

معادلات حرکت سیستم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = T_\theta \quad (۳)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = T_\psi \quad (۴)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = -T_\psi \quad (۵)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = -T_\theta \quad (۶)$$

که T_θ و T_ψ گشتاور اعمالی به چرخ‌ها است. معادلات حاصل بسیار پیچیده و دارای تقابل شدید است. در نتیجه، نوشتن معادلات به فرم فضای حالت پیچیده است. با توجه به معادلات لاگرانژ (۳) تا (۶) دو متغیر θ و ψ توسط دو سیگنال کنترل T_θ و T_ψ و دو متغیر β و ξ توسط $-T_\psi$ و $-T_\theta$ کنترل می‌شوند. هدف از طراحی سیستم کنترل، صرف کردن زاویه β زاویه‌ی انحراف به چپ-راست و ξ زاویه انحراف به جلو-عقب است. از جمع معادلات (۳) و (۶) بدست می‌آید:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$$

از جمع معادلات (۴) و (۵) داریم

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$$

با در نظر گرفتن معادلات حاصل و دو معادله‌ی (۵) و (۶)، پس از تعدادی عملیات ریاضی در پیوست معادلات سیستم به صورت رایج زیر بدست می‌آید:

که $M \in R^{2 \times 4}$ ماتریس ثابت $M = (0_{2 \times 2} \quad I_{2 \times 2})$ می‌باشد. به دلیل ناچیز بودن اندوکتانس و ساده سازی، از اندوکتانس در فرموله کردن صرف نظر شده است. با جایگذاری معادلات (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) در معادله (۹) رابطه‌ی زیر بین انحرافات و ولتاژها ایجاد می‌شود:

$$\begin{aligned} V &= RI + K_b r^{-1} \dot{q} + \varphi(t) \\ &= Rk_m^{-1} \tau_m + K_b r^{-1} \dot{q} + \varphi(t) \\ &= Rk_m^{-1} J_m r^{-1} \ddot{q} + Rk_m^{-1} r M A \ddot{X} + \\ &\quad (Rk_m^{-1} B_m r^{-1} + K_b r^{-1}) \dot{q} - Rk_m^{-1} r M + \varphi(t) \end{aligned} \quad (۱۳)$$

شکل ۳- بلوک دیاگرام کنترل خطی سازی پسخورد

۳- خطی سازی پسخورد

در این بخش، برای نخستین بار کنترل کننده خطی سازی پسخورد برای ربات تک چرخ چهار درجه آزادی با راهبرد کنترل گشتاور طراحی می‌شود. هدف این طراحی، رساندن متغیرهای خروجی به مقادیر مطلوب یعنی $\beta_d \rightarrow \beta$ و $\xi_d \rightarrow \xi$ است. در روند طراحی، معادلات سیستم با انجام محاسبات پیوست به گونه ای مرتب می‌شوند که بتوان قانون کنترل مناسب را برای آن پیشنهاد داد. تعداد محرکه‌های ربات تک چرخ از تعداد درجات آزادی آن کمتر است. معادله (۷) بر حسب X نوشته شده است ولی باید درایه‌های سوم و چهارم از بردار X یعنی $(\xi \quad \beta)$ کنترل شود. برای این منظور معادله (۱۴) با شرح در پیوست بدست آمده است. نتیجه محاسبات به صورت زیر بیان می‌شود:

$$p\ddot{s} = k + gU \quad (۱۴)$$

که $\ddot{s} = [\ddot{\beta} \quad \ddot{\xi}]^T$ ، ماتریسی از ضرایب متغیرهای مشتقات دوم β و ξ ، $k \in R^{2 \times 1}$ برداری از متغیرهای حالت سیستم، g یک اسکالر از متغیرهای حالت سیستم است. به منظور درک بهتر موضوع، k و g در پیوست ارائه شده است.

حال قانون کنترل خطی سازی پسخورد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$g^{-1}(pv - k) = U \quad (۱۵)$$

که در آن v یک کنترل کننده خطی است. با اعمال قانون کنترل (۱۵) به معادله (۱۴) به دست می‌آید

$$\ddot{s} = v \quad (۱۶)$$

v را به صورت زیر پیشنهاد می‌دهیم:

$$v = \ddot{s}_d + k_d(\dot{s}_d - \dot{s}) + k_p(s_d - s) \quad (۱۷)$$

که در آن ماتریس‌های قطری k_p و k_d با ضرایب مثبت هستند. با اعمال معادلات (۱۶) و (۱۷) به معادله‌ی (۱۵) قانون کنترل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U = g^{-1}(p(\ddot{s}_d + k_d(\dot{s}_d - \dot{s}) + k_p(s_d - s)) - k) \quad (۱۸)$$

بلوک دیاگرام کنترلی در شکل ۳ ترسیم شده است:

سیستم حلقه بسته به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\ddot{e} + k_d \dot{e} + k_p e = 0 \quad (۱۹)$$

با انتخاب ماتریس‌های k_p و k_d بصورت متقارن مثبت خطا به سمت صفر میل می‌نماید.

۴- کنترل کننده فازی تطبیقی

در روش‌های کنترل هوشمند می‌توان به کنترل فازی اشاره کرد. در روند طراحی، ابتدا متغیرهای حالت سیستم را مشخص کرده و گروه‌های فازی را به آن‌ها اختصاص می‌دهیم. سپس، با در نظر گرفتن قوانین فازی سیستم فازی طراحی می‌شود. اگر مراکز گروه‌های فازی به صورت تطبیقی تنظیم شوند به این روش کنترل فازی تطبیقی می‌گویند. کنترل فازی تطبیقی به سه دسته مستقیم، غیرمستقیم و مستقیم- غیرمستقیم تقسیم می‌شوند. کنترل فازی تطبیقی مستقیم مبتنی بر دانش کنترل بوده و کنترل فازی تطبیقی غیرمستقیم مبتنی بر دانش سیستم می‌باشد [۲۱].

هدف این بخش، طراحی کنترل کننده فازی تطبیقی غیرمستقیم برای ربات تک چرخ با راهبرد کنترل ولتاژ می‌باشد. بلوک دیاگرام کنترلی در شکل ۴ ترسیم شده است. به منظور بدست آوردن قانون کنترل مناسب، معادلات سیستم

در حوزه ولتاژ به گونه ای مرتب می شوند که انحرافات به ولتاژها مربوط شوند. پس می توان نوشت:

شکل ۴- بلوک دیاگرام کنترل فازی تطبیقی

که در آن $e_1 = \beta_d - \beta$. سیستم فازی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\hat{F}_1 = \hat{f}_1^T \xi_{f_1} \quad (27)$$

$$\xi_{f_1} = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^f}(x_i)}{\sum_{l=1}^m \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i)} \quad (28)$$

$$\dot{E} = AE + BN \quad (29)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{p1} & -k_{d1} \end{bmatrix}, B = [0 \ 1]^T \quad (30)$$

$$E = [e_1 \ e_1^T]^T, e_1 = \beta_d - \beta, \dot{e}_1 = \dot{\beta}_d - \dot{\beta}$$

$$N = g_1^{-1} (f_1^T - \hat{f}_1^T) \xi_{f_1}$$

تابع لیاپانوف زیر پیشنهاد داده می شود.

$$V = E^T S E + \frac{1}{2\gamma_1} (f_1^T - \hat{f}_1^T) (f_1 - \hat{f}_1) \quad (31)$$

$$\dot{V} = E^T (A^T S + S A) E + 2E^T S B g_1^{-1} \times \quad (32)$$

$$(f_1^T - \hat{f}_1^T) \xi_{f_1} - \frac{1}{\gamma_1} (f_1^T - \hat{f}_1^T) (\dot{f}_1)$$

با در نظر گرفتن $-Q = A^T S + S A$ که در آن Q مثبت معین است، داریم:

$$\dot{V} = -E^T Q E + \left[2E^T S B g_1^{-1} \xi_{f_1} - \frac{1}{\gamma_1} \dot{f}_1 \right] \quad (33)$$

$$\times (f_1^T - \hat{f}_1^T)$$

مشتق تابع انرژی باید منفی شود تا مجانبی بودن خطا به صفر اثبات شود لذا باید رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\dot{f}_1 = 2\gamma_1 E_1^T S_1 B_1 g_1^{-1} \xi_{f_1} \quad (34)$$

به طور مشابه چنانچه سیستم حلقه بسته برای متغیرحالت ξ تشکیل داده شود و تابع لیاپانوف مطابق قبل

$$V = Rk_m^{-1} J_m r^{-1} \ddot{q} + Rk_m^{-1} r M A \ddot{X} + \varphi(t) \\ (Rk_m^{-1} B_m r^{-1} + k_b r^{-1}) \dot{q} - Rk_m^{-1} r M W = \\ Rk_m^{-1} J_m r^{-1} \ddot{q} + Rk_m^{-1} r [A_1 \ A_2] [\dot{q} \ \ddot{z}]^T + \quad (20)$$

$$(Rk_m^{-1} B_m r^{-1} + k_b r^{-1}) \dot{q} - Rk_m^{-1} r M W + \varphi(t)$$

$$V = F + G \ddot{z}$$

که $MA = [A_1 \ A_2]$ و $z = [\beta \ \xi]^T$ ، $q = [\theta \ \psi]^T$ تعریف می شوند.

درانتهای پیوست ارائه شده است G و F نیز به صورت زیر توصیف می شوند:

$$F = Rk_m^{-1} J_m r^{-1} \ddot{q} + Rk_m^{-1} r A_1 \ddot{q} + \varphi(t) \quad (21)$$

$$+ (Rk_m^{-1} B_m r^{-1} + k_b r^{-1}) \dot{q} - Rk_m^{-1} r M W$$

$$G = Rk_m^{-1} r A_2 \quad (22)$$

قانون کنترل پیشنهادی به صورت زیر است:

$$V = \hat{F} + G (\ddot{z}_d + k_d (\dot{z}_d - \dot{z}) + k_p (z_d - z)) \quad (23)$$

که در آن \hat{F} تخمین F است. F را نامعلوم در نظر گرفته ایم و با طراحی یک سیستم فازی تطبیقی \hat{F} آن را تخمین می زنیم. بردار پارامترهای سیستم فازی \hat{F} توسط قاعده تطبیق بروز رسانی می شود. G از روی مقادیر نامی تقریب زده خواهد شد. در راهبرد کنترل ولتاژ متغیرهای هدف به صورت غیرمتمرکز کنترل می شوند پس می توان نوشت:

$$V_1 = F_1 + g_1 \ddot{\beta} \quad (24)$$

$$V_1 = \hat{F}_1 + g_1 (\beta_d + k_{d1} (\beta_d - \beta) + k_{p1} \quad (25)$$

$$\times (\beta_d - \beta))$$

سیستم حلقه بسته با اعمال معادله (۲۵) به معادله (۲۴)

به صورت زیر تشکیل می شود و معادلات در حوزه خطا نوشته شده و بررسی می گردد:

$$\dot{e}_1 + k_{d1} e_1 + k_{p1} e_1 = g_1^{-1} (F_1 - \hat{F}_1) \quad (26)$$

جبران انحرافات می شود. گشتاورها در محدوده مجاز بوده و در آن‌ها پدیده لرزش دیده نمی‌شود. پارامترهای جدول ۱ در معادلات حرکت سیستم در پیوست به کار رفته‌اند و در بخش علائم و اختصارات معرفی شده‌است.

۵-۲- راهبرد کنترل ولتاژ

این شبیه‌سازی به بررسی راهبرد کنترل ولتاژ و عملکرد قوانین کنترل (۲۵) و (۳۵) برای ربات تک‌چرخ می پردازد. زمانی که سیستم در حوزه ولتاژ مطرح می‌شود دینامیک موتورها نیز در مدل سازی ظاهر می‌شوند. پارامترهای موتور در جدول ۲ آمده است. انحرافات اولیه ۱۱ درجه در نظر گرفته شده‌است. پارامترهای قانون کنترل با روش سعی و خطا به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند: $k_{p1,2} = 400$ ، $k_{d1,2} = 40$ ، $\gamma_1 = 1000$ ، $\gamma_2 = 20$ و $Q_{1,2} = \begin{pmatrix} 2000 & 10 \\ 10 & 398 \end{pmatrix}$ اغتشاش خارجی در این طراحی تابع سینوسی با دامنه ۱۰ (در نظر گرفته شده‌است).

در راهبرد کنترل ولتاژ، سیگنال کنترلی، ولتاژ موتور است. موتورها باید در برابر اضافه ولتاژ محدود شوند. بنابراین، از محدود کننده ولتاژ استفاده می‌شود ($|v_i| \leq v_{max}$). v_{max} ماکزیمم ولتاژ موتور و v_i ولتاژ موتور i ام است. چنان‌چه با اعمال محدودیت مذکور، خروجی کنترل کننده بیش از مقدار ولتاژ ماکزیمم باشد، کنترل کننده از مدار خارج شده و صرفاً ولتاژ ماکزیمم ثابت به موتور اعمال می‌شود. در این شبیه سازی از محدود کننده ولتاژ با ولتاژ ماکزیمم ۵۰ ولت استفاده شده‌است. نتایج حاصل از کنترل فازی تطبیقی غیرمستقیم با راهبرد کنترل ولتاژ در شکل‌های ۹ تا ۱۴ ارائه شده است. در شکل ۹ توابع تعلق متغیرهای ورودی کنترل کننده‌ی فازی نمایش داده شده است. شکل-های ۱۰ و ۱۱ نشان می‌دهند که انحرافات اولیه، توسط کنترل کننده حذف و تعادل ربات در راستای قائم برقرار می‌شود. در شکل ۱۲ عملکرد سیستم کنترل فازی تطبیقی ارائه شده‌است. همانطور که پیداست، اثر اغتشاش خارجی را به خوبی حذف کرده است. در شکل ۱۳ ولتاژ اعمالی به موتور مربوط به مجموعه چرخ‌های کوچک نشان داده شده است که انحراف به طرفین را به خوبی حذف کرده است. کنترل کننده به دلیل انحراف اولیه نسبتاً زیاد، ولتاژ بالایی در محدوده

پیشنهاد شود قانون کنترل و شرط پایداری مجانبی خطا به صورت زیر خواهند بود:

$$V_2 = \hat{F}_2 + g_2(\xi_d + k_{d2}(\xi_d - \xi)) + k_{p2} \times (\xi_d - \xi) \quad (35)$$

$$\text{که } e_2 = \xi_d - \xi$$

$$\hat{f}_2 = 2\gamma_2 E_2^T S_2 B_2 g_2^{-1} \xi_{f_2} \quad (36)$$

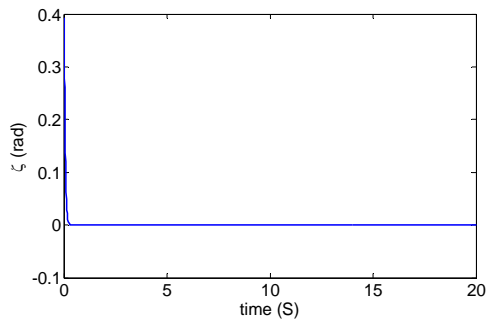
۵ - شبیه سازی

در این بخش، نتایج حاصل از کنترل کننده‌های پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف کنترل، از بین بردن انحرافات ایجادشده توسط سرنشین، به منظور حفظ تعادل و پایداری ربات می‌باشد. برای شبیه‌سازی و بررسی نتایج باید مقادیری مناسب برای پارامترهای ربات تک‌چرخ در نظر گرفته شود از پارامترهای مدل اوکی و ناکامورا که در جدول ۱ آمده است، استفاده می‌شود [۶].

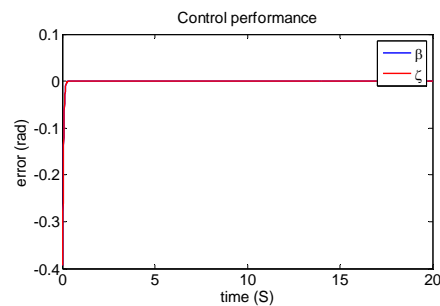
۵-۱- راهبرد کنترل گشتاور

قانون کنترل (۱۸) به منظور جبران انحرافات، به مدل ربات اعمال می‌شود. انحرافات اولیه ۲۲,۵ درجه در نظر گرفته شده است. پارامترهای قانون کنترل، با روش سعی و خطا برای دستیابی به عملکرد بهتر به صورت $k_{p1} = 81$ ، $k_{p2} = 64$ ، $k_{d1} = 18$ و $k_{d2} = 16$ منظور شده‌اند. لازم به ذکر است که چنان‌چه ضرایب مذکور، کوچک انتخاب شوند خطای تنظیم افزایش یافته و از طرفی تلاش کنترلی کمتری نیاز است و اگر این ضرایب بزرگ انتخاب شوند خطای تنظیم کاهش و تلاش کنترلی بیشتری صورت می‌گیرد. پس، بهتر است مصالحه‌ای بین عملکرد سیستم و رفتار سیگنال کنترل انجام گردد.

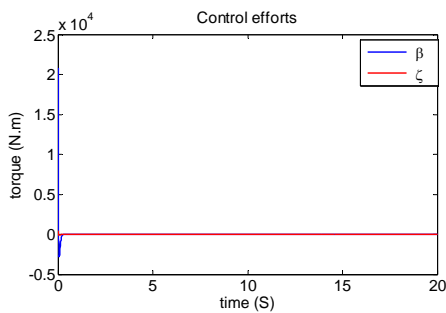
شکل‌های ۵ و ۶ موفقیت قانون کنترل را در حذف انحرافات به جلو-عقب و چپ-راست نشان می‌دهند. عملکرد کنترل کننده در شکل ۷ نمایش داده شده است که در زمان بسیار کوتاه به خوبی انحرافات را جبران و تعادل ربات را تضمین می‌نماید. در شکل ۸ سیگنال‌های کنترلی به تصویر کشیده شده است. به دلیل انحرافات اولیه نسبتاً زیاد، گشتاور راه‌اندازی موتورها نسبتاً بالا می‌باشد. پس از حذف انحرافات و قائم نگه داشتن ربات، گشتاور اعمالی به چرخ‌ها بسیار ناچیز شده که این مقدار باعث حفظ تعادل ربات پس از



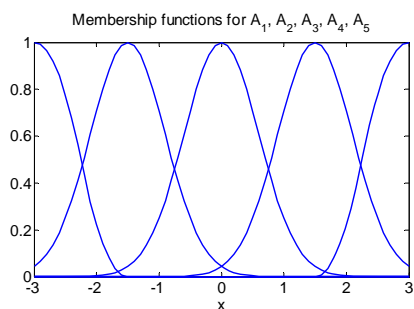
شکل ۶- انحراف به جلو - عقب خطی سازی پس‌خورده



شکل ۷- عملکرد کنترل خطی سازی پس‌خورده



شکل ۸- سیگنال‌های کنترل (خطی سازی پس‌خورده)



شکل ۹- توابع تعلق کنترل کننده فازی

مجاز را به موتور اعمال می‌کند. پس از جبران انحراف به طرفین، ولتاژ کاهش یافته و در حدود ۱،۵ ولت می‌شود که این ولتاژ به دلیل غلبه بر گشتاور گرانشی و حفظ تعادل ربات می‌باشد.

ولتاژ موتور دوم که مربوط به چرخ بزرگ است، در شکل ۱۴ به تصویر کشیده شده است که پس از حذف انحراف در جهت جلو، ولتاژی در حدود ۳ ولت در دو سر موتور دوم قرار گرفته تا تعادل ربات را در راستای قائم پس از حرکت حفظ نماید. لازم به ذکر است که هیچ‌گونه لرزشی در سیگنال‌های کنترل (ولتاژها) دیده نمی‌شود که بسیار مطلوب است. همچنین اغتشاش خارجی در رفتار ولتاژها دخیل است.

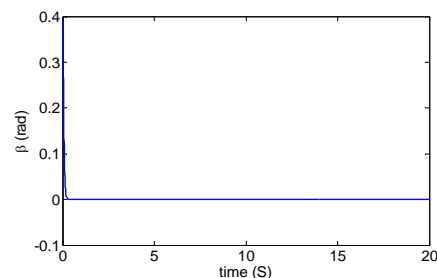
بررسی نتایج نشان می‌دهد که کنترل فازی تطبیقی توانسته است با کنترل خطی سازی پس‌خورده رقابت نماید. با این تفاوت که برای طراحی کنترل خطی سازی پس‌خورده نیاز به مدل دقیق از سیستم است و هر گونه عدم قطعیت مدل می‌تواند عملکرد سیستم کنترل را تضعیف نماید ولی طراحی کنترل فازی تطبیقی مبتنی بر مدل دقیق نمی‌باشد و می‌تواند بر عدم قطعیت غلبه نماید.

جدول ۱- پارامترهای ربات

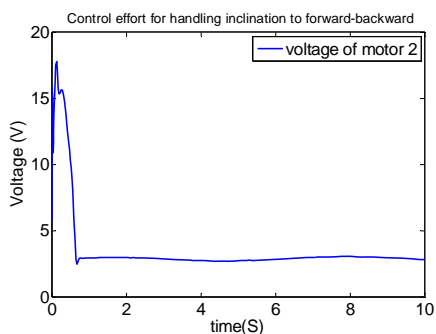
۰/۰۰۰۶۲۵	I_{sz}	۰/۱۵	I_{wbigz}
۰/۱۳	I_{wbigx}	۱/۷۶	$I_{wsmallx}$
۰/۲۸	$L(m)$	۱/۷۴	$I_{wsmallz}$
۰/۲۵	$R(m)$	۰/۰۰۰۱۲۵	I_{sx}
۱۵/۰۲	$M(kg)$	۰/۰۱۵	$r(m)$
۰/۱	$m(kg)$	۱۷/۸۷	$M_s(kg)$

جدول ۲- پارامترهای موتور

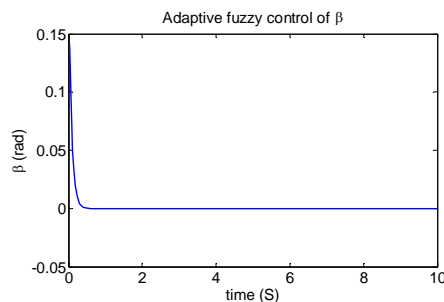
r	k_b	B_m	J_m	R	K_m
۰/۲۶	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۰۲	۱/۶	۰/۲۶



شکل ۱۰- انحراف به طرفین در خطی سازی پس‌خورده



شکل ۱۴- ولتاژ موتور ۲ (کنترل متغیر زتا)



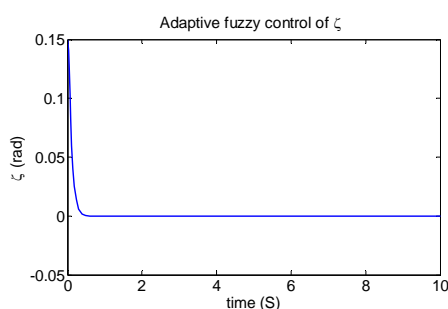
شکل ۱۰- جبران انحراف به طرفین در کنترل فازی

۶- نتیجه گیری

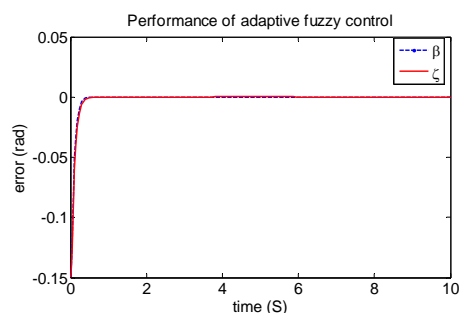
مدل جدید ربات تک چرخ چهار درجه آزادی برای اجرای راهبرد کنترل ولتاژ و راهبرد کنترل گشتاور ارائه شده است. طراحی کنترل کننده مبتنی بر راهبرد کنترل ولتاژ و راهبرد کنترل گشتاور انجام شده است. در راهبرد کنترل ولتاژ دینامیک های مکانیکی و الکتریکی محرکه ها لحاظ شده اند. هدف از کنترل، رفع انحرافات ایجاد شده توسط سرنشین است. مکانیزم حرکت ربات به این گونه است که سرنشین خود را به هر جهت خم کند ربات در آن جهت شروع به حرکت می کند. یک کنترل کننده خطی سازی پسخورد با راهبرد کنترل گشتاور طراحی شده است. همچنین یک کنترل کننده فازی تطبیقی با راهبرد کنترل ولتاژ ارائه شده است. نتایج شبیه سازی نمایانگر موفقیت کنترل کننده‌ها در رفع انحرافات است.

علایم و اختصارات

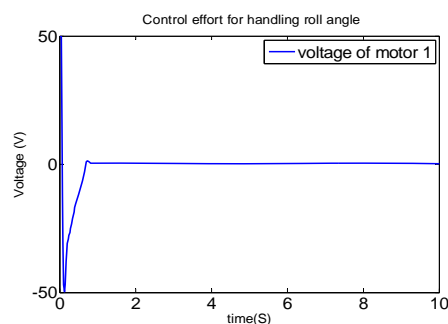
جرم محل استقرار سرنشین و شاسی	m_s
جرم چرخ بزرگ	M
جرم چرخ کوچک	m
شعاع چرخ بزرگ	R
شعاع چرخ کوچک	r
ممان اینرسی چرخ بزرگ حول محور Z	I_{wbigz}
ممان اینرسی چرخ بزرگ حول محور X	I_{wbigx}
ممان اینرسی چرخ کوچک حول محور X	$I_{wsmallx}$
ممان اینرسی چرخ کوچک حول محور Z	$I_{wsmallz}$
ممان اینرسی محل استقرار سرنشین حول Z	I_{sz}
ممان اینرسی محل استقرار سرنشین حول X	I_{sx}
مرکز جرم محل سرنشین تا مرکز چرخ	L



شکل ۱۱- جبران انحراف در کنترل فازی تطبیقی



شکل ۱۲- عملکرد سیستم کنترل فازی تطبیقی



شکل ۱۳- ولتاژ موتور ۱ (کنترل متغیر بتا)

- مراجع
- [16] Spong MW, Hutchinson S and Vidyasagar M (2006) Robot modelling and control, John Wiley & Sons, Inc, New York.
- [17] Rezvanian R (2013) Nonlinear control of one-wheeled vehicle with four degree of freedom, M.Sc. Thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Shahrood.
- [18] Fateh MM (2008) On the voltage-based control of robot manipulators. *International Journal of control* 6(5): 702–712.
- [19] Xu J, Mamun A and Daud Y (2011) Pendulum-balanced autonomous unicycle: Conceptual design and dynamics model, *IEEE Conference, RAM*, 51-56.
- [20] Nagarajan U, Kim B and Hollis R (2012) Planning in high dimensional shape space for a single-wheeled balancing mobile robot with arms. *IEEE Conference on Robotics and Automation*, pp. 130-135.
- [21] Fateh MM, Fateh S (2012) Decentralized direct adaptive fuzzy control of robots using voltage control strategy. *Nonlinear Dyn.* 70:1919-1930.
- [1] Pathak K, Franch J (2005) Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(3): 505-513.
- [2] Kappeler F (2007) Unicycle robot. *Automatic control laboratory*, Switzerland.
- [3] Sheng Z, Yamafuji K (1997) Postural stability of a human riding a unicycle and its emulation by a robot. *IEEE Transaction*, 13(5): 709–720.
- [4] Huang C (2010) The development of self-balancing controller for one-wheeled vehicles. *Engineering*: 2(4) 212-219.
- [5] Lee J, Shin H, Lee S and Jung S (2013) Balancing control of a single-wheel inverted pendulum system using air blowers. *Mechatronics*. 23(8) 926-932.
- [6] Ok S, Nakamura Y (2011) Stabilizing control of personal mobility with a spherical wheel. 13th congress in Mechanism and Machine Science, Mexico :19-25.
- [7] Hofer K (2005) Electric vehicle on one wheel. *IEEE Conference on Vehicle Power and Propulsion*: pp. 517-521.
- [8] Hofer K (2006) Observer_based drive control for self-balancing vehicle. 32nd Annual conference on IEEE Industrial Electronics, IECON 2006, Paris. pp. 3951-3956.
- [9] Xu J, Guo Z and Lee T (2011) An optimal fuzzy logic controller for an underactuated unicycle. *IECON 2011 - 37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, Melbourne, VIC. pp. 2335-2340.
- [10] Li Y, Tsai C and Lin C (2012) Intelligent adaptive steering control for electric unicycles. *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, Seoul, pp. 2457–2462.
- [11] Park J H, Jung S (2013) Development and control of a single-wheel robot: Practical Mechatronics approach. *Journal of elsevier, Mechatronics* 23: 594-606.
- [12] Lee J, Han S (2013) Decoupled dynamic control for pitch and roll axes of the unicycle robot. *IEEE Transaction on industrial electronics*, 60(9): 3814–3822.
- [13] Ha M, Jung S (2014) Neural network control for the balancing performance of a single-wheel transportation vehicle. *Robot intelligence Technology and Applications*, 274, pp 877-885.
- [14] Meriam JL, Kraige LG (2007) *Engineering mechanics dynamics*. Sixth edition, Mwc CGBraw-hill.
- [15] Yangsheng X, Yongsheng O (2005) *Control of single wheel robots*. Springer.

پیوست

معادلات حرکت ربات تک‌چرخ به صورت زیر بدست آمده‌است [۱۷]:

$$\begin{aligned} & \left((2MRr + 66.26mRr + 2m_s Rr + 2m_s Lr \cos \zeta) + (I_{Sx} - I_{Sz} + I_{WBigx} - I_{WBigz}) \cos \beta \right) \ddot{\theta} \cos \beta \\ & + \left(MR^2 + 51.22mR^2 + m_s R^2 \right) \cos \beta + \left(m_s L^2 \cos^2 \zeta + 2m_s LR \cos \zeta \right) \cos \beta \\ & + \left((I_{WBigz} + 32I_{Wsmallx} + I_{Sz} + 15.mR^2 + Mr^2 + 32mr^2 + m_s L^2 + m_s r^2) - m_s L^2 \cos^2 \zeta \right) \ddot{\theta} \\ & + \left(-11.71mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \cos^2 \beta + 31mRr (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) - 0.38mR^2 \right. \\ & \left. + 33.13mR^2 (\sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta) \cos \beta + 5.85mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + m_s LR \sin \zeta \right) \ddot{\beta} \sin \beta \\ & + \left(m_s (L^2 + LR \cos \zeta) \cos \beta + I_{Sx} \cos \beta + m_s Lr \cos \zeta \right) \ddot{\zeta} + (11.71mRr \cos \beta + 5.85I_{Wsmallx}) \ddot{\psi} \sin \beta \\ & + 2m_s L (L \cos \zeta \sin^2 \beta - (R \cos \beta + r) \cos \beta) \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \zeta - m_s L (r + R \cos \beta) \dot{\zeta}^2 \sin \zeta \\ & + \left((-2MR^2 - 2m_s R^2 - 102.45mR^2 + 2I_{WBigz} - 2I_{WBigx} - 2I_{Sx} + 2I_{Sz}) \cos \beta \right. \\ & \left. - (2MRr - 66.26mRr + 2m_s Rr) - 2m_s L (r + 2R \cos \beta + L \cos \zeta \cos \beta) \cos \zeta \right) \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta \\ & + \left(29.27mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + 31mRr (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) - 0.38mR^2 \right. \\ & \left. - 35.13mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \cos^2 \beta \right) \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ & + (2.13mR^2 \sin^2 \beta + m_s LR \sin \zeta \cos \beta + 33.13mR^2 \sin \theta \cos \theta + mR^2 (-62 \cos^2 \beta + 28.86) \cos^2 \theta) \dot{\beta}^2 \\ & - 11.7mRr \dot{\beta} \dot{\psi} + (23.42mRr \cos \beta + 5.85I_{Wsmallx}) \dot{\beta} \dot{\psi} \cos \beta + m_s gL \cos \zeta \cos \beta \cos \theta - (I_{Sx} + m_s L^2) \dot{\beta} \dot{\zeta} \sin \beta \\ & + (M + 32m + m_s) Rg \cos \theta \cos \beta - m_s gL \sin \zeta \sin \theta + (M + 32m + m_s) rg \cos \theta = T_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(+m_s LR \sin \zeta \sin \beta + 31mRr \sin \beta (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) + 33.13mR^2 \sin \beta \cos \beta (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) \right) \ddot{\theta} \\ & \left(-0.38mR^2 \sin \beta + 5.85mR^2 \sin \beta (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) - 11.7mR^2 \cos^2 \beta \sin \beta (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) \right) \ddot{\theta} \\ & + (I_{WBigz} + 31I_{Wsmallz} + mR^2 (66.26 \cos^2 \theta + 4.26 \sin \theta \cos \theta) \sin^2 \beta + (M + 15.96m + m_s) R^2) \ddot{\beta} \\ & + (-2.13I_{Wsmallz} + (M + 2.13m + m_s) Rr \cos \beta) \ddot{\psi} + (11.7mRr - 23.42mRr \cos^2 \beta - 5.85I_{Wsmallx} \cos \beta) \dot{\theta} \dot{\psi} \\ & + \left((62mRr + 66.26mR^2 \cos \beta) (\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta) + m_s L (2R \cos \beta + r) \cos \zeta + m_s L^2 \cos^2 \zeta \cos \beta \right. \\ & \left. - 23.4mR^2 (\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta) \cos^2 \beta + (MRr + 2.13mRr - 5.85mR^2 + m_s Rr) \right. \\ & \left. + 11.7mR^2 (\cos^2 \theta + \cos^2 \beta - \cos \theta \sin \theta) + (MR^2 + 18.09mR^2 + m_s R^2 + I_{Sx} - I_{Sz} + I_{WBigx} - I_{WBigz}) \cos \beta \right) \dot{\theta}^2 \sin \beta \\ & + mR^2 (66.26 \cos^2 \theta + 4.26 \sin \theta \cos \theta) \dot{\beta}^2 \cos \beta \sin \beta + (2m_s LR \cos \zeta + I_{Sx} + m_s L^2) \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \beta + m_s Lr \dot{\zeta} \dot{\psi} \sin \zeta \cos \beta \\ & + (-4.26mR^2 \sin^2 \beta + mR^2 (8.53 \cos^2 \theta - 132.5 \cos \theta \sin \theta) \sin^2 \beta) \dot{\beta} \dot{\theta} - (M + 32m + m_s) gR \sin \theta \sin \beta \\ & - m_s gL \cos \zeta \sin \beta \sin \theta = -T_\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (m_s Lr \cos \zeta + m_s LR \cos \zeta \cos \beta + m_s L^2 \cos \beta + I_{Sx} \cos \beta) \ddot{\theta} - (m_s Lr \sin \zeta \sin \beta) \ddot{\psi} + (m_s L^2 + I_{Sx}) \ddot{\zeta} \\ & - (2m_s LR \cos \zeta + m_s L^2 + I_{Sx}) \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta - m_s L^2 \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos \zeta \sin^2 \beta + m_s L \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos \beta (r + R \cos \beta) \\ & - m_s Lr \dot{\psi} \dot{\beta} \sin \zeta \cos \beta + m_s g (L \cos \zeta \cos \theta - L \sin \zeta \cos \beta \sin \theta) = -T_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (11.7mRr \cos \beta + 5.85I_{W_{smallx}}) \sin \beta \ddot{\theta} + \left((M + 2.13m + m_s) Rr \cos \beta - 2.13I_{W_{smallz}} \right) \ddot{\beta} \\ & + (Mr^2 + 32mr^2 + m_s r^2 + 16.96I_{W_{smallz}} + 15.04I_{W_{smallx}}) \ddot{\psi} - m_s Lr \ddot{\zeta} \sin \zeta \sin \beta \\ & - (M + 2.13m + m_s) Rr \dot{\beta}^2 \sin \beta - m_s Lr \dot{\zeta}^2 \cos \zeta \sin \beta - m_s Lr \dot{\beta} \dot{\zeta} \sin \zeta \cos \beta \\ & + (23.42mRr \cos^2 \beta - 11.7mRr + 5.85I_{W_{smallx}} \cos \beta) \dot{\beta} \dot{\theta} = T_\psi \end{aligned}$$

معادلات حرکت را به صورت زیر می‌توان مرتب نمود:

(۱)

$$A_{11} \ddot{\theta} + A_{12} \ddot{\beta} + A_{13} \ddot{\xi} + A_{14} \ddot{\psi} = T_\theta + w_1$$

(۲)

$$A_{21} \ddot{\theta} + A_{22} \ddot{\beta} + A_{23} \ddot{\xi} + A_{24} \ddot{\psi} = -T_\psi + w_2$$

(۳)

$$A_{31} \ddot{\theta} + A_{32} \ddot{\beta} + A_{33} \ddot{\xi} + A_{34} \ddot{\psi} = -T_\theta + w_3$$

(۴)

$$A_{41} \ddot{\theta} + A_{42} \ddot{\beta} + A_{43} \ddot{\xi} + A_{44} \ddot{\psi} = T_\psi + w_4$$

از آنجایی که هدف اصلی کنترل، حذف انحرافات β و ξ است، دو معادله (۲) و (۳) از دسته معادله فوق را که مربوط به β و ξ را نگه داشته و با جمع معادلات (۱) و (۳) و همچنین (۲) و (۴)، دو معادله اول از دسته معادله ذیل تشکیل شده و در نتیجه معادله سیستم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(A_{11} + A_{31}) \ddot{\theta} + (A_{14} + A_{34}) \ddot{\psi} + (A_{12} + A_{32}) \ddot{\beta} + (A_{13} + A_{33}) \ddot{\xi} = w_1 + w_3$$

$$(A_{21} + A_{41}) \ddot{\theta} + (A_{24} + A_{44}) \ddot{\psi} + (A_{22} + A_{42}) \ddot{\beta} + (A_{23} + A_{43}) \ddot{\xi} = w_2 + w_4$$

$$A_{21} \ddot{\theta} + A_{24} \ddot{\psi} + A_{22} \ddot{\beta} + A_{23} \ddot{\xi} = -T_\psi + w_2$$

$$A_{31} \ddot{\theta} + A_{34} \ddot{\psi} + A_{32} \ddot{\beta} + A_{33} \ddot{\xi} = -T_\theta + w_3$$

که به صورت ماتریسی زیر بیان می‌شود:

$$A \ddot{X} = BU + W$$

که در آن

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{31} & A_{14} + A_{34} & A_{12} + A_{32} & A_{13} + A_{33} \\ A_{21} + A_{41} & A_{24} + A_{44} & A_{22} + A_{42} & A_{23} + A_{43} \\ A_{21} & A_{24} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{34} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} w_1 + w_3 \\ w_2 + w_4 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \left(\left((2MRr + 66.26mRr + 2m_s Rr + 2m_s Lr \cos \zeta) + (I_{S_x} - I_{S_z} + I_{WB_{igx}} - I_{WB_{igy}}) \cos \beta \right) \cos \beta \right. \\
 &\quad \left. + (MR^2 + 51.22mR^2 + m_s R^2) \cos \beta + (m_s L^2 \cos^2 \zeta + 2m_s LR \cos \zeta) \cos \beta \right. \\
 &\quad \left. + (I_{WB_{igy}} + 32I_{W_{smallx}} + I_{S_z} + 15.mR^2 + Mr^2 + 32mr^2 + m_s L^2 + m_s r^2) - m_s L^2 \cos^2 \zeta \right) \\
 A_{12} &= \left(-11.71mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \cos^2 \beta + 31mRr (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) + m_s LR \sin \zeta \right) \sin \beta \\
 &\quad \left(+33.13mR^2 (\sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta) \cos \beta + 5.85mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) - 0.38mR^2 \right) \\
 A_{13} &= (m_s (L^2 + LR \cos \zeta) \cos \beta + I_{S_x} \cos \beta + m_s Lr \cos \zeta) \\
 A_{14} &= (11.71mRr \cos \beta + 5.85I_{W_{smallx}}) \sin \beta \\
 A_{21} &= \left(+m_s LR \sin \zeta \sin \beta + 31mRr \sin \beta (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) + 33.13mR^2 \sin \beta \cos \beta (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) \right) \\
 &\quad \left(-0.38mR^2 \sin \beta + 5.85mR^2 \sin \beta (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) - 11.7mR^2 \cos^2 \beta \sin \beta (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) \right) \\
 A_{22} &= (I_{WB_{igy}} + 31I_{W_{smallz}} + mR^2 (66.26 \cos^2 \theta + 4.26 \sin \theta \cos \theta)) \sin^2 \beta + (M + 15.96m + m_s) R^2 \\
 A_{23} &= 0 \\
 A_{24} &= (-2.13I_{W_{smallz}} + (M + 2.13m + m_s) Rr \cos \beta) \\
 A_{31} &= (m_s Lr \cos \zeta + m_s LR \cos \zeta \cos \beta + m_s L^2 \cos \beta + I_{S_x} \cos \beta) \\
 A_{32} &= 0 \\
 A_{33} &= (m_s L^2 + I_{S_x}) \\
 A_{34} &= -(m_s Lr \sin \zeta \sin \beta) \\
 A_{41} &= (11.7mRr \cos \beta + 5.85I_{W_{smallx}}) \sin \beta \\
 A_{42} &= ((M + 2.13m + m_s) Rr \cos \beta - 2.13I_{W_{smallz}}) \\
 A_{43} &= -m_s Lr \sin \zeta \sin \beta \\
 A_{44} &= (Mr^2 + 32mr^2 + m_s r^2 + 16.96I_{W_{smallz}} + 15.04I_{W_{smallx}}) \\
 w_1 &= - \left(\begin{aligned}
 &+2m_s L (L \cos \zeta \sin^2 \beta - (R \cos \beta + r) \cos \beta) \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \zeta - m_s L (r + R \cos \beta) \dot{\zeta}^2 \sin \zeta \\
 &+ \left((-2MR^2 - 2m_s R^2 - 102.45mR^2 + 2I_{WB_{igy}} - 2I_{WB_{igx}} - 2I_{S_x} + 2I_{S_z}) \cos \beta \right. \\
 &\quad \left. - (2MRr - 66.26mRr + 2m_s Rr) - 2m_s L (r + 2R \cos \beta + L \cos \zeta \cos \beta) \cos \zeta \right) \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta \\
 &+ \left(29.27mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + 31mRr (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) - 0.38mR^2 \right) \dot{\beta}^2 \cos \beta \\
 &\quad \left(-35.13mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \cos^2 \beta \right. \\
 &\quad \left. + \left(2.13mR^2 \sin^2 \beta + m_s LR \sin \zeta \cos \beta + 33.13mR^2 \sin \theta \cos \theta \right) \dot{\beta}^2 - (I_{S_x} + m_s L^2) \dot{\beta} \dot{\zeta} \sin \beta \right. \\
 &\quad \left. + mR^2 (-62 \cos^2 \beta + 28.86) \cos^2 \theta \right. \\
 &\quad \left. - 11.7mRr \dot{\beta} \dot{\psi} + (23.42mRr \cos \beta + 5.85I_{W_{smallx}}) \dot{\beta} \dot{\psi} \cos \beta + m_s gL \cos \zeta \cos \beta \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. + (M + 32m + m_s) Rg \cos \theta \cos \beta - m_s gL \sin \zeta \sin \theta + (M + 32m + m_s) rg \cos \theta \right)
 \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$

$$w_2 = - \left(\begin{aligned} & \left(11.7mRr - 23.42mRr \cos^2 \beta - 5.85I_{W_{smallx}} \cos \beta \right) \dot{\theta} \dot{\psi} + \left(2m_s LR \cos \zeta + I_{S_x} + m_s L^2 \right) \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \beta \\ & \left(62mRr + 66.26mR^2 \cos \beta \right) \left(\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta \right) + m_s L \left(2R \cos \beta + r \right) \cos \zeta + m_s L^2 \cos^2 \zeta \cos \beta \\ & - 23.4mR^2 \left(\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta \right) \cos^2 \beta + \left(MR^2 + 18.09mR^2 + m_s R^2 + I_{S_x} - I_{S_z} + I_{WB_{qz}} \right) \cos \beta \\ & - I_{WB_{qz}} \cos \beta + 11.7mR^2 \left(\cos^2 \theta + \cos^2 \beta - \cos \theta \sin \theta \right) + \left(MRr + 2.13mRr - 5.85mR^2 + m_s Rr \right) \\ & + m_s Lr \dot{\zeta} \dot{\psi} \sin \zeta \cos \beta - m_s g L \cos \zeta \sin \beta \sin \theta + mR^2 \left(66.26 \cos^2 \theta + 4.26 \sin \theta \cos \theta \right) \dot{\beta}^2 \cos \beta \sin \beta \\ & + \left(-4.26mR^2 \sin^2 \beta + mR^2 \left(8.53 \cos^2 \theta - 132.5 \cos \theta \sin \theta \right) \sin^2 \beta \right) \dot{\beta} \dot{\theta} - \left(M + 32m + m_s \right) g R \sin \theta \sin \beta \end{aligned} \right) \dot{\theta}^2 \sin \beta$$

$$w_3 = - \left(\begin{aligned} & - \left(2m_s LR \cos \zeta + m_s L^2 + I_{S_x} \right) \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta - m_s L^2 \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos \zeta \sin^2 \beta - m_s Lr \dot{\psi} \dot{\beta} \sin \zeta \cos \beta \\ & + m_s L \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos \beta \left(r + R \cos \beta \right) + m_s g \left(L \cos \zeta \cos \theta - L \sin \zeta \cos \beta \sin \theta \right) \end{aligned} \right)$$

$$w_4 = - \left(\begin{aligned} & - \left(M + 2.13m + m_s \right) Rr \dot{\beta}^2 \sin \beta - m_s Lr \dot{\zeta}^2 \cos \zeta \sin \beta - m_s Lr \dot{\beta} \dot{\zeta} \sin \zeta \cos \beta \\ & + \left(23.42mRr \cos^2 \beta - 11.7mRr + 5.85I_{W_{smallx}} \cos \beta \right) \dot{\beta} \dot{\theta} \end{aligned} \right)$$

معادله (۱۴) در مقاله به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(۵) \quad A_{11} \ddot{\theta} + A_{12} \ddot{\beta} + A_{13} \ddot{\xi} + A_{14} \ddot{\psi} = T_{\theta} + w_1$$

(۶)

$$A_{21} \ddot{\theta} + A_{22} \ddot{\beta} + A_{23} \ddot{\xi} + A_{24} \ddot{\psi} = -T_{\psi} + w_2$$

$$A_{31} \ddot{\theta} + A_{32} \ddot{\beta} + A_{33} \ddot{\xi} + A_{34} \ddot{\psi} = -T_{\theta} + w_3$$

(۷)

$$A_{41} \ddot{\theta} + A_{42} \ddot{\beta} + A_{43} \ddot{\xi} + A_{44} \ddot{\psi} = T_{\psi} + w_4 \quad (۸)$$

معادلات (۵) و (۷) را باهم جمع و معادلات (۶) و (۸) را باهم جمع می‌کنیم:

$$(A_{11} + A_{31}) \ddot{\theta} + (A_{12} + A_{32}) \ddot{\beta} + (A_{13} + A_{33}) \ddot{\xi} + (A_{14} + A_{34}) \ddot{\psi} = w_1 + w_3 \quad (۹)$$

$$(A_{21} + A_{41}) \ddot{\theta} + (A_{22} + A_{42}) \ddot{\beta} + (A_{23} + A_{43}) \ddot{\xi} + (A_{24} + A_{44}) \ddot{\psi} = w_2 + w_4 \quad (۱۰)$$

اکنون $\ddot{\theta}, \ddot{\psi}$ را برحسب $\ddot{\beta}, \ddot{\xi}$ بدست می‌آوریم:

(۱۱)

$$\ddot{\theta} = \left(\begin{aligned} & \frac{(A_{14} + A_{34})(w_2 + w_4 + (A_{22} + A_{42}) \ddot{\beta} + A_{43} \ddot{\xi})}{A_{11}A_{24} - A_{14}A_{21} + A_{11}A_{44} - A_{14}A_{41} - A_{21}A_{34} + A_{24}A_{31} - A_{41}A_{34} + A_{44}A_{31}} \\ & - \frac{(A_{24} + A_{44})(w_1 + w_3 + (A_{13} + A_{33}) \ddot{\xi} + A_{12} \ddot{\beta})}{A_{11}A_{24} - A_{14}A_{21} + A_{11}A_{44} - A_{14}A_{41} - A_{21}A_{34} + A_{24}A_{31} - A_{41}A_{34} + A_{44}A_{31}} \end{aligned} \right)$$

(۱۲)

$$\ddot{\psi} = \left(\frac{(A_{21} + A_{41})(w_1 + w_3 + (A_{13} + A_{33})\ddot{\xi} + A_{12}\ddot{\beta})}{A_{11}A_{24} - A_{14}A_{21} + A_{11}A_{44} - A_{14}A_{41} - A_{21}A_{34} + A_{24}A_{31} - A_{41}A_{34} + A_{44}A_{31}} - \frac{(A_{11} + A_{31})(w_2 + w_4 + (A_{22} + A_{42})\ddot{\beta} + A_{43}\ddot{\xi})}{A_{11}A_{24} - A_{14}A_{21} + A_{11}A_{44} - A_{14}A_{41} - A_{21}A_{34} + A_{24}A_{31} - A_{41}A_{34} + A_{44}A_{31}} \right)$$

حال روابط (۷) و (۸) را در معادلات (۲) و (۳) جایگذاری می‌کنیم:

$$\left(\begin{aligned} &(A_{22}g + A_{21}(A_{14} + A_{34})(A_{22} + A_{42}) - A_{21}(A_{24} + A_{44})A_{12}) \\ &+ A_{24}(A_{21} + A_{41})A_{12} - A_{24}(A_{11} + A_{31})(A_{22} + A_{42}) \ddot{\beta} + \\ &(A_{21}(A_{14} + A_{34})A_{43} - A_{21}(A_{24} + A_{44})(A_{13} + A_{33}) + \\ &A_{24}(A_{21} + A_{41})(A_{13} + A_{33}) - A_{24}(A_{11} + A_{31})A_{43}) \ddot{\xi} + \\ &(A_{21}(A_{14} + A_{34})(w_2 + w_4) - A_{21}(A_{24} + A_{44})(w_1 + w_3) + \\ &A_{24}(A_{21} + A_{41})(w_1 + w_3) - A_{24}(A_{11} + A_{31})(w_2 + w_4)) \end{aligned} \right) = -T_\psi g + w_2 g \quad (۱۳)$$

$$\left(\begin{aligned} &(A_{31}(A_{14} + A_{34})(A_{22} + A_{42}) - A_{31}(A_{24} + A_{44})A_{12}) \\ &+ A_{34}(A_{21} + A_{41})A_{12} - A_{34}(A_{11} + A_{31})(A_{22} + A_{42}) \ddot{\beta} + \\ &(A_{33}g + A_{31}(A_{14} + A_{34})A_{43} - A_{31}(A_{24} + A_{44})(A_{13} + A_{33}) + \\ &A_{34}(A_{21} + A_{41})(A_{13} + A_{33}) - A_{34}(A_{11} + A_{31})A_{43}) \ddot{\xi} + \\ &(A_{31}(A_{14} + A_{34})(w_2 + w_4) - A_{31}(A_{24} + A_{44})(w_1 + w_3) + \\ &A_{34}(A_{21} + A_{41})(w_1 + w_3) - A_{34}(A_{11} + A_{31})(w_2 + w_4)) \end{aligned} \right) = -T_\theta g + w_3 g \quad (۱۴)$$

$$g = A_{11}A_{24} - A_{14}A_{21} + A_{11}A_{44} - A_{14}A_{41} - A_{21}A_{34} + A_{24}A_{31} - A_{41}A_{34} + A_{44}A_{31}$$

با تعریف M_1 به عنوان ضریب $\ddot{\beta}$ ، N_1 ضریب $\ddot{\xi}$ در معادله (۱۳) و M_2 ضریب $\ddot{\xi}$ و N_2 ضریب $\ddot{\beta}$ در معادله (۱۴) معادلات (۱۳) و (۱۴) را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} -T_\psi \\ -T_\theta \end{bmatrix}$$

$$k_1 = w_2 g - (A_{21}(A_{14} + A_{34})(w_2 + w_4) - A_{21}(A_{24} + A_{44})(w_1 + w_3) + A_{24}(A_{21} + A_{41})(w_1 + w_3) - A_{24}(A_{11} + A_{31})(w_2 + w_4))$$

$$k_2 = w_3 g - (A_{31}(A_{14} + A_{34})(w_2 + w_4) - A_{31}(A_{24} + A_{44})(w_1 + w_3) + A_{34}(A_{21} + A_{41})(w_1 + w_3) - A_{34}(A_{11} + A_{31})(w_2 + w_4))$$

پارامترهای معادله (۲۴) در مقاله به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$MA = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{24} \\ A_{31} & A_{34} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} A_{22} & 0 \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$