مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال 1393/ دوره 4/ شماره 2/ صفحه 89-101

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

شبیه‌سازی عددی جریان پلاسمای غیرتعادلی در یک رانشگر پلاسمایی مغناطیسی

مهدی آهنگر[1,*]، رضا ابراهیمی[2] و مهرزاد شمس[3]

[1] دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

[2] دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

[3] دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

تاریخ دریافت: 1392/12/16؛ تاریخ بازنگری: 1393/02/02؛ تاریخ پذیرش: 1393/04/25

چکیده

حل معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی با استفاده از روش‌های مبتنی بر تفکیک مشخصه‌ها که دارای لزجت عددی کمی هستند، در جریان‌های پلاسما با ضریب بتای کوچک غالباً واگرا می‌گردد. افزایش همزمان سهم انرژی مغناطیسی (به دلیل کوچک بودن پارامتر بتا) و انرژی جنبشی (به دلیل وقوع انبساط‌های قوی) باعث کاهش سهم انرژی داخلی از انرژی کل شده و نهایتاً فشار در سلول‌های مجاور نوک الکترودها منفی می‌شود. در این پژوهش، جهت دستیابی به حل پایدار از روش ریمانی غیرتفکیکی HLLE استفاده شده است. این روش قادر است لزجت عددی لازم برای جلوگیری از نقض شرط انتروپی در انبساط‌های قوی را تأمین نماید. همچنین جهت افزایش دقت حل عددی روش OMUSCL2 که دارای خطای پراکندگی کمینه می‌باشد، به کار گرفته شده است. با توجه به ماهیت غیرتعادلی جریان پلاسما در رانشگرهای مغناطیسی، یک مدل یونش 7 جزئی مورد استفاده قرار گرفته است. به منظور اعتبارسنجی الگوریتم عددی توسعه داده شده، یک رانشگر استوانه‌ای شبیه‌سازی شد. مقایسه نتایج عددی بدست آمده برای جریان الکتریکی محصور و نیروی پیشران با سایر داده‌های تجربی و عددی، حاکی از سازگاری و تطابق بین آن‌هاست.

کلمات کلیدی: معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی؛ نیروی لورنتز؛ اثر هال؛ یونش غیرتعادلی؛ مدلسازی عددی.

Numerical Simulation of Non-equilibrium Plasma Flow in a Magneto-plasmadynamic Thruster

M. Ahangar[1,*], R. Ebrahimi[2] and M. Shams[3]

[1] Ph.D. Student, Aero. Eng., K.N. Toosi University, Tehran, Iran

[2] Assoc. Prof., Aero. Eng., K.N. Toosi University, Tehran, Iran

[3] Assoc. Prof., Mech. Eng., K.N. Toosi University, Tehran, Iran

Abstract

The MHD equations solution for small plasma Beta using characteristics-splitting schemes which have low numerical dissipation is frequently diverged. Simultaneous increasing of magnetic energy (due to high discharge current) and kinetic energy (due to strong gas-dynamic expansion) leads to decreasing of internal energy and finally the pressure value becomes negative near the electrodes tip. In this research, to obtain a stable solution, the HLLE approximate Riemann solver has been used. This method can produce necessary numerical dissipation to prevent entropy violation. To achieve a high order accurate solution, new modification of MUSCL technique has been employed. This method is called OMUSCL2 technique which has lower dispersion and dissipation errors. For simulation of non-equilibrium ionization mechanism, a 7-species chemistry model has been implemented. Numerical results of a lab-scale thruster are presented, whereby comparison with other experimental and numerical data shows good agreement between the predicted and measured enclosed current and thrust.

Keywords: Magnetohydrodynamic equations; Lorentz force; Hall effect; Non-equilibrium ionization; Numerical modeling.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: 982177791044+؛ فکس: 982177791045+

آدرس پست الکترونیک: m.ahangar@dena.kntu.ac.ir

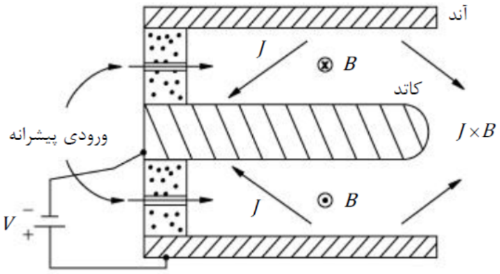
1- مقدمه

رانشگرهای الکتریکی یکی از انواع خانواده سیستم‌های پیشرانش فضایی هستند که مکانیزم شتابدهی گاز خروجی توسط آن‌ها بر اساس توان الکتریکی ورودی به رانشگر صورت می‌گیرد. با استفاده از قانون اهم توان الکتریکی بر واحد حجم رانشگر برابر است با:

$$J \cdot E = \eta j^2 + (J \times B) \cdot V \quad (1)$$

که در آن J بردار چگالی جریان الکتریکی، E بردار میدان الکتریکی، j اندازه چگالی جریان الکتریکی، B بردار میدان مغناطیسی، V بردار سرعت پیشرانه و η مقاومت الکتریکی می‌باشد. با بیشینه کردن مقدار عبارت اول (حرارت اهمی)، در سمت راست رابطهٔ (1) توان الکتریکی صرف افزایش آنتالپی پیشرانه می‌شود. سپس با انبساط پیشرانه در یک نازل، آنتالپی پیشرانه به انرژی جنبشی تبدیل می‌گردد. رانشگرهایی که از این مکانیزم شتابدهی استفاده می‌کنند، رانشگر قوسی[1] نامیده می‌شوند. عبارت دوم سمت راست رابطهٔ (1) بیانگر کار انجام شده توسط نیروی لورنتز است که تحت شرایط کاری با دبی جرمی کم و جریان تخلیه الکتریکی بالا افزایش می‌یابد. افزایش این عبارت، ایدهٔ اصلی شتابدهی گاز پلاسما در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی[2] (MPD) است که در پژوهش‌های تجربی مربوط به رانشگرهای قوسی، در دههٔ 50 میلادی شکل گرفت. در شکل 1 طرحواره‌ای از یک رانشگر پلاسمایی مغناطیسی نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، با عبور جریان گاز خنثی از میان الکترودها و اعمال اختلاف ولتاژ (بین چند صد تا چند هزار ولت)، جریان گاز عبوری یونیزه شده و جریان پلاسما تشکیل می‌گردد. با توجه به خصوصیت رسانایی پلاسما، جریان الکتریکی چند هزار آمپری بین الکترودها برقرار می‌شود. این جریان الکتریکی آمپر بالا، یک میدان مغناطیسی محیطی حول کاتد القا می‌کند. نیروی لورنتز ($f_L = J \times B$) حاصل از اندرکنش جریان الکتریکی عبوری در محیط پلاسما و میدان مغناطیسی القایی، باعث شتاب گرفتن جریان گاز یونیزه شده، می‌شود [1].

1 Arcjet Thruster
2 Magnetoplasmadynamic Thruster



شکل 1- طرحواره‌ای از یک رانشگر MPD [1]

رانشگرهای MPD موجود بسته به توان ورودی‌شان دارای نیروی پیشرانی بین 100 mN تا 100 N هستند و سرعت گازهای خروجی‌شان به 10 تا 100 کیلومتر بر ثانیه می‌رسد. توان مصرفی این رانشگرها بین چندکیلووات تا چند مگاوات بوده و بازده‌شان بین 25٪ تا 60٪ می‌باشد [2]. بی‌تردید، بهبود عملکرد رانشگرهای MPD مستلزم شناخت پدیده‌های فیزیکی و شیمیایی مرتبط با آن است. ضرورت شناخت و مطالعهٔ اندرکنش پدیده‌هایی نظیر فرآیند یونش غیرتعادلی، اثر هال، اثر ریزناپایداری‌های میکروسکوپیک، انبساط‌های قوی، عدم تعادل گرمایی اجزا شیمیایی و ... سبب شده تا توسعهٔ ابزار دینامیک سیالات محاسباتی بیش از پیش در این حوزه مورد توجه قرار گیرد. در ادامه به برخی از مهم‌ترین مطالعات عددی صورت گرفته پیرامون شبیه‌سازی عددی جریان در رانشگرهای MPD اشاره می‌شود.

نایوود[3] [3]، مدل تقارن محوری برای حل معادلات حاکم بر رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی ارائه کرد. او برای حل معادلات از روش اختلاف محدود استفاده نمود. در این پژوهش بردار شار معادلات سیال در جهت محوری توسط روش تفکیک بردار شار استیگر-وارمینگ[4] و بردار شار در جهت شعاعی به کمک روش روزانوف[5] و معادلهٔ دمای الکترون نیز با روش مک‌کورمک[6] حل شده‌اند. معادلهٔ میدان مغناطیسی نیز با توجه به مقادیر میدان الکتریکی در مرز سلول‌های محاسباتی گسسته شده است. کالدو[7] [4]، مدلی دوبعدی را به منظور مطالعهٔ اثر انتقال غیرعادی[8] توسعه داد.

3 Niewood
4 Steger-Warming Flux Vector Splitting Method
5 Rusanov's Scheme
6 MacCormack's Method
7 Caldo
8 Anomalous Transport

در این پژوهش معادلات سیال به صورت گذرا و معادلهٔ میدان مغناطیسی به صورت پایا در نظر گرفته شده و معادلات در قالب اختلاف محدود و با روش چند شبکه‌ای حل شدند. اِلاسکار و بریتو[1] [5] معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی را به کمک روش شار محدود یی[2] حل نمودند. در این پژوهش مقادیر و بردارهای ویژه با استفاده از روش پاول[3] محاسبه شده‌اند. تاکِدا و یاماموتو[4] [6] نیز یک رانشگر تقارن‌محوری را را مورد مطالعه قرار دادند. در این پژوهش برای محاسبه بردار شار جابه‌جایی از روش تفکیک بردار شار اصلاح شده یاماموتو، به همراه روش MUSCL[5] استفاده شده است. برای روند حل زمانی معادلات نیز روش ضمنی LU-SGS[6] اعمال شده است. سنکاران[7] [7]، معادلات بقا و معادلهٔ معادلهٔ میدان مغناطیسی را به صورت خودسازگار[8] و در قالب حجم محدود برای شبیه‌سازی جریان در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی توسعه داد. او برای حل معادلات از روش تفکیک مشخصه‌ها استفاده نمود. در این پژوهش یکنوایی حل با به کارگیری روش شار محدود جیمسون[9] تضمین شده و مدل یونش تعادلی ساها[10] برای شبیه‌سازی فرآیند یونش گاز آرگون به کار گرفته شده است. همچنین اثر انتقال غیرعادی در معادلات لحاظ شده و دمای الکترون و یون به صورت غیرتعادلی (مدل چند-دمایی) در نظر گرفته شده است. مایکلیدس[11] و همکارانش [8]، کد محاسباتی MACH[12] را برای شبیه‌سازی جریان تقارن محوری گذرا در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی به کار گرفتند. این کد محاسباتی در نیمهٔ دههٔ 80 میلادی در نیروی هوایی آمریکا برای مطالعهٔ جریان پلاسما در هندسه‌های پیچیده توسعه داده شد. پیوسته‌ترین مطالعات پیرامون رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی در دانشگاه اشتوتگارت توسط کورتز[13] و همکارانش انجام شده است. روش‌های عددی به کار گرفته شده در نسخه‌های مختلف کدهای توسعه داده شده توسط این محققین متنوع می‌باشد و به مرور زمان ارتقاء یافته‌اند. به طور مثال در مرجع [9] از روش حجم محدود رو به باد گدونف[14] برای حل قسمت هذلولوی معادلات و از یک روش اختلاف محدود برای حل قسمت بیضوی معادلات استفاده شده است. در مرجع [10] روش اُشر[15] برای محاسبهٔ بردار شار غیرلزج اعمال شده است. در این پژوهش معادلات بیضوی بوسیلهٔ یک روش المان محدود گسسته شده‌اند. در جدیدترین نسخه [11]، برای محاسبهٔ بردار شار جابه‌جایی از روش HLLE[16] و برای گسسته‌سازی مکانی متغیرها از روش WENO[17] که توسط فردریش[18] ارائه گردید، استفاده شده است. ماهندران و کومار[19] [12] با استفاده از روش حجم محدود ارائه شده توسط فلچر[20]، بردار شار جابه‌جایی را محاسبه نمودند. در این پژوهش جهت جلوگیری از وقوع ناپایداری‌های عددی، لزجت مصنوعی مرتبه 2 و 4 جیمسون به معادلات اضافه شده است. به منظور پیشروی زمانی حل نیز روش ضمنی ADI[21] به کار گرفته شده است. کوبُتا[22] و همکارانش [13]، مدل دوبعدی گذرایی را برای شبیه‌سازی جریان پلاسما در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی توسعه دادند. در این پژوهش، بردار شار هذلولوی معادلات، با اعمال روش لاکس-فردریش[23] به همراه محدودکنندهٔ مین‌مود[24] حل شده است. همچنین، فرآیند یونش و دمای الکترون و یون‌ها به صورت غیرتعادلی در نظر گرفته شده‌اند. آهنگر و همکارانش [14] یک رانشگر تقارن‌محوری را شبیه‌سازی کردند. در این پژوهش بردار شار جابه‌جایی با استفاده از ترکیب روش رؤ[25] و پاول محاسبه شد. همچنین برای تعیین

[1] Elaskar and Brito
[2] Yee's Flux Limited-Method
[3] Powell's Technique
[4] Takeda and Yamamoto
[5] Monotone Upstream Scheme for Conservation Laws
[6] Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel
[7] Sankaran
[8] Self-Consistence
[9] Jameson's Flux-Limited Method
[10] Saha's Equilibrium Ionization Model
[11] Mikellides
[12] Multiblock Arbitrary Coordinate Hydromagnetic (MACH) Simulation Tool
[13] Kurtz
[14] Godunov Upwind Scheme
[15] Osher's Method
[16] Hartn, Lax, van-Leer and Einfeldt
[17] Weighted Essentially Non-Oscillatory
[18] Friedrich
[19] Mahendhran and Kumar
[20] Fletcher
[21] Alternating Direction Implicit Method
[22] Kubota
[23] Lax–Friedrichs Method
[24] minmod
[25] Roe

چگالی الکترون، مدل یونش تعادلی ساها مورد استفاده قرار گرفت.

هدف پژوهش حاضر شبیه‌سازی جریان پلاسمای غیرتعادلی در رانشگر پلاسمایی مغناطیسی است. بدین منظور، در پژوهش حاضر به جای مدل یونش تعادلی به کار گرفته شده در مرجع [14]، از یک مدل یونش غیرتعادلی 7 جزئی با 6 واکنش رفت و برگشتی استفاده شده است. اگرچه این امر باعث می‌شود تا چگالی یون‌های مرتبه بالا با دقت بهتری پیش‌بینی شود اما از سوی دیگر، با اضافه شدن 7 معادلهٔ انتقال جرم برای تعیین چگالی یون‌ها به معادلات اصلی، سختی حل[1] افزایش می‌یابد. تحت این شرایط به دلیل دلیل رفتار غیرخطی عبارت مولد[2] در معادلات انتقال اجزا شیمیایی، رفتار غیرخطی دستگاه معادلات تقویت شده و از سوی دیگر به دلیل لزجت عددی پایین روش‌های هم‌خانواده روش رؤ، ناپایداری‌های عددی رشد یافته و در نهایت حل عددی واگرا می‌شود. برای جلوگیری از بروز این مشکل، در پژوهش حاضر برخلاف پژوهش قبلی [14] که در آن از روش رؤ جهت محاسبه بردار شار جابه‌جایی استفاده شد، روش ریمانی غیرتفکیکی HLLE به کار گرفته شده است. این روش قادر است اولاً، لزجت عددی مورد نیاز جهت مستهلک کردن ناپایداری‌های عددی را تامین کند. ثانیاً، روش مذکور به دلیل عدم نیاز به محاسبهٔ بردارهای ویژه ماتریس ژاکوبین، در مقایسه با روش رؤ، دارای سرعت همگرایی بیشتر و هزینه زمانی کمتری است.

در ادامه، معادلات حاکم بر جریان پلاسما و زیرمدل‌های فیزیکی و شیمیایی مورد نیاز تشریح شده‌اند. سپس الگوریتم حل عددی به همراه هندسه و شرایط مرزی بیان شده و در نهایت نتایج به دست آمده برای یک رانشگر پلاسمایی مغناطیسی آزمایشگاهی، بررسی شده است.

2- معادلات حاکم

شبیه‌سازی رفتار ماکروسکوپیک جریان پلاسما مستلزم حل معادلات ناویر-استوکس به همراه معادلات ماکسول است. ترکیب این معادلات برای جریان پلاسما تحت میدان مغناطیسی به عنوان معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی[3] (MHD) شناخته می‌شود که شکل تقارن‌محوری آن در قالب برداری زیر، قابل نمایش است [7]:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F_r}{\partial r}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=S_r+D \tag{2}$$

که در آن $U=[\rho,\rho u,\rho w,B_\theta,\varepsilon]^T$ بردار متغیرهای بقایی است. F_r و F_z به ترتیب بردارهای شار جابه‌جایی در جهت شعاعی و طولی هستند که در رابطه (3) نمایش داده شده‌اند.

$$F_r=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p+\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\\ \rho uw\\ uB_\theta\\ u\left(\varepsilon+p+\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right)\end{bmatrix};F_z=\begin{bmatrix}\rho w\\ \rho wu\\ \rho w^2+p+\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\\ wB_\theta\\ w\left(\varepsilon+p+\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right)\end{bmatrix} \tag{3}$$

در این روابط، چگالی انرژی کل به کمک رابطه (4) تعریف می‌گردد.

$$\varepsilon=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{\rho u\cdot u}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0} \tag{4}$$

S_r نیز عبارت مولد شعاعی است که در شکل تقارن محوری معادلات MHD ظاهر می‌شود.

$$S_r=-\frac{1}{r}\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+\frac{B_\theta^2}{\mu_0}\\ \rho wu\\ 0\\ u\left(\varepsilon+p+\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right)\end{bmatrix} \tag{5}$$

در معادلهٔ (2)، D بردار شار نفوذی مغناطیسی-حرارتی است که با استفاده از رابطه (6) قابل محاسبه می‌باشد.

$$D=\frac{\partial}{\partial r}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\E_z'\\q_r\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-E_r'\\q_z\end{bmatrix}+\frac{1}{r}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\q_r\end{bmatrix}$$

$$q_r=\frac{E_z'B_\theta}{\mu_0}+k_e\frac{\partial T_e}{\partial r}+k_h\frac{\partial T_h}{\partial r}$$

$$q_z=\frac{-E_r'B_\theta}{\mu_0}+k_e\frac{\partial T_e}{\partial z}+k_h\frac{\partial T_h}{\partial z} \tag{6}$$

[1] Solution Stiffness
[2] Source Term
[3] Magnetohydrodynamic Equations

جهت محاسبهٔ میدان الکتریکی در رابطهٔ (6)، از قانون عمومی اهم[1] استفاده می‌شود. در این پژوهش سهم میدان الکتریکی ناشی از مولفهٔ اهمی و اثر هال در نظر گرفته شده است.

$$\left[E'_r, E'_z\right]^T = \left[\eta j_r - \frac{j_z B_\theta}{n_e e}, \eta j_z + \frac{j_r B_\theta}{n_e e}\right]^T \qquad (7)$$

با به کارگیری قانون آمپر[2]، مقادیر جریان الکتریکی به کمک رابطهٔ (8) محاسبه می‌شوند.

$$\left[j_r, j_z\right]^T = \left[-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_\theta}{\partial z}, \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r}\right]^T \qquad (8)$$

در رابطهٔ (7) ضریب مقاومت الکتریکی به شکل زیر تعیین می‌شود [4].

$$\eta = \frac{m_e\left(\sum_i \nu_{ei} + \nu_{e,AN}\right)}{e^2 n_e} \qquad (9)$$

در این رابطه، ν_{ei} فرکانس برخورد الکترون و یون‌ها می‌باشد و از رابطه (10) قابل حصول است.

$$\nu_{ei} = n_i Q_{ei}\sqrt{\frac{8k_B T_e}{\pi m_e}}$$
$$Q_{ei} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{Z_i e^2}{4\pi\varepsilon_0 k_B T_e}\right)^2 \qquad (10)$$
$$\times \ln\left(1 + \frac{144\pi^2\left(\varepsilon_0 k_B T_e\right)^3}{n_e e^6 Z_{eff}^2\left(Z_{eff}+1\right)}\right)$$

$\nu_{e,AN}$ فرکانس تبادل مومنتوم الکترون و امواج حاصل از ریزناپایداری‌هاست و در صورتی که نسبت سرعت رانش الکترون به سرعت حرارتی یون از 1/5 بیشتر شود، مقدار آن از رابطه تجربی (11) به دست می‌آید [15].

$$\frac{\nu_{e,\text{anomalous}}}{\sum_i \nu_{ei}} = \left\{0.192 + 3.33\times10^{-2}\Omega_e\right.$$
$$\left. + 0.212\Omega_e^2 - 8.27\times10^{-5}\Omega_e^3\right\} \qquad (11)$$
$$+\frac{T_h}{T_e}\left\{1.23\times10^{-3}\right.$$
$$\left. -1.58\times10^{-2}\Omega_e - 7.89\times10^{-3}\Omega_e^2\right\}$$

در رابطه (11)، $\Omega_e = eB/m_e\sum_s \nu_{es}$ متغیر هال الکترون است. لازم به ذکر است که وقوع ریزناپایداری‌ها موسوم به پدیده انتقال غیرعادی می‌باشد که منجر به افزایش افت ولتاژ و کاهش نیروی پیشران می‌شود [14].

با توجه به این که نسبت زمان مشخصهٔ حضور پیشرانه در رانشگر به زمان موازنهٔ انرژی بین الکترون‌ها و یون‌ها کم می‌باشد $\tau_{res}/\tau_{equi} = O(10)$، بنابراین ذرات پلاسما (یون‌ها و الکترون‌ها) در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی کاملاً در تعادل گرمایی نمی‌باشند [16]. در این شرایط برای الکترون‌ها و یون‌ها دماهای جداگانه‌ای در نظر گرفته می‌شود که محاسبهٔ آن‌ها مستلزم حل معادلهٔ انرژی جداگانه‌ای است. با کسر سهم انرژی جنبشی، انرژی مغناطیسی و انرژی داخلی یون‌ها از معادلهٔ انرژی کل، مقدار انرژی داخلی الکترون (ε_e) از معادلهٔ (12) قابل محاسبه می‌باشد.

$$\frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left[(\varepsilon_e + p_e)u\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(\varepsilon_e + p_e)w\right]$$
$$+\frac{1}{r}(\varepsilon_e + p_e)u = u\frac{\partial p_e}{\partial r} + w\frac{\partial p_e}{\partial z} - \Delta\dot{\varepsilon}_{ie} \qquad (12)$$
$$+\eta\left(j_r^2 + j_z^2\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(k_e\frac{\partial T_e}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_e\frac{\partial T_e}{\partial z}\right)$$

$\Delta\dot{\varepsilon}_{ei}$ بیانگر تبادل انرژی بین الکترون‌ها و یون‌ها در اثر برخورد می‌باشد که از رابطه (13) قابل محاسبه است،

$$\Delta\dot{\varepsilon}_{ei} = \frac{3\rho_e \nu_{ei}}{M_i} k_B\left(T_e - T_i\right) \qquad (13)$$

با توجه به مرجع [17] ضریب هدایت حرارتی الکترون و یون را نیز می‌توان از روابط (14) به دست آورد.

$$k_e = 3.2\frac{k_B^2 n_e T_e}{m_e\sum_s \nu_{es}}$$
$$k_i = \sqrt{\frac{\pi k_B^3 T_h}{8M_i}}\left(\frac{n_i}{n_i Q_{ii} + n_0 Q_{i0}}\right) \qquad (14)$$

که در آن Q_{i0} و Q_{ii} از روابط (15) منتج می‌گردند.

$$Q_{i0} = 1.4\times10^{-18}$$
$$Q_{ii} = \frac{5.845\times10^{-10}}{T_h^2}\ln\left(1.239\times10^7\sqrt{\frac{T_h^3}{n_e}}\right) \qquad (15)$$

افت انرژی ناشی از انتقال حرارت تشعشعی در برخی از انواع جریان‌های پلاسما مهم است. اما مراجع [16] و [18] نشان می‌دهند که مقدار این اثر در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی در مقایسه با اثر سایر مکانیزم‌های تبادل انرژی ناچیز است و در نظر گرفته نمی‌شود.

---
1 Generalized Ohm's Law
2 Ampere's Law

با تعیین فشار جزئی الکترون از معادلهٔ (12) و کسر آن از فشار کل، فشار جزئی یون محاسبه شده و در نهایت، دمای یون نیز از معادلهٔ حالت به دست می‌آید. تعیین چگالی اجزاء شیمیایی تولیدی و مصرفی در حین فرآیند یونش، مستلزم حل معادلات انتقال یون‌ها است. بر این اساس چگالی تعداد ذرات مربوط به یون i -ام از معادلهٔ (16) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(n_i u)+\frac{\partial}{\partial z}(n_i w)+\frac{1}{r}(n_i u)=\dot{\omega}_i \qquad (16)$$

با توجه به این که در این پژوهش گاز آرگون به عنوان پیشرانه در نظرگرفته شده است. لذا در معادلهٔ (16) اندیس $i=0$ بیانگر اتم آرگون و اندیس $1 \le i \le 6$ بیانگر یون‌های مرتبهٔ بالای این اتم خنثی می‌باشد. سازوکار تبادل الکترون برای یون‌های گاز آرگون به شکل زیر می‌باشد.

$$\mathrm{Ar}^{(i)+}+\mathrm{e}^{-} \underset{k_{b,i}}{\overset{k_{f,i}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ar}^{(i+1)+}+2\mathrm{e}^{-};\ i=0,\ldots,5 \qquad (17)$$

در معادلهٔ (16)، $\dot{\omega}_i$ بیان کنندهٔ میزان تولید یا مصرف یون i -ام می‌باشد که برای مجموعهٔ واکنش‌های رفت و برگشتی (17)، براساس قانون اثر جرم به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\omega_0=-n_0 n_e k_{f,1}+n_1 n_e^2 k_{b,1}\\
&\omega_{i=1,..,5}=n_e\left(n_{i-1}k_{f,i}-n_i k_{f,i+1}\right)\\
&+n_e^2\left(n_{i+1}k_{b,i+1}-n_i k_{b,i}\right)\\
&\omega_6=-n_6 n_e^2 k_{b,6}+n_5 n_e k_{f,6}
\end{aligned} \qquad (18)$$

که در آن $k_{f,i}$ و $k_{b,i}$ به ترتیب ثابت نرخ واکنش رفت و برگشت می‌باشند. $k_{f,i}$ به شکل زیر قابل محاسبه است [19]،

$$\begin{aligned}
&k_{f,i}=6.7\times10^{-13}\left(\frac{e}{k_B T_e}\right)^{1.5}\times\\
&\sum_{i=1}^{3}a_i q_i\left[\frac{1}{A_i}F(A_i)-\frac{b_i\exp(c_i)}{A_i+c_i}F(A_i+c_i)\right]
\end{aligned} \qquad (19)$$

در این رابطه، پارامتر A_i برابر است با:

$$A_i=\frac{P_i}{k_B T_e} \qquad (20)$$

ضرائب تجربی a_i، b_i، c_i، q_i و P_i در مرجع [19] ارائه شده‌اند. تابع F در رابطهٔ (19) نیز دارای شکل زیر است.

$$\begin{aligned}
&F(x)=x^{-1}\exp(-x)\\
&\times(0.9999965-0.998971x^{-1}\\
&+1.9487646x^{-2}-4.9482092x^{-3}\\
&+11.8750792x^{-4}-20.452384x^{-5}\\
&+21.1491469x^{-6}-9.524041x^{-7})
\end{aligned} \qquad (21)$$

پس از تعیین ثابت نرخ واکنش رفت، $k_{b,i}$ به شکل زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$k_{b,i}=\frac{k_{f,i}}{K_i} \qquad (22)$$

که در آن K_i ثابت تعادل واکنش بوده و با استفاده از رابطهٔ ساها به دست می‌آید.

$$K_i=2\frac{S_{i+1}}{S_i}\frac{\left(2\pi m_e k_B T_e\right)^{1.5}}{h^3}\exp\left(-\frac{\chi_{i\to i+1}}{k_B T_e}\right) \qquad (23)$$

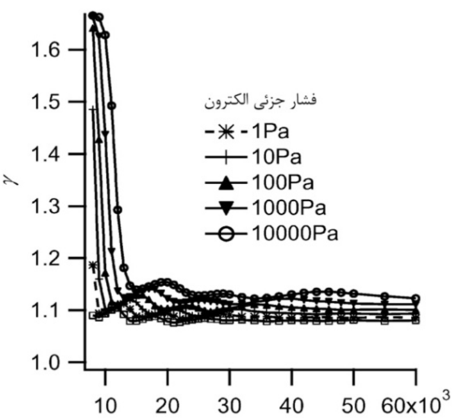
در رابطه (23)، $\chi_{i\to i+1}$ انرژی یونش مربوط به i -امین یون بوده و S_i نیز با استفاده از چندجمله‌ای (24) تعیین می‌شود.

$$S_i=\sum_{j=0}^{8}g_{i,j}T_e^{j} \qquad (24)$$

ثوابت تجربی $\chi_{i\to i+1}$ و $g_{i,j}$ در مرجع [19] ارائه شده‌اند. پس از تعیین شدن چگالی ذرات یون‌ها، چگالی ذرات الکترون از تعادل بار ذرات محاسبه می‌شود.

$$n_e=\sum_i i\times n_i \qquad (25)$$

نتایج تجربی [20] مربوط به جریان پلاسمای گاز آرگون نشان می‌دهد که در دماهای بیش از 1 eV، مدهای مختلف انرژی نظیر مد انتقالی و الکترونیکی فعال می‌شوند. تحت این شرایط، انحراف مقدار واقعی نسبت گرمای ویژه از مقدار ایده‌آل خود (γ=5/3) زیاد می‌شود. نحوه تغییرات این متغیر برحسب دما در شکل 2 نشان داده شده است. در پژوهش حاضر، از داده‌های تجربی مذکور استفاده شده است.



شکل 2- تغییرات نسبت گرمای ویژه واقعی پلاسمای گاز آرگون برحسب دما [17]

3- الزامات حل و توسعه الگوریتم عددی

در عمل اگرچه افزایش مقدار نسبت مربع جریان تخلیه الکتریکی ورودی به دبی جرمی پیشرانه ($I_{dis}^2/\dot{m}$)، باعث بهبود شرایط عملکردی رانشگر می‌شود، اما افزایش آن بیش از مقدار حد بحرانی، باعث بروز نوسان در رفتار ولتاژ اعمالی بر رانشگر شده و در پی آن الکترودها دچار خوردگی شده و توان ورودی به رانشگر تلف می‌گردد. مدلسازی شرایط عملکردی به ازای مقادیر بزرگتر $I_{dis}^2/\dot{m}$ نیز نشان می‌دهد که ناپایداری‌هایی در حل عددی به وجود می‌آید [21]. علت این امر اینست که با افزایش پارامتر مذکور، فرکانس ریزناپایداری‌ها در نوک الکترودها افزایش یافته و اثر پدیده انتقال غیرعادی در این نواحی تقویت می‌شود. وقوع انبساط قوی در این نواحی که با افت فشار ناگهانی گاز رقیق سرعت بالا همراه است، از یک سو و افزایش اثر پدیده انتقال غیرعادی به دلیل تقویت فرکانس ریزناپایداری‌ها از سوی دیگر باعث می‌شود تا فشار جزئی یون که از اختلاف فشار کل و فشار جزئی الکترون به دست می‌آید، مقداری منفی و غیرفیزیکی اختیار کند.

همچنین افزایش دمای یون و الکترون در نوک الکترود کاتد، تشدید رفتار غیرخطی ضریب گرمایی ویژه و ثوابت نرخ واکنش‌ها را در پی خواهد داشت که این امر باعث بروز ناپایداری‌هایی در حل عددی و نهایتاً واگرایی آن می‌شود. به طور کلی می‌توان مشکلات و پیچیدگی‌های موجود در شبیه‌سازی عددی رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

1- افزایش سهم انرژی جنبشی در رابطهٔ (4) به دلیل وقوع انبساط‌های قوی در نوک الکترودها؛

2- افزایش سهم انرژی مغناطیسی در رابطهٔ (4) در پی افزایش جریان تخلیهٔ الکتریکی (کاهش ضریب بتا $\beta = 2\mu_0 p/B^2$)؛

3- افزایش اثر رفتار غیرخطی ضریب گرمایی ویژه به دلیل فعال شدن مدهای مختلف انرژی در دماهای بیش از یک الکترون‌ولت (شکل 2)؛

4- افزایش اثر ریزناپایداری‌های مربوط به جریان الکتریکی که بواسطهٔ آن ضریب مقاومت الکتریکی جریان پلاسما افزایش و توان ورودی به رانشگر کاهش می‌یابد (رابطهٔ (11))؛

5- تغییرات سریع چگالی یون‌ها به دلیل تشدید رفتار نمایی عبارت مولد در معادلهٔ (16)، در مجاورت نوک الکترود کاتد.

برای جلوگیری از بروز مشکلات فوق، روش عددی به کار گرفته شده باید قادر باشد تا لزجت عددی مورد نیاز جهت مستهلک کردن ناپایداری‌ها را تولید نماید. بدین منظور در پژوهش حاضر، برای محاسبهٔ بردار شار جابه‌جایی از روش HLLE استفاده شده است. روش HLLE جزء خانواده روش‌های ریمانی غیرتفکیکی است که در آن برخلاف روش‌های مبتنی بر تفکیک مشخصه‌ها، نیازی به محاسبهٔ بردارهای ویژه نیست. با توجه به این که با در نظر گرفتن مدل یونش غیرتعادلی، 13 معادله باید به طور خودسازگار حل شوند، بنابراین به کارگیری روش مذکور در مقایسه با روش ریمانی تفکیکی رؤ، هزینه زمانی را تا حدود 50% کاهش می‌دهد. بر اساس روش HLLE، بردار شار جابه‌جایی به شکل زیر محاسبه می‌گردد [22]،

$$F_{i+1/2}^{\mathrm{HLLE}} = \frac{b^{+}F\left(U_{i+1/2}^{\mathrm{L}}\right) + b^{-}F\left(U_{i+1/2}^{\mathrm{R}}\right)}{b^{+} - b^{-}} + \frac{b^{+}b^{-}}{b^{+} - b^{-}}\left(U_{i+1/2}^{\mathrm{R}} - U_{i+1/2}^{\mathrm{L}}\right) \tag{26}$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} b^{+} &= \max\left[\max\left(\lambda^{\max}, V^{R} + C^{R}\right), 0\right] \\ b^{-} &= \min\left[\min\left(\lambda^{\min}, V^{L} - C^{L}\right), 0\right] \end{aligned} \tag{27}$$

V^R، V^L و C^R، C^L به ترتیب مولفه‌های سرعت جریان و مولفه‌های سرعت سریعترین موج در سمت راست و چپ مرز سلول محاسباتی می‌باشند. $\lambda^{\max}$ و $\lambda^{\min}$ بیشترین و کمترین مقادیر ویژه‌ای هستند که از بردار زیر به دست می‌آیند،

$$\lambda = \left[V - C_F, V, V, V, V + C_F\right] \tag{28}$$

در رابطه (28)، C_F سرعت صوتی-مغناطیسی می‌باشد.

$$C_F = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho} + \frac{B_\theta^2}{\rho \mu_0}} \tag{29}$$

مشاهده می‌شود که روش HLLE نیازی به محاسبهٔ بردارهای ویژه ندارد و تنها بر اساس بیشینه و کمینه مقادیر ویژه عمل می‌نماید.

در روش‌های با دقت مرتبهٔ اول مقادیر متغیرهای حالت در مرز سلول برابر با مقدار آن‌ها در مرکز سلول در نظر گرفته می‌شود. یکی از روش‌های افزایش دقت حل عددی، استفاده

از روش MUSCL به منظور برون‌یابی مقادیر متغیرهای مرزی بر حسب مقدار متغیرها در سلول‌های مجاور می‌باشد. به کارگیری این روش توأم با ایجاد مقداری خطای پراکندگی است. برای محدود کردن خطاهای مذکور یان[1] [23] روش MUSCL بهینه شده موسوم به OMUSCL2[2] را ارائه کرد. بر این اساس متغیرهای حالت در سمت راست و چپ مرز سلول محاسباتی به صورت زیر قابل محاسبه اند.

$$q^L_{i+05}=q_i+\frac{1}{2}\tilde{\phi}^L_{i+0.5}\cdot\left(q_{i+1}-q_i\right)$$
$$q^R_{i+0.5}=q_{i+1}-\frac{1}{2}\tilde{\phi}^R_{i+0.5}\cdot\left(q_{i+1}-q_i\right) \quad (30)$$

که در آن‌ها داریم:

$$\tilde{\phi}^L_{i+0.5}=\max\left(0,\min\left(2,\phi^L_{i+0.5},2r^L_{i+0.5}\right)\right)$$
$$\phi^L_{i+0.5}=0.8-0.175\frac{1}{r^L_{i+1.5}}+0.375r^L_{i+0.5}$$
$$\tilde{\phi}^R_{i+0.5}=\max\left(0,\min\left(2,\phi^R_{i+0.5},2r^R_{i+0.5}\right)\right)$$
$$\phi^R_{i+0.5}=0.8-0.175\frac{1}{r^R_{i-0.5}}+0.375r^R_{i+0.5} \quad (31)$$
$$r^L_{i+0.5}=\frac{q_i-q_{i-1}+\delta}{q_{i+1}-q_i+\delta}$$
$$r^R_{i+0.5}=\frac{q_{i+2}-q_{i+1}+\delta}{q_{i+1}-q_i+\delta}$$

در این روابط q مقدار هریک از مولفه‌های بردار متغیرهای حالت $W=[\rho,u,w,B_\theta,p]^T$ و δ یک عدد مثبت کوچک می‌باشد.

اکثر پژوهش‌های ذکر شده در بخش مقدمه از روش‌های صریح جهت پیشروی زمانی بهره برده‌اند. در این پژوهش برای پرهیز از پیچیدگی‌های مربوط به روش‌های ضمنی و کاهش هزینه‌های زمانی حل، از روش اولر با گام زمانی متغیر استفاده شده است. با توجه به وجود مقیاس‌های زمانی مختلف در رانشگرهای MPD، گام زمانی به صورت زیر محاسبه می‌شود [21]،

$$\Delta t=\min\left[\Delta r\cdot CFL/\lambda_{\max},\right.$$
$$\left.\mu_0\cdot\Delta r^2/\eta,n_e k_B\Delta r^2/k_e\right] \quad (32)$$

که در آن عبارات سمت راست رابطه به ترتیب بیانگر مقیاس زمانی سریعترین موج، مقیاس زمانی نفوذ مغناطیسی و مقیاس زمانی نفوذ حرارتی می‌باشند. بررسی‌ها نشان می‌دهد که برای معادلات MHD غیرایده‌آل، مقیاس زمانی نفوذ مغناطیسی و حرارتی از مرتبه 10^{-11} تا 10^{-9} ثانیه تغییر می‌کند. همچنین، مقدار مقیاس زمانی سریعترین موج معمولاً بزرگتر از دو مقیاس زمانی دیگر می‌باشد و در بازهٔ 10^{-10} تا 10^{-8} ثانیه قرار می‌گیرد.

4- هندسه و شرایط مرزی

جهت بررسی و ارزیابی عملکرد الگوریتم عددی توسعه داده شده، یک رانشگر استوانه‌ای با الکترودهای هم‌محور شبیه‌سازی شده است. رانشگر مذکور توسط ویلانی[3] [16] در دانشگاه پرینستون مورد مطالعهٔ تجربی قرار گرفت. مشخصات این رانشگر در جدول 1 ارائه شده است.

برای هندسهٔ رانشگر مورد نظر همانند مراجع [7] و[14] از یک شبکهٔ محاسباتی یکنواخت متعامد 100×150 استفاده شده است. به دلیل وجود تقارن در هندسه و همچنین کاهش حجم محاسبات تنها نصف هندسهٔ واقعی تحلیل شده است.

جدول 1- مشخصات هندسی و عملکردی رانشگر [16]

پارامترها	مقادیر
شعاع الکترود کاتد	9/5 میلی‌متر
طول الکترود کاتد	264 میلی‌متر
شعاع الکترود آند	51 میلی‌متر
طول الکترود آند	200 میلی‌متر
دبی جرمی گاز آرگون	6 گرم بر ثانیه
جریان تخلیهٔ الکتریکی	8 کیلوآمپر

در این رانشگر، جریان گاز آرگون از طریق 12 سوراخ تحت شرایط صوتی به فضای میان دو الکترود تزریق می‌گردد. تنها در فاصلهٔ چند میلی‌متری از ورودی، گاز خنثی به طور کامل یونیزه می‌شود. به دلیل عدم برقراری فرضیات مربوط به معادلات MHD، این ناحیه قابل شبیه‌سازی نیست [17]. مقدار دمای ورودی طوری تعیین می‌شود که با فعال شدن فرآیند یونش در مرز ورودی، جریان گاز کاملاً یونیزه

[1] Yan
[2] Second-Order Optimized MUSCL
[3] Villani

شده وارد ناحیهٔ حل گردد. با توجه به مشخص بودن دما و دبی جرمی پیشرانه تحت شرایط صوتی، سرعت و چگالی در ورودی محاسبه می‌شوند. با تعیین چگالی اجزا از رابطهٔ ساها، فشار جزئی اجزا محاسبه شده و از حاصل‌جمع آن‌ها فشار کل در ورودی به دست می‌آید. با به کارگیری قانون بیو-ساوار، میدان مغناطیسی در ورودی از رابطهٔ $B_{\theta,in} = -\mu_0 I_{dis} / 2\pi r$ قابل حصول است. جایگذاری مقدار 8 کیلوآمپر در این رابطه باعث رشد آنی سهم انرژی مغناطیسی در رابطهٔ (4) می‌شود. بنا به تجربه معلوم شد که در این شرایط، در تکرارهای زمانی اولیه مقدار فشار در سلول‌های محاسباتی مجاور مرز ورودی منفی می‌گردد. برای رفع این مشکل مقدار I_{dis} در هر تکرار زمانی به میزان 10 میلی‌آمپر افزایش داده شده تا جریان الکتریکی تخلیه به طور تدریجی به مقدار 8 کیلوآمپر برسد. با توجه به این که مقدار مولفه عمود بر سطح سرعت روی دیواره الکترودها برابر صفر می‌باشد، بنابراین به غیر از عبارت فشار مگنتواستاتیکی ($p_m = p + B_\theta^2 / 2\mu_0$) مقدار سایر عبارات در بردار شار جابه‌جایی صفر می‌شود. فشار مگنتواستاتیکی بر روی مرز، از دامنهٔ حل برون‌یابی می‌شود. میدان الکتریکی مماسی بر روی مرز نیز برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. تعیین دمای سطح الکترودها، مستلزم حل معادلهٔ انتقال حرارت در دیواره الکترودها می‌باشد. این موضوع باعث افزایش پیچیدگی و زمان حل مساله خواهد شد. جهت اجتناب از این امر، در پژوهش حاضر همانند اغلب پژوهش‌های ذکر شده در بخش مقدمه، مقدار دما روی سطح الکترودها اندکی کمتر از دمای ذوب آن‌ها در نظر گرفته شده است.

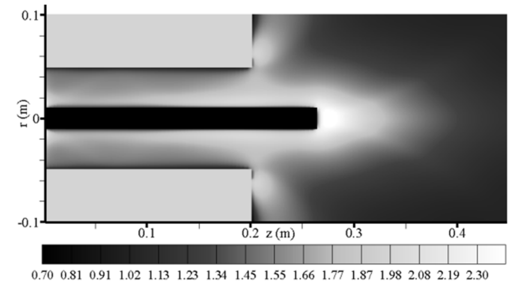
از آنجا که در جلو الکترود کاتد و در خط تقارن مقدار سرعت شعاعی صفر می‌باشد، در نتیجه تمام مولفه‌های بردار جابه‌جایی شعاعی در این مرز صفر می‌گردند. از سوی دیگر به دلیل عدم وجود گرادیان شعاعی، انتقال حرارت در عرض این مرز صورت نمی‌گیرد. خط تقارن همانند یک سیم مستقیم طویل می‌ماند که میدان مغناطیسی در مرکز آن برابر صفر است. با این فرض و با استفاده از ترکیب قانون بیو-ساوار و آمپر، رابطهٔ زیر برای محاسبهٔ جریان الکتریکی محوری به دست می‌آید.

$$j_z\big|_{r=0} = \frac{4B_\theta\big|_{\Delta r/2}}{\mu_0 \Delta r} \qquad (33)$$

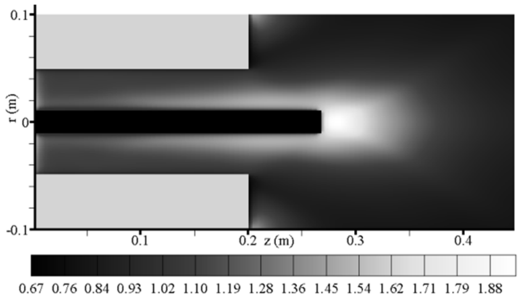
در مرزهای خروجی گرادیان عمودی کمیات جریان سیال به همراه میدان مغناطیسی برابر صفر در نظر گرفته شده است.

5- بررسی و تحلیل نتایج

در شکل های 3 و 4 توزیع دمای الکترون به ترتیب با فرض یونش غیرتعادلی و تعادلی نشان داده شده است. اگرچه رفتار کیفی این متغیر در هر دو شکل مشابهت زیادی دارد اما مقدار متوسط آن برای حالت غیرتعادلی بیشتر است. بیشینه دمای الکترون در نوک کاتد برای حالت تعادلی و غیرتعادلی به ترتیب حدود 2 و 2/4 الکترون‌ولت می‌باشد. با توجه به این که مقدار حرارت اهمی (ηj^2) با کاهش شعاع افزایش می‌یابد لذا در مجاورت کاتد و به ویژه در نوک آن دما افزایش می‌یابد. علاوه بر این در نوک کاتد (ناحیه سکون) انرژی جنبشی کاهش یافته و در قالب انرژی حرارتی ظاهر می‌گردد. این امر باعث می‌شود تا دما در این ناحیه به طور چشمگیری نسبت به سایر نقاط افزایش یابد.



شکل 3- توزیع دمای الکترون با فرض غیرتعادلی (الکترون‌ولت)

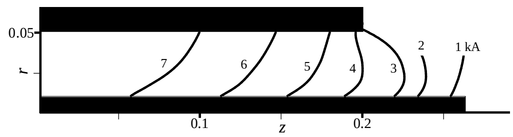


شکل 4- توزیع دمای الکترون با فرض تعادلی [14]

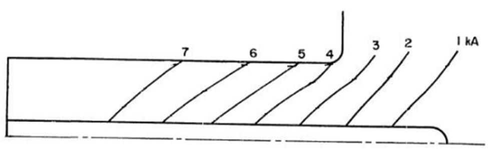
در شکل 5 توزیع جریان الکتریکی محصور بین دو الکترود که از رابطهٔ (34) محاسبه شده، نشان داده شده است.

$$I_{enclosed} = \frac{2\pi r B_\theta}{\mu_0} \qquad (34)$$

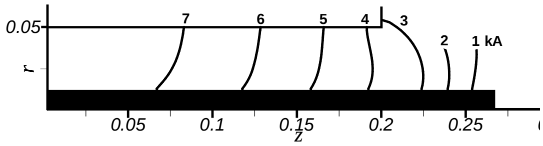
ملاحظه می‌گردد که با حرکت از دهانه ورودی رانشگر به سوی ناحیه خروجی، مقدار جریان الکتریکی محصور با روندی کاهشی همراه است. این رفتار شباهت زیادی با نتایج تجربی اندازه‌گیری شده در شکل 6 دارد. مقایسه نتایج به دست آمده (شکل 5) با نتایج حاصل از فرض تعادلی (شکل 7) نشان می‌دهد که خطوط جریان در ناحیه بین دو الکترود در حالت فرض غیرتعادلی، کشیده‌تر و دارای شیب کمتری هستند و با مقادیر تجربی همخوانی بیشتری دارند. همانطور که در مرجع [14] ذکر شده، در صورتی که مقاومت الکتریکی صفر در نظر گرفته شود (معادلهٔ MHD ایده‌آل) خطوط جریان کاملاً به سمت پایین دست کشیده می‌شوند و با افزایش مقدار مقاومت الکتریکی شیب این خطوط افزایش می‌یابد. بنابراین، علت اصلی اختلاف موجود بین نتایج شکل 7 و مقادیر تجربی، ناشی از پیش‌بینی مقدار ضریب مقاومت الکتریکی بیشتر از مقدار واقعی آن می‌باشد. با توجه به مرجع [16] می‌توان نشان داد که ضریب مقاومت الکتریکی با $T_e^{-1.5}$ متناسب است. از آنجا که دمای الکترون در حالت غیرتعادلی بیشتر از حالت تعادلی پیش‌بینی شده، لذا مقدار مقاومت الکتریکی در این حالت کمتر می‌شود و در نتیجه با کاهش این پارامتر خطوط جریان بیشتر از حالت تعادلی به سمت پایین دست کشیده می‌شوند. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که اعمال مدل یونش غیرتعادلی باعث بهبود نتایج شده است.



شکل 5- توزیع جریان الکتریکی با فرض غیرتعادلی

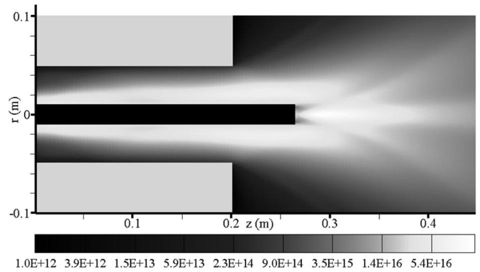


شکل 6- توزیع جریان اندازه‌گیری شده [16]

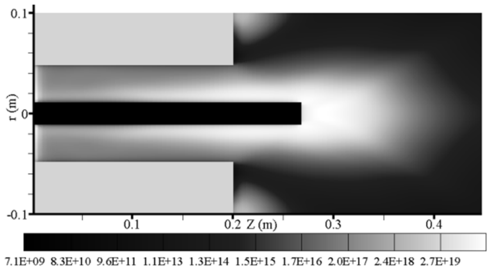


شکل 7- توزیع جریان الکتریکی با فرض تعادلی [14]

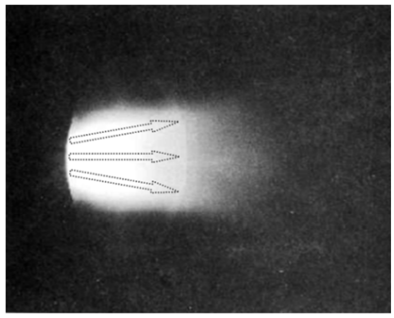
در شکل‌های 8 و 9 توزیع چگالی تعداد ذرات یون Ar^{++} به ترتیب با فرض‌های غیرتعادلی و تعادلی نمایش داده شده است. همانطور که در شکل 8 ملاحظه می‌شود، مقدار چگالی این یون در مجاورت الکترود کاتد بیشینه بوده و جریان ذرات در نوک کاتد، جایی که دمای الکترون به حداکثر خود می‌رسد، منبسط می‌شوند. این پدیده موسوم به جت کاتد می‌باشد [17]. در شکل 10 تصویر این پدیده که با استفاده از طیف‌سنجی اجزاء شیمیایی در آزمایشگاه به دست آمده، نشان داده شده است [24]. ملاحظه می‌شود که نتایج عددی مربوط به شکل 8 به خوبی سه جت نورانی قابل مشاهده در نتایج تجربی را پیش‌بینی کرده‌است. این در حالی است که در شکل 9، ساختار جت‌گونه جریان یون Ar^{++} در نوک الکترود کاتد قابل رویت نیست و جریان در این ناحیه رفتاری توده‌ای دارد. بنابراین ملاحظه می‌شود که مدل غیرتعادلی اعمال شده در پژوهش حاضر در مقایسه با مدل تعادلی، توانسته است مشاهدات تجربی مربوط به رفتار جریان پلاسما را بهتر پیش‌بینی نماید.



شکل 8- توزیع چگالی یون Ar^{++} با فرض غیرتعادلی

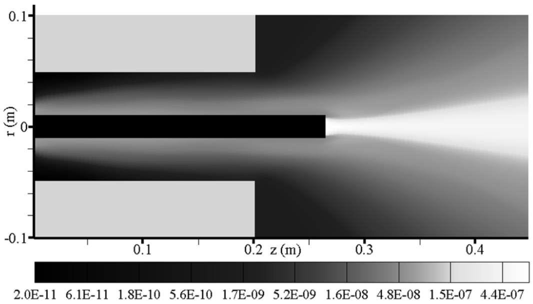


شکل 9- توزیع چگالی یون Ar^{++} با فرض تعادلی



شکل 10- توزیع یون Ar^{++} با استفاده از طیف‌سنجی [24]

در شکل 11 توزیع نسبت چگالی یون Ar^{+++} به چگالی یون Ar^{++} نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که کمترین مقدار این نسبت از مرتبه 10^{-11} بوده و بیشینه آن در نوک کاتد جایی که دمای الکترون به حداکثر خود می‌رسد از مرتبه 10^{-6} می‌باشد. از سوی دیگر، مطالعات طیف‌سنجی مرجع [25] نشان می‌دهد در شرایط کاری I_{dis}=8.7kA و $\dot{m}$=6gr/s یون Ar^{+++} تولید نمی‌شود. بنابراین جهت افزایش سرعت همگرایی حل می‌توان از حل معادلات انتقال اجزا برای یون‌های مرتبه بالاتر از Ar^{++} صرفنظر کرد.



شکل 11- توزیع چگالی یون $n_{Ar^{+++}} / n_{Ar^{++}}$

با استفاده از رابطهٔ نیمه-تجربی مِکِر [26] نیروی پیشران یک رانشگر تقارن‌محوری به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$T = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\ln\frac{r_a}{r_c} + \zeta\right) I_{dis}^2 \qquad (35)$$

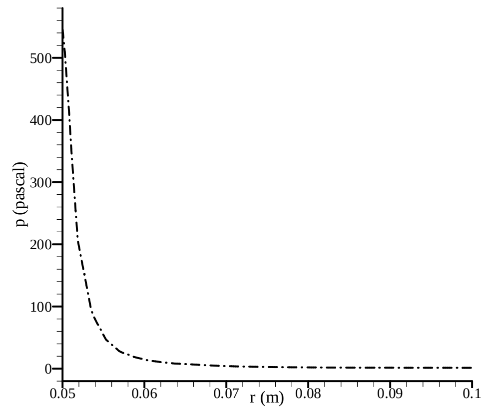
در این رابطه ζ یک پارامتر تجربی است و برای رانشگر حاضر، ویلانی مقدار آن را 0/15 گزارش کرده است [16]. با جایگذاری مقادیر شعاع آند (r_a)، شعاع کاتد (r_c) و جریان تخلیه الکتریکی از جدول 1 در رابطهٔ (35) مقدار نیروی پیشران برابر 11/71 نیوتن می‌باشد.

از سوی دیگر، با استفاده از رابطهٔ (36) مقدار نیروی پیشران با استفاده از فرض غیرتعادلی برابر 10/34 نیوتن محاسبه شده، که حاکی از 11/74٪ خطا در مقایسه با مقدار به دست آمده از رابطهٔ مکر است.

$$T = \int u\left(\rho V \cdot dA\right) \qquad (36)$$

همچنین، مقدار نیروی پیشران با استفاده از فرض تعادلی برابر 9/68 نیوتن است که خطای آن در مقایسه با مقدار حاصل از رابطهٔ مکر 17/37% می‌باشد. بنابراین مشاهده می‌شود که به کارگیری فرض غیرتعادلی به جای فرض تعادلی، خطای نیروی پیشران را به میزان 5/63٪ کاهش داده است.

در شکل 12 تغییرات فشار در سلول‌های مجاور دیواره نوک آند نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، نمودار فشار با شیب بسیار شدیدی از مقدار نزدیک به 550 پاسکال تا حدود 1 پاسکال کاهش می‌یابد. این تغییرات شدید ناشی از وقوع انبساط قوی در این ناحیه است. تحت این شرایط، خطاهای عددی موجود در معادلات مومنتوم و میدان مغناطیسی می‌توانند رشد کنند و در نتیجه با افزایش سهم انرژی جنبشی و میدان مغناطیسی در معادلهٔ (4)، مقدار فشار که از کسر چند عدد بزرگ حاصل می‌شود، به طور غیرفیزیکی منفی خواهد شد. مزیت روش HLLE در این است که به دلیل داشتن لزجت عددی محدود، قادر است خطاهای عددی مذکور را مستهلک کند و در نتیجه در مجاورت نوک آند که جریان گاز رقیق به طور ناگهانی منبسط می‌شود، فشار دارای مقادیری فیزیکی خواهد بود.



شکل 12- توزیع فشار در مجاورت دیواره نوک الکترود آند

6- جمع‌بندی

در این پژوهش یک الگوریتم محاسباتی برای حل معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی با فرض عدم تعادل حرارتی و شیمیایی توسعه داده شد. بدین منظور یک مدل یونش 7 جزئی مورد استفاده قرار گرفت. جهت کاهش هزینه‌های زمانی و دستیابی به حل پایدار، بردار شار جابه‌جایی توسط روش HLLE محاسبه گردید. همچنین به منظور کاهش خطا و افزایش دقت حل عددی، گسسته‌سازی مشتقات مکانی با اعمال روش OMUSCL2 صورت گرفت.

نتایج نشان می‌دهند که به کارگیری مدل یونش غیرتعادلی به جای مدل تعادلی، باعث کوچکتر شدن مقادیر ضریب مقاومت الکتریکی شده و در نتیجه تحت این شرایط، نتایج عددی و تجربی مربوط به جریان الکتریکی محصور همخوانی بهتری را نشان می‌دهند. افزایش نسبی دما در مجاورت الکترود کاتد، سبب شده تا واکنش‌های مربوط به یون Ar^{++} در این ناحیه فعال شوند. بنابراین مشاهده می‌شود که در نزدیکی الکترود کاتد، چگالی یون Ar^{++} (بویژه در نوک کاتد) بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند. این امر با پدیده تجربی جت کاتد کاملاً سازگاری دارد. همچنین، اعمال مدل غیرتعادلی به جای مدل تعادلی، باعث شده تا خطای نیروی پیشران در مقایسه با مقدار به دست آمده از رابطه نیمه-تجربی مکر حدود 5٪ کاهش یابد.

7- فهرست علایم

B_θ	میدان مغناطیسی محیطی، T
e	بار الکترون، $1/6022 \times 10^{-19}$ C
E	میدان الکتریکی، Volt/m
h	ثابت پلانک، $6/626 \times 10^{-34}$ $m^2 \cdot kg/s$
j	چگالی جریان الکتریکی، A/m^2
k	ضریب هدایت حرارتی، $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
k_B	ثابت بولتزمن، $1/381 \times 10^{-23}$ JK^{-1}
m_e	جرم الکترون، $9/109 \times 10^{-31}$ kg
n_e	چگالی ذرات الکترون، m^{-3}
n_h	چگالی ذرات یون‌ها، m^{-3}
p	فشار استاتیکی، Pa
T_e	دمای الکترون، K
T_h	دمای یون، K
u	مولفه شعاعی سرعت، m/s
w	مولفه محوری سرعت، m/s
Z_{eff}	نسبت چگالی ذرات الکترون به یون‌ها
Z_i	تعداد بار ذرات مثبت
ε	انرژی کل در واحد حجم، J/m^3
ε_0	ضریب گذردهی الکتریکی، $8/85 \times 10^{-12}$ J/m^3
η	مقاومت الکتریکی، $Ohm \cdot m$
λ	مقدار ویژه، m/s
μ_0	ضریب نفوذپذیری مغناطیسی، $4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2

مراجع

[1] Sanchez MM (2004) Space propulsion course lecture notes. Springer, Massachusetts Institute of Technology.

[2] Lev D (2012) Investigation of efficiency in applied field magnetoplasma-dynamic thrusters. PhD Thesis, Princeton Univercity, Princeton, New Jersey, USA.

[3] Niewood EH (1993) An explanation for anode voltage drops in an MPD thruster. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, USA.

[4] Caldo G, Choueiri EY (1993) Numerical fluid simulation of an MPD thruster with real geometry. In: 23rd International Electric Propulsion Conference, Seattle, WA, USA.

[5] Elaskar SA, Brito HH (2001) Solution of real magnetogasdynamics equations using a TVD scheme as a tool for electric propulsion. In: Proceeding of International Electric Propulsion Conference, Pasadena, USA 161–171.

[6] Takeda H, Yamamoto S (2002) Implicit time-marching solution of partially ionized flows in self-field MPD thruster. Trans Japan Soc Aero Space Sci 44(146): 223–228.

[7] Sankaran K, Jardin SC, Choueiri EY (2001) Parallelization and validation of an MHD code for the simulation of self-field MPDT flows. In: 27th International Electric Propulsion Conference, Pasadena, USA.

[8] Mikellides PG (2004) Modeling and analysis of a megawatt-class magnetoplasmadynamic thruster. J Propul Power 20(2): 204–210.

[9] Sleziona PC, Kurtz MA, Schrade HO (1993) Numerical calculation of a cylindrical MPD thruster. In: Proceeding of International Electric Propulsion Conference, Seattle, USA 609–617.

[10] Winter MW, Boie C, Kurtz MA, Kurtz HL (1997) Experimental and numerical investigation of

steady state MPD thrusters. In: Proceedings of the Second European Spacecraft Propulsion Conference, Noordwijk, Netherlands.
[11] Winter MW, Nada TR, Kurtz MA, Haag D, Fertig M (2006) Investigation of nozzle geometry effects on the onset of plasma instabilities in high power steady state MPD thrusters. In: 42nd Joint Propulsion Conference & Exhibit, Sacramento, California, USA.
[12] Mahendhran M, Kumar A (2010) Numerical study on performance of magnetoplasma dynamic arcjet thrusters. In: Proceedings of the 37th National & 4th International Conference on Fluid Mechanics and Fluid Power, Chennai, India.
[13] Kubota K, Funaki I, Okuno Y (2011) Modeling and numerical simulation of a two-dimensional MPD thruster using a hydrogen propellant. In: 32nd International Electric Propulsion Conference, Germany.
[14] آهنگر م، ابراهیمی ر، شمس م (1392) حل معادلات MHD با استفاده از یک روش مرتبه بالای مبتنی برتفکیک مشخصه‌ها به منظور شبیه‌سازی رانشگر پلاسمایی مغناطیسی، ماهنامه علمی و پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس 13(14): 28-42.
[15] Choueiri EY (1999) Anomalous resistivity and heating in current-driven plasma thrusters. J Phys Plasm 6(5): 2290–2306.
[16] Villani DD (1982) Energy loss mechanisms in a magnetoplasmadynamic arcjet. PhD Thesis, Princeton University, Princeton, New Jersey, USA.
[17] Sankaran K, Choueiri EY, Jardin SC (2005) Comparison of simulated magnetoplasmadynamic thruster flowfields to experimental measurements. J Propul Power 21(1): 129–138.
[18] Sheppard EJ (1994) Ionizational nonequilibrium and ignition in plasma accelerators. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, USA.
[19] Heiermann J (2002) A finite volume method for the solution of magnetoplasmadynamic conservation equations. PhD Thesis, Institut fur Raumfahrtsysteme, Universitat Stuttgart, Stuttgart, Germany.
[20] Drellishak KS, Knopp CF, Cambel AB (1963) Partition functions and thermodynamics properties of argon plasmas. US Air Force, Report No: AEDC-TDR-63-146.
[21] Sankaran K, Martinelli L, Jardin SC, Choueiri EY (2002) A flux-limited numerical method for solving the MHD equations to simulate propulsive plasma flows. Int J Num Methods Eng 53(6): 1415–1432.
[22] Einfeldt B, Munz CD, Roe PL, Sjögreen B (1991) On Godunov-type methods near low densities. J Comp Phys 92: 273–295.
[23] Yan L, Liang LX, Dexun F, Ynwen M (2012) Optimization of the MUSCL scheme by dispersion and dissipation. Sci China Phys Mech and Astron 55(5): 844–853.
[24] Bruckner AP (1972) Spectroscopic studies of the exhaust plume of a quasi-steady MPD accelerator. PhD thesis, Princeton University, Princeton, New Jersey, USA.
[25] Jahn RG (1971) Pulsed electromagnetic gas Acceleration. NASA NGL 31-001-005, Princeton university, Princeton, USA.
[26] Jahn RG (1968) Physics of electric propulsion. McGraw-Hill, New York.