



تحلیل سه‌بعدی پتانسیل مبنا برای جریان کاویتاسیون جزئی حول پرتابه‌های با پیشانی مختلف به روش المان مرزی

مهدی نوروزی^{۱*}، محمود پسندیده فرد^۲

^۱ استادیار، مجتمع آموزش عالی لارستان، گروه مهندسی مکانیک، لارستان، ایران

^۲ استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه مهندسی مکانیک، مشهد، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۵/۱۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۶/۲۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۰۵

چکیده

در پژوهش حاضر، به‌منظور شبیه‌سازی جریان همراه با کاویتاسیون جزئی حول پرتابه‌های مختلف (سرتخت، سرکروی و سرمخروطی با زاویه مخروط ۴۵ درجه) به روش المان مرزی، یک کد سه‌بعدی تدوین شده است. بدین منظور، پس از تولید هندسه با استفاده از المان‌های چهارضلعی با چهار نقطه کنترل، با بهره‌گیری از بیان انتگرالی تئوری گرین، اجزای پتانسیلی چشمه و دوگان روی هر المان توزیع و به کمک یک الگوریتم تکراری، شبیه‌سازی انجام و با نتایج تجربی و عددی دیگر اعتبارسنجی شده است. با وجود هزینه محاسباتی پایین این روش، نتایج از دقت قابل قبول و سرعت همگرایی بالایی برخوردار است. ارائه روابط کلی برای مشخصات هندسی کاویتا ایجاد شده حول پرتابه‌ها (در محدود اعداد کاویتاسیون بین ۰/۰۷۵ تا ۰/۵) از جمله نتایج این پژوهش است. بررسی نتایج حاکی است که این روش قابلیت مناسبی در پیش‌بینی خواص جریان کاویتاسیون در زوایای حمله غیر صفر (تا زاویه حمله ۸ درجه) دارد که البته با افزایش زاویه حمله و فاصله از فرض پتانسیلی بودن جریان، نتایج هندسه کاویتا حد اکثر ۱۵٪ و ضرایب آیرودینامیکی حداکثر ۱۲٪ با دیگر تحلیل‌های عددی اختلاف دارد. با توجه به سرعت همگرایی بالا و دقت قابل قبول، این روش برای طراحی اولیه و بهینه‌سازی پرتابه‌های زیرسطحی همراه با کاویتاسیون قابل استفاده است.

کلمات کلیدی: کاویتاسیون جزئی؛ روش المان مرزی؛ زاویه حمله؛ پیشانی سرتخت؛ پیشانی سرکروی؛ پیشانی سرمخروطی.

A Three-Dimensional Potential-Based analysis for Partial cavitating Flow around Projectiles with Various Head Using BEM

M. Norouzi^{1,*}, Ma. Pasandideh-fard²

¹ Assist. Prof., Mech. Eng., Larestan Univ., Larestan, Iran

² Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ. of Mashhad, Mashhad, Iran

Abstract

In this paper, three-dimensional code has been developed to simulate the partial cavitating flow around projectiles with various heads (blunt, hemispherical, and conical) using the BEM. For this purpose, after generating the geometry using quadrilateral elements with four control points, using the integral expression of Green's theory, source and dipole have been distributed on elements, and using an iterative algorithm, simulation is done and results are compared with the available experimental data and other numerical results. Despite the low computational cost of this method, the results have a high accuracy and convergence rate. One of the main contributions of this work is to present a correlation between the properties of cavity around projectiles with different heads (in the limit of $0.075 \leq \sigma \leq 0.5$). Also, Analysis of the results shows that the method has a suitable ability to predict the properties of cavitation flow at non-zero angles of attack (up to 8° angle of attack) in the shortest time. Of course, by increasing the angle of attack and getting away from the potential assumption, the results are associated with some errors (15% in geometrical characteristics and 12% in aerodynamic coefficients). Due to high convergence rate and acceptable accuracy, this method can be used for initial design and optimization of subsurface projectiles with cavitation.

Keywords: Partial Cavitation; Boundary Element Method; Angel of Attack; Blunt-Head; Hemispherical-Head; Conical-Head.

۱- مقدمه

اگر فشار سیال در دمای ثابت، به فشاری کمتر یا مساوی با فشار بخار اشباع کاهش یابد، پدیده تبخیر رخ داده و در پی آن، حباب‌های ریز و درشتی ایجاد می‌شود که با بخار پر شده‌اند (کاویتی) و دارای فشار تقریباً ثابتی هستند. در ماشین‌های سیالاتی، پدیده کائیتاسیون را معمولاً با اثرات مخرب آن چون ایجاد سر و صدا، خوردگی و کاهش کارایی سیستم می‌شناسند و تلاش محققان بر این بوده که به نحوی این اثرات مخرب را به حداقل برسانند؛ با این حال، به‌وجود آمدن (آوردن) کائیتاسیون حول جسم غوطه‌ور در آب، می‌تواند منجر به کاهش اساسی نیروی پسای وارد بر جسم شود. در پرتابه‌های زیرسطحی متقارن محوری، از این مزیت پدیده کائیتاسیون، به عنوان عاملی جهت افزایش سرعت و کارایی استفاده می‌شود [۱،۲]. مهم‌ترین کمیت بدون بعد در معرفی جریان‌های همراه با کائیتاسیون «عدد کائیتاسیون» است که به همراه هندسه جسم و سایر ویژگی‌های جریان، بیان‌گر رژیم و نوع جریان کائیتاسیون است. کائیتاسیون ایجاد شده می‌تواند به رژیم‌های مختلفی چون کائیتاسیون ابری، صفحه‌ای و گسترده منجر شود [۳]. با توجه به مشاهده جریان کائیتاسیون در پدیده‌های مختلف سیالاتی، پیش‌بینی رفتار آن در شرایط مختلف، یکی از موضوعات مورد توجه پژوهشگران بوده است. از جمله روش‌های شبیه‌سازی پدیده کائیتاسیون، روش المان مرزی است. با توجه به اینکه در این روش امکان بازتعریف مختصات المان در تکرارهای متوالی فراهم است، استفاده از این روش برای شبیه‌سازی پدیده‌هایی چون کائیتاسیون که دارای تغییرات در هندسه هستند مناسب است. اساس این روش بر پایه المان‌بندی مرزهای حل، توزیع عناصر پتانسیلی بر روی هریک از المان‌ها، استفاده از معادلات انتگرالی مانند گرین و اعمال آن بر روی هر یک از المان‌ها با توجه به شرایط مرزی آن‌ها، تشکیل و حل دستگاه معادلات و یافتن مجهولات مساله (که معمولاً قدرت عناصر پتانسیل روی هر یک از المان‌هاست) استوار است [۴،۵]. از مزایای روش المان مرزی می‌توان به عدم نیاز به المان‌بندی همه حوزه حل و محدود شدن المان‌بندی صرفاً به مرزهای حل، کاهش ابعاد حل (در تحلیل سه‌بعدی از ۳ به ۲)، کاهش تعداد مجهولات و حجم محاسبات مساله، همگرایی بسیار سریع‌تر نسبت به روش المان محدود و همچنین انعطاف‌پذیری المان‌ها برای تغییر موقعیت در حین

اجرای برنامه اشاره نمود [۶،۷].

پس از انتشار مقاله هس و اسمیت [۸] در سال ۱۹۶۶ که در آن با استفاده از روش المان مرزی، جریان پتانسیل حول اجسام اختیاری محاسبه شده بود، کاربرد این روش به‌سرعت افزایش یافت. آنها با استفاده از توزیع چشمه و گردابه حول سطح یک جسم، روشی برای محاسبه پتانسیل جریان‌های دوبعدی پایا دارای نیروی برآ و بدون کائیتاسیون ارائه نمودند. باسو و هانکوک از این روش برای شبیه‌سازی جریان‌های ناپایا استفاده کردند [۹]. پلون و رو روش مشابهی برای تحلیل غیرخطی جریان حول هیدروفویل‌های دو و سه‌بعدی ارائه نمودند [۱۰]. اهلمن در سال ۱۹۸۷ برای اولین بار، از روش المان مرزی غیرخطی سرعت مینا برای حل کائیتاسیون جزئی بر روی هیدروفویل استفاده کرد [۱۱]. وی این روش را برای تحلیل جریان کائیتاسیون گسترده حول هیدروفویل‌ها توسعه داد [۱۲]. کیناس و فاین [۱۳] یک روش غیرخطی بر مبنای پتانسیل را برای حل دوبعدی کائیتاسیون جزئی و گسترده توسعه دادند. روش آنها بر اساس توزیع چشمه و چاه بر مرزهای حل و استفاده از انتگرال گرین بود. این روش از حیث هم‌گرایی بر روش سرعت مینای ارائه شده توسط اهلمن [۱۱،۱۲] برتری داشت. پلون و رو [۱۰] از روش سرعت مینا برای محاسبه کائیتاسیون گسترده حول یک هیدروفویل سه‌بعدی استفاده کردند. از اولین پژوهش‌های جامع انجام شده در شبیه‌سازی سه‌بعدی جریان کائیتاسیون جزئی می‌توان به کار فاین [۱۴] در سال ۱۹۹۲ اشاره نمود. وی این شبیه‌سازی را برای جریان غیریکنواخت حول هیدروفویل‌ها و پروانه‌ها انجام داد و یک سال بعد، فاین و کیناس [۱۵] گزارش جامعی از تحلیل جریان کائیتاسیون جزئی سه‌بعدی ارائه نمودند. آنها در پژوهش خود اثرات ویسکوزیته و عدد رینولدز را بر نقطه جدایش جریان و هندسه کاویتی بررسی کردند. گئورجس و همکاران [۱۶]، با ترکیب قابلیت روش المان مرزی در تحلیل رفتار غیرخطی تغییر شکل سطح آزاد کاویتی و قابلیت معادلات ناویر-استوکس در تحلیل جریان لزج و مغشوش، جریان کائیتاسیون سه‌بعدی و ناپایا حول پروانه را شبیه‌سازی نمودند. لی و کیناس [۱۷]، علاوه بر شبیه‌سازی سه‌بعدی و ناپایای جریان کائیتاسیون صفحه‌ای (جزئی و گسترده)، رفتار گردابه‌ای جریان سیال در منطقه نوک پروانه‌های زیرسطحی را نشان دادند. پژوهش‌های فاین و کیناس مقدمه‌ای برای توسعه این

معدود پژوهش‌های در دسترس حول این هندسه‌ها نیز به صورت دوبعدی و متقارن محوری تحلیل شده است و مطالعات المان مرزی در هندسه‌های پرتابه‌ای به صورت سه‌بعدی در دسترس نیست. از طرفی، با توجه به شرایط کارکرد پرتابه‌های واقعی با کایتاتور بیضوی و زوایای حمله غیرصفر، بررسی اثرات سه‌بعدی می‌تواند نقش قابل توجهی بر تطبیق شرایط واقعی و شرایط شبیه‌سازی داشته باشد؛ بنابراین، با عنایت به خلاء پژوهشی بیان شده، در پژوهش حاضر، شبیه‌سازی سه‌بعدی جریان کایتاسیون جزئی حول هندسه‌های پرتابه‌ای با پیشانی سرتخت، سرکروی و سرمخروطی در شرایط عملکردی متفاوت به روش المان مرزی انجام شده است و نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج سایر تحلیل‌های آزمایشگاهی و عددی اعتبارسنجی شده است.

۲- معادلات حاکم و شرایط حل به روش المان مرزی

۲-۱- المان بندی

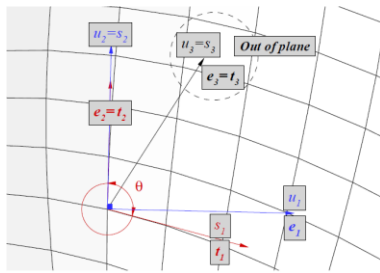
برخلاف دیگر روش‌های عددی، در روش المان مرزی، تحلیل جریان صرفاً روی مرزهای حوزه حل انجام می‌شود؛ لذا اهمیت المان‌بندی در این روش بیش از سایر روش‌های تحلیل عددی است. در این روش، هر المان با کلیه المان‌های حوزه حل (حتی خودش) ارتباط دارد و وجود ارتباط منطقی و منظم بین شماره المان‌ها با یکدیگر اهمیت زیادی دارد؛ به نحوی که حتی تغییر در ترتیب شماره‌گذاری گره‌های المان می‌تواند نتایج را به شدت متأثر کند [۶، ۳۰]. در این پژوهش، با توجه به هندسه‌های مورد بررسی، از المان‌های مربعی با چهار گره در گوشه‌های المان استفاده شده است. استفاده از چهار گره در گوشه‌های المان چهارضلعی امکان تغییر موقعیت اضلاع المان به صورت خطی را فراهم می‌کند.

۲-۲- دستگاه مختصات مورد استفاده:

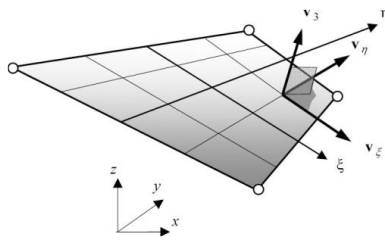
در تحلیل حاضر، از سه نوع دستگاه مختصات استفاده شده است: الف) دستگاه مختصات مرجع کارترین متصل به جسم با یک نقطه مرجع ساکن روی جسم که مولفه‌های این دستگاه با (x, y, z) و بردارهای یکه آن با $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ معرفی می‌شوند. ب) دستگاه مختصات موضعی متعامد متصل به المان با نقطه مرجع مرکز هر المان که دو مولفه متعامد این دستگاه در صفحه المان و مولفه دیگر آن عمود بر صفحه تعریف می‌شود. این دستگاه

روش در بسیاری از تحلیل‌های سه‌بعدی کایتاسیون جزئی گردید که از آن جمله می‌توان به بررسی اثرات تداخلی سکان و پروانه و نیز اثرات تونل کایتاسیون اطراف پروانه توسط لی و همکاران [۱۸] و تحلیل هیدروالاستیکی حول پروانه‌های با کایتاسیون جزئی و نیز ترکیب قابلیت روش المان مرزی با تحلیل سه‌بعدی و ناپایای المان محدود توسط یانگ [۱۹] اشاره نمود. یانگ و شن [۲۰]، شبیه‌سازی سه‌بعدی جریان کایتاسیون گسترده و جزئی حول پروانه مغروق و نیمه مغروق به روش ترکیبی المان مرزی و المان محدود را انجام دادند. بال و همکاران [۲۱] از این روش جهت پیش‌بینی شکل موج سه بعدی ایجاد شده بر روی سطح آب ناشی از جریان کایتاسیون جزئی حول هیدروفویل‌ها استفاده نمودند. یانگ و همکاران [۲۲] جریان سه‌بعدی و ناپایای کایتاسیون حول پروانه‌های یک توربین را به روش ترکیبی تحلیل نمودند. چانگ با همکاری کیناس [۲۳] جریان کایتاسیون در سیستم پیش‌ران‌ش و آن‌ترجت‌ها را شبیه‌سازی کردند. طی ده سال اخیر، تحقیقات حوزه کایتاسیون به روش المان مرزی غالباً به سمت افزایش سرعت حل و بهینه‌سازی هندسه سوق پیدا کرده است. رشیدی و پسندیده فرد [۲۴] در سال ۲۰۱۲، با استفاده از این روش، شکل بهینه پیشانی پرتابه‌های متقارن محوری را بر اساس کمترین ضریب پسا ارائه دادند. یاری و قاسمی [۲۵] در سال ۲۰۱۳، جریان حول یک پروانه خاص را تحلیل و اثرات جریان‌ات عرضی را بر شرایط کایتاسیون گزارش نمودند. جعفری و همکاران [۲۶] در سال ۲۰۱۶، با استفاده از یک مدل غیرخطی، جریان کایتاسیون گسترده حول یک بال را تحلیل کردند. نوروزی و همکاران [۲۷]. برای شبیه‌سازی کایتاسیون جزئی حول پرتابه‌های با مقطع بیضوی الگوریتمی شبه‌سه‌بعدی ارائه دادند. آنولوی و همکاران [۲۸] در سال ۲۰۲۱ برای پیش‌بینی بهینه انتهای کاپیتی بر روی هیدروفویل‌ها در روش المان مرزی، الگوریتمی ارائه دادند. در سال ۲۰۲۲، ملتانی و همکاران [۲۹] با استفاده از این روش، اثر یک سطح کنترل عمودی روی یک جسم زیرسطحی نزدیک سطح آزاد را بر مشخصات موج بررسی کردند.

مرور تاریخچه استفاده از روش المان مرزی در تحلیل پدیده کایتاسیون نشان می‌دهد که عمده پژوهش‌های این حوزه، حول هیدروفویل‌ها و پروانه‌ها بوده است و کمتر به تحلیل جریان کایتاسیون حول پرتابه‌ها پرداخته شده است؛



شکل ۱- دستگاه مختصات و بردارهای یکه موردنیاز [۳۱]



شکل ۲- دو دستگاه مختصات مورد استفاده [۳۰].

رابطه (۱) ارتباط بین φ_P (پتانسیل اختلالی) و \emptyset (پتانسیل کل) در هر نقطه را بیان می‌کند [۳۱]:

$$\emptyset = \vec{U}_{\infty} \cdot \vec{R} + \varphi_P \quad (1)$$

که عبارت اول سمت راست، $\vec{U}_{\infty} \cdot \vec{R}$ ، پتانسیل جریان آزاد است. \vec{U}_{∞} می‌تواند به صورت یک جریان یکنواخت و یا غیریکنواخت معرفی شود. بیان انتگرالی تئوری سوم گرین، معادله‌ای پتانسیل مبنا است که برای شبیه‌سازی جریان پتانسیلی سه‌بعدی، از توزیع پتانسیل چشمه و دوگان بر روی مرزهای حوزه حل استفاده می‌کند. این معادله که توسط مورینو [۳۳] در سال ۱۹۷۴ ارائه شد به صورت زیر است:

$$\varphi(x) = \int_S \left[\varphi(\tilde{x}) \frac{\partial G(x, \tilde{x})}{\partial n_{\tilde{x}}} - G(x, \tilde{x}) \frac{\partial \varphi(\tilde{x})}{\partial n_{\tilde{x}}} \right] dS \quad (2)$$

که در آن $G(x, \tilde{x})$ تابع پتانسیل یک چشمه و $\partial G(x, \tilde{x}) / \partial n_{\tilde{x}}$ مشتق عمودی آن، یعنی تابع پتانسیل یک دوگان است. این دو تابع در فضای سه‌بعدی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

مختصات با مولفه‌های متعامد (u_1, u_2, u_3) و بردارهای یکه (e_1, e_2, e_3) در شکل ۱ نشان داده شده است. (ج دستگاه مختصات موضعی غیرمتعامد متصل به المان که دارای دو مولفه مماس بر دو ضلع هر المان و یک مولفه عمود بر صفحه المان است و نقطه مرجع آن بر مرکز هر المان منطبق می‌باشد. این دستگاه مختصات با مولفه‌های (s_1, s_2, s_3) و بردارهای یکه (t_1, t_2, t_3) در شکل ۱ نشان داده شده است [۳۱]. دو دستگاه مختصات الف و ج در شکل ۲ نشان داده شده است. در دستگاه مختصات موضعی غیرمتعامد، محور η در راستای جریان اصلی تحلیل و محور ξ ، در راستای جریان عرضی تعریف شده‌اند، به نحوی که حاصلضرب خارجی بردار $\eta \times \xi$ ، بردار عمود بر المان به سمت بیرون صفحه المان است.

۲-۳- معادلات حاکم:

استخراج معادلات سه‌بعدی حاکم بر روش المان مرزی حاضر، با این فرض اساسی آغاز می‌شود که جریان بر روی سطوح جسم و کاویتا، غیرلزج، غیرقابل تراکم، پایا و غیرچرخشی است. با توجه به این‌که پایه اصلی روش المان مرزی حاضر، معادله لاپلاس است؛ در نتیجه فرض اساسی در آن پتانسیلی بودن جریان است، در صورتی می‌توان از این روش برای تحلیل جریان کاویتاسیون استفاده نمود که ثابت شود این جریان پتانسیلی است. آزمایشات لابراتاکس و همکاران [۳۲] تایید می‌کند که جریان در اطراف کاویتا با تقریب خوبی پتانسیلی است. لذا می‌توان از تئوری‌های پتانسیل برای تحلیل کاویتاسیون حول اجسام استفاده نمود. یکی از روش‌های جایگزین حل کامل معادله لاپلاس، استفاده از روش المان مرزی بر مبنای تئوری گرین است. تئوری گرین بیان می‌کند که هر جریان غیرچرخشی و تراکم‌ناپذیر را می‌توان با توزیع چشمه، دوقطبی یا دوگان روی سطوح مقید آن نشان داد. در تئوری گرین، انتگرال سه‌گانه روی حجم، به انتگرال دوگانه بر روی مرزهای حوزه حل تبدیل می‌شود؛ لذا در انتگرال گرین صرفاً اجزای پتانسیلی ایجادکننده مرزهای حل ظاهر شده و پتانسیل جریان آزاد به صورت شرایط مرزی بر سطوح اعمال می‌شود؛ لذا یک جزء پتانسیلی تحت عنوان «پتانسیل اختلالی» تعریف می‌شود که پتانسیل جریان آزاد را از بقیه اجزای پتانسیلی حل تفکیک می‌کند.

$$S_3 = \mu(S_1, S_2) \quad (۷)$$

که در آن η معادله ضخامت کاویتی است و بر اساس دو مولفه مماسی سطح، S_1, S_2 و مولفه‌ای در راستای عمود بر سطح S_3 تعریف می‌شود. با استفاده از فرض نفوذناپذیری سطح کاویتی و با تعریف تابع F به صورت $F = S_3 - \mu(S_1, S_2) = 0$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \eta}{\partial S_1} [V_{S_1} - V_{S_2} \cos \theta] + \frac{\partial \eta}{\partial S_2} [V_{S_2} - V_{S_1} \cos \theta] = V_{S_3} \sin^2 \theta \quad (۸)$$

که شرط مرزی سینماتیکی روی کاویتی است. از این معادله مشتق جزئی، برای محاسبه ضخامت کاویتی استفاده می‌شود.

۲-۴-۳- شرط مرزی دینامیکی روی سطح کاویتی: با نوشتن معادله برنولی بین نقطه‌ای روی سطح کاویتی و نقطه‌ای در دوردست، ثابت می‌شود شرط مرزی دینامیکی روی سطح کاویتی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S_1} = V_{S_2} \cos \theta + \sin \theta \sqrt{U_{\infty}^2 (1 + \sigma) - V_{S_2}^2} - \bar{U}_{\infty} \cdot t_1 \quad (۹)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۹) در راستای S_1 داریم:

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{S_{10}}^{S_1} \left[V_{S_2} \cos \theta + \sin \theta \sqrt{U_{\infty}^2 (1 + \sigma) - V_{S_2}^2} - \bar{U}_{\infty} \cdot t_1 \right] ds_1 \quad (۱۰)$$

که در آن S_{10} و φ_0 به ترتیب مقدار طول کمان در راستای S_1 و مقدار پتانسیل در نقطه شروع کاویتی است. با استفاده از رابطه (۱۰)، مقدار پتانسیل φ بر روی المان‌های سطح کاویتی مشخص خواهد شد. در معادله انتگرالی گرین از این رابطه به عنوان شرط مرزی معلوم برای سطح کاویتی استفاده می‌شود.

۲-۵- نقطه شروع و انتهای کاویتی:

با توجه به مشاهدات تجربی آراکری [۳۴]، انتخاب نقطه کمینه

$$G(x, \tilde{x}) = \frac{1}{4\pi r(x, \tilde{x})}, \quad r(x, \tilde{x}) = |r| = |x - \tilde{x}| \quad (۳)$$

$$\frac{\partial G(x, \tilde{x})}{\partial n_x} = -\frac{1}{4\pi |x - \tilde{x}|^3} r(x, \tilde{x}) \cdot n_x \quad (۴)$$

که در روابط فوق، x موقعیت برداری نقطه‌ای در حوزه حل است که اثر اجزای پتانسیلی توزیع شده روی مرزهای حوزه حل را احساس می‌کند (نقطه میدان) و دارای مختصات (x_p, y_p, z_p) است و \tilde{x} موقعیت برداری نقطه‌ای بر روی مرزهای حوزه حل است که اجزای پتانسیل روی آن قرار دارد و بر نقاط میدان تاثیر می‌گذارد (نقطه منبع) و دارای مختصات (x_0, y_0, z_0) است. $n_{\tilde{x}}$ نیز بردار یکه عمود بر سطوح به سمت بیرون در نقطه \tilde{x} است. $\varphi(\tilde{x})$ قدرت دوگان و $\partial \varphi(x) / \partial n_{\tilde{x}}$ قدرت چشمه سه‌بعدی است [۳۹]. مطابق رابطه (۲)، در انتگرال گرین از پتانسیل اختلالی و برای معرفی توابع پتانسیل چشمه و دوگان از دستگاه مختصات مرجع کارترین استفاده شده است.

۲-۴-۲- شرایط مرزی

۲-۴-۱- شرط مرزی سینماتیکی روی سطح جسم و کاویتی: اصل نفوذناپذیری جریان به درون جسم جامد یا کاویتی اقتضا می‌کند که سرعت عمودی روی سطح جسم و کاویتی صفر باشد و در نتیجه جریان روی این سطوح صرفاً به صورت مماسی باشد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_B \cup S_C \quad (۵)$$

که در آن n بردار عمود بر سطح و به سمت بیرون است. با ترکیب رابطه (۵) و رابطه (۱) داریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial (U_{\infty} \cdot R)}{\partial n} \quad \text{on } S_B \cup S_C \quad (۶)$$

۲-۴-۲- بیان دیگری از شرط مرزی سینماتیکی روی سطح کاویتی: فرض می‌شود که بردار سطح کاویتی به صورت رابطه‌ای بر حسب مولفه‌های مکانی دستگاه مختصات موضعی غیرمتعامد متصل به المان، به صورت تابع زیر مشخص شود:

۲-۶-۲- معادلات حاکم بر جریان همراه با کاویتاسیون:
 با توجه به متفاوت بودن شرایط مرزی روی جسم و کاویتا در جریان همراه با کاویتاسیون، چینش اجزای معادله گرین در دو طرف تساوی، برای المان‌های روی جسم و کاویتا متفاوت است. در المان‌های روی جسم، مشابه جریان بدون کاویتاسیون، قدرت چشمه، $\partial\varphi(x)/\partial n_{\bar{x}}$ ، مطابق رابطه (۷) معلوم و قدرت دوگان، φ ، مجهول است که می‌بایست از حل انتگرال گرین به دست آید. در المان‌های روی کاویتا، قدرت دوگان، φ با استفاده از رابطه (۱۰) معلوم و قدرت چشمه، $\partial\varphi(x)/\partial n_{\bar{x}}$ مجهول خواهد بود؛ لذا، رابطه (۲) برای جریان همراه با کاویتاسیون به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi(x) - \int_{S_B} \varphi(\bar{x}) \frac{\partial G(x, \bar{x})}{\partial n_{\bar{x}}} dS \\ + \int_{S_C} G(x, \bar{x}) \frac{\partial \varphi(\bar{x})}{\partial n} dS \\ = \int_{S_C} (\bar{x}) \frac{\partial G(x, \bar{x})}{\partial n_{\bar{x}}} dS \\ - \int_{S_B} G(x, \bar{x}) \frac{\partial (U_{\infty} \cdot R)}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (12)$$

که در رابطه (۱۲) مقدار φ روی سطح جسم و مقدار $\partial\varphi(x)/\partial n_{\bar{x}}$ روی سطح کاویتا مجهول است که با نوشتن رابطه فوق برای هر المان و تشکیل یک دستگاه معادلات خطی و حل آن به روش حذفی گوس، مجهولات محاسبه خواهد شد. از آنجایی که طرف دوم رابطه (۱۰) حاصل جمع φ_0 (مجهول) و یک عبارت رادیکالی (معلوم) است؛ لذا در رابطه (۱۲) باید φ_0 به عنوان مجهول به سمت چپ رابطه منتقل شود و عبارت رادیکالی، به عنوان یک عبارت معلوم، در سمت راست باقی بماند.

۲-۷- شرط همگرایی و به روزآوری طول کاویتا:

الگوریتم حل به این صورت است که در تکرار اول، یک طول اولیه برای هر یال هندسه مساله فرض می‌شود و بر اساس آن دستگاه معادلات حل شده و از نتایج آن ضخامت کاویتا در نقطه مرکزی هر المان کاویتا محاسبه می‌شود. در صورتی می‌توان گفت، حل همگرا شده است که در راستای هر یال، ضخامت کاویتا در المان انتهایی کاویتا صفر و یا اصطلاحاً

فشار به‌عنوان نقطه شروع کاویتا، انتخابی نزدیک به واقعیت است. در این پژوهش، نقطه کمینه فشار با استفاده از تغییرات ضریب فشار در حل جریان بدون کاویتاسیون به دست می‌آید. برای بستن انتهای کاویتا، مدل‌های مختلفی پیشنهاد شده است که از میان آنها، دو مدل ساده و جت بازگشتی را می‌توان بر معادلات روش المان مرزی اعمال نمود. در مدل ساده، انتهای کاویتا روی سطح جسم بسته می‌شود. استفاده از این مدل منجر به ایجاد یک نقطه سکون در انتهای کاویتا شده و در نمودار تغییرات ضریب فشار، پرش غیرمتعارفی را ایجاد می‌کند. در مدل جت بازگشتی، قسمتی از جریان روی کاویتا از انتهای کاویتا به درون آن برمی‌گردد که باعث حذف نقطه سکون ایجاد شده در مدل ساده و نزدیک شدن نمودار تغییرات ضریب فشار در انتهای کاویتا به مقادیر تجربی و عددی دیگر می‌شود. با توجه به کم‌اثر بودن مدل جت بازگشتی بر مشخصه‌های هندسی کاویتا، در این پژوهش صرفاً از مدل بستن ساده در انتهای کاویتا استفاده شده است.

۲-۶-۲- اعمال شرایط مرزی بر معادلات حاکم:

۲-۶-۱- معادلات حاکم بر جریان بدون کاویتاسیون:

در جریان بدون کاویتاسیون روی اجسام مختلف، قدرت چشمه، $\partial\varphi(x)/\partial n_{\bar{x}}$ مطابق رابطه (۷) معلوم و قدرت دوگان، φ ، مجهول است که می‌بایست از حل انتگرال گرین به دست آید. با اعمال شرط مرزی (۷) بر معادله گرین در مرزهای جسم، S_B و با انتقال عبارت‌های معلوم به طرف راست معادله و عبارت‌های مجهول به طرف چپ آن، رابطه (۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi(x) - \int_{S_B} \varphi(\bar{x}) \frac{\partial G(x, \bar{x})}{\partial n_{\bar{x}}} dS \\ = \int_{S_B} G(x, \bar{x}) \frac{\partial (U_{\infty} \cdot R)}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (11)$$

در رابطه فوق، مقدار $G(x, \bar{x})$ و $\partial G(x, \bar{x})/\partial n_{\bar{x}}$ با استفاده از روابط تحلیلی (۳) و (۴) محاسبه خواهد شد. بر این اساس، تنها عبارت مجهول بر روی هر المان در رابطه (۱۱)، مقدار قدرت دوگان‌ها یعنی $\varphi(\bar{x})$ است که با نوشتن این رابطه برای هر المان و تشکیل یک دستگاه معادلات خطی و حل آن به روش حذفی گوس محاسبه می‌شود.

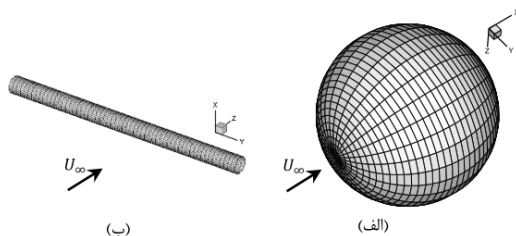
۳- ارائه نتایج

۳-۱- جریان بدون کاویتاسیون حول اجسام مختلف:

۳-۱-۱- کره و استوانه:

به منظور صحت‌سنجی تحلیل المان مرزی حاضر، ابتدا نتایج این روش برای جریان بدون کاویتاسیون حول کره و استوانه ارائه و با پاسخ تحلیلی این دو جریان مقایسه شده است. شکل ۳، دو هندسه مورد بررسی یعنی استوانه و کره‌ای به قطر واحد را نشان می‌دهد. کتب مرجع سیالات، توزیع ضریب فشار جریان پتانسیل حول کره‌ای به قطر واحد را به صورت $C_p(\theta) = 1 - 9/4 \sin^2(\theta)$ و ضریب فشار جریان پتانسیل حول استوانه را به صورت $C_p(\theta) = 1 - 4 \sin^2(\theta)$ ارائه کرده‌اند که در این دو رابطه، θ معرف زاویه طی شده از مرکز سکون کره یا استوانه است [۳۵]. بدیهی است، جهت تطابق شرایط تحلیل حاضر با پاسخ تحلیلی مرجع [۳۵] برای استوانه، می‌بایست طول پوسته استوانه‌ای به اندازه کافی بلند در نظر گرفته شود تا اثرات ابتدا و انتهای استوانه بر نتایج حلقه میانی آن (حلقه مورد بررسی) بی‌تاثیر باشد. بررسی پژوهش حاضر نشان می‌دهد که سرعت و ضریب فشار در حلقه میانی، در استوانه‌های با طول بیش از ۱۲ برابر قطر استوانه، متأثر از ابتدا و انتهای استوانه نیست؛ شکل ۴ تطابق توزیع ضریب فشار حاصل از روش المان مرزی حاضر حول دو هندسه کره و استوانه را با روابط تحلیلی نشان می‌دهد.

به منظور بررسی استقلال حل از تعداد المان در راستای هر یال، روش حاضر برای تعداد المان‌های مختلف حل و در شکل ۴ ارائه شده است. مطابق نتایج، خطای نسبی تحلیل حاضر نسبت به پاسخ تحلیلی در هر دو هندسه کره و استوانه در نقطه کمینه فشار (زاویه ۹۰ درجه از مرکز سکون)، یعنی نقطه‌ای که دارای بیشترین خطاست، حتی در کمترین تعداد المان مورد بررسی، حداکثر ۵ درصد است.



شکل ۳- هندسه تحلیل جریان بدون کاویتاسیون حول: (الف) کره به قطر واحد و (ب) استوانه به قطر واحد و طول ۱۵.

کاویته بر روی سطح جسم بسته شود. این مفهوم، به بیان ریاضی، به صورت زیر ارائه می‌شود:

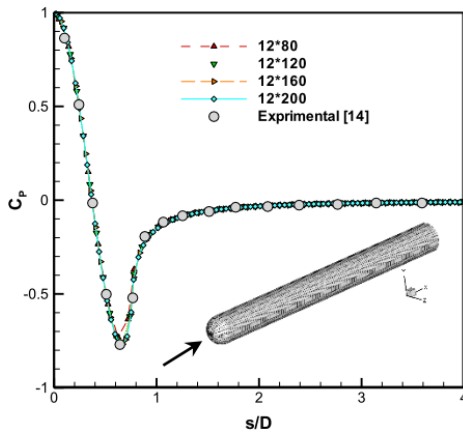
$$\eta_{(i_r + \frac{1}{2})j} \equiv \delta_j(l_{c_j}) = 0 \quad (13)$$

که در آن i_r شماره المان انتهایی کاویته در راستای یال، j شماره یال و l_{c_j} طول کاویته در راستای یال j ام است. در صورتی که این شرط برای کلیه یال‌های حوزه حل ارضا شود حل همگرا شده است؛ در غیر این صورت دو حالت ممکن است پیش آید: اگر $\delta_j(l_{c_j}) < 0$ باشد، این بدان معناست که طول کاویته اولیه در نظر گرفته شده کوچک است و باید در تکرار بعدی در راستای آن یال، طول بزرگتری برای کاویته در نظر گرفته شود؛ و اگر $\delta_j(l_{c_j}) > 0$ باشد، این بدان معناست که طول کاویته اولیه در نظر گرفته شده بزرگ است و در تکرار بعدی می‌بایست طول کوچک‌تری برای کاویته در راستای آن یال در نظر گرفته شود. تعیین اینکه در دو شرایط فوق به ترتیب چه میزان افزایش و یا کاهش طول کاویته انجام گیرد با استفاده از روش نیوتن-رافسون صورت می‌گیرد:

$$\{L\}^{n+1} = \{L\}^n - (J)^{-1} \{d\}^n \quad (14)$$

که در آن $\{L\}^n = \{l_{c_1}, l_{c_2}, \dots, l_{c_j}\}^n$ مقدار طول کاویته و $\{d\}^n = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j\}^n$ مقدار ضخامت انتهایی کاویته در راستای هر یال در تکرار n ام و $J_{ij} = \partial \delta_i / \partial l_{c_j}$ ماتریس ژاکوبین است. روش مورد استفاده جهت به‌روزروی طول کاویته در پژوهش‌های [۱۵، ۳۹] مورد استفاده قرار گرفته است. به‌روزروی طول کاویته تا جایی ادامه می‌یابد که شرط $\delta_j(l_{c_j}) = 0$ در همه یال‌ها ارضا شود. معنای فیزیکی عبارت مذکور این است که طول اصلاح شده کاویته توسط روش نیوتن-رافسون در هر یال، در صورتی قابل قبول است که انتهای کاویته بر روی سطح جسم بسته شود و به بیان تحلیل عددی، اندازه ضخامت انتهایی کاویته از عدد کوچکی مانند ϵ کوچکتر باشد. این مفهوم که به عنوان شرط همگرایی روش حاضر مورد استفاده قرار گرفته است، به صورت زیر است:

$$|\delta_j(l_{c_j})^n| < \epsilon \quad j = 1, \dots, N_j \quad (15)$$



شکل ۵- تغییرات ضریب فشار حول یک یال از استوانه- ای با پیشانی کروی و مقایسه نتایج حاصل با نتایج آزمایشگاهی مرجع [۳۶].

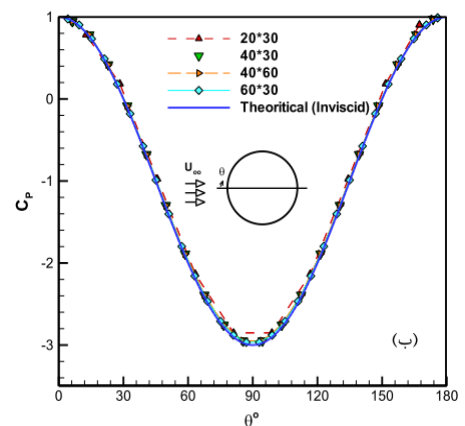
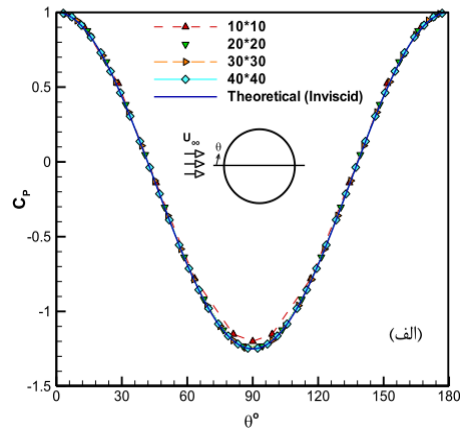
۳-۲- کاویتاسیون جزئی حول پرتابه‌های مختلف:

۳-۲-۱- پرتابه‌های مورد بررسی:

طول و ضخامت کاویته جزئی ایجاد شده حول هندسه‌های استوانه‌ای به شدت متاثر از نقطه شروع کاویته است. نقطه شروع کاویته نیز بیش از هر چیز متاثر از پیشانی هندسه استوانه‌ای است. بر این اساس، در پژوهش حاضر یک هندسه استوانه‌ای به قطر واحد و به کمینه طول ۱۰ برابر قطر، به سه پیشانی تخت، کروی و مخروطی (با زاویه مخروط ۴۵ درجه) متصل شده است. در شکل ۶ نمای این هندسه استوانه‌ای با سه پیشانی مختلف نشان داده شده است.

۳-۲-۲- اعتبارسنجی کیفی نتایج:

در شکل ۷ مشخصات هندسی کاویته جزئی به دست آمده از روش المان مرزی حاضر با تصاویر نتایج آزمایشگاهی تونل آب مرجع [۳۶] (برای استوانه سرتخت و سر کروی) و [۳۷] (برای استوانه سر مخروطی) به صورت کیفی مقایسه شده است. نتایج آزمایشگاهی مرجع [۳۶] با استفاده از یک تونل آب با مقطع تستی به ابعاد ۵۰۰*۵۰۰ میلی‌متر و قطر استوانه سرتخت و سر کروی ۲۵ میلی‌متر و نتایج آزمایشگاهی مرجع [۳۷] در تونل آبی با مقطع تستی به ابعاد ۶۰۰*۶۰۰ میلی‌متر و قطر استوانه سر مخروطی ۸۰ میلی‌متر انجام گرفته است. مطابق شکل مذکور، روش المان مرزی حاضر، مشخصات هندسی کاویته را به طور کیفی نزدیک به نتایج آزمایشگاهی مراجع [۳۶، ۳۷] نشان می‌دهد؛ البته در استوانه سر مخروطی (شکل ۷-ج) طول

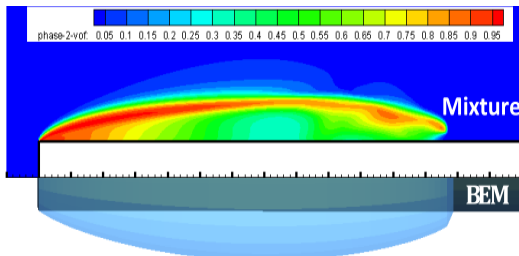


شکل ۴- مقایسه تغییرات ضریب فشار حول یک یال: الف) کره و ب) استوانه حاصل از تحلیل حاضر با نتایج- تحلیلی [۳۵].

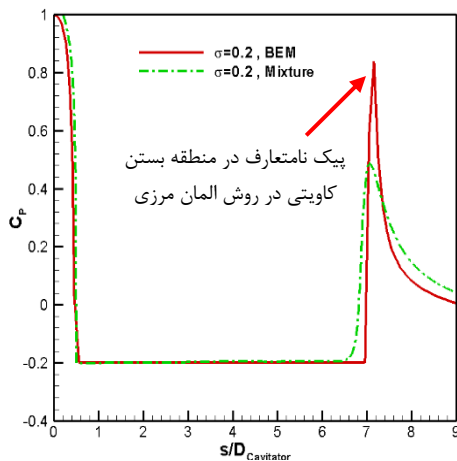
۳-۲-۳- هندسه استوانه‌ای با پیشانی کروی:

در شکل ۵، نمودار توزیع ضریب فشار نسبت به کمان طی شده در راستای یک یال از استوانه‌ای سر کروی به قطر واحد و طول ۱۰، در زاویه حمله صفر درجه با نتایج آزمایشگاهی مرجع [۳۶] مقایسه شده است. تطابق نتایج حاصل از روش المان مرزی حاضر با نتایج تجربی کاملاً مشهود است.

پرتابه سرتخت به قطر واحد و طول ۱۶ در عدد کاویتاسیون ۰/۲ با هم مقایسه شده است که هندسه کاویتی در دو روش با یکدیگر انطباق مناسبی دارند. در شکل ۹ نمودار توزیع ضریب فشار بر روی یک یال از استوانه سرتخت در عدد کاویتاسیون ۰/۲ نشان داده شده است. مطابق شکل، به جز در منطقه انتهایی کاویتی که روش المان مرزی نقطه پیک غیرمتمعارفی را نشان می‌دهد، در بقیه قسمت‌های نمودار، دو روش مذکور با یکدیگر تطابق مناسبی دارند. در بخش ۳-۲-۴ در خصوص ایجاد پیک ایجاد شده در نمودار توزیع ضریب فشار در انتهای کاویتی توضیح داده خواهد شد.



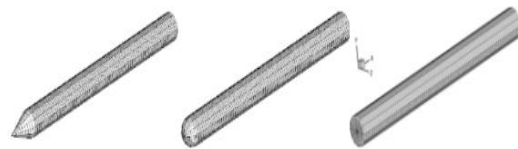
شکل ۸- مقایسه نتایج دو روش المان مرزی و مخلوط همگن مرجع [۶] حول استوانه سرتخت در عدد کاویتاسیون ۰/۲.



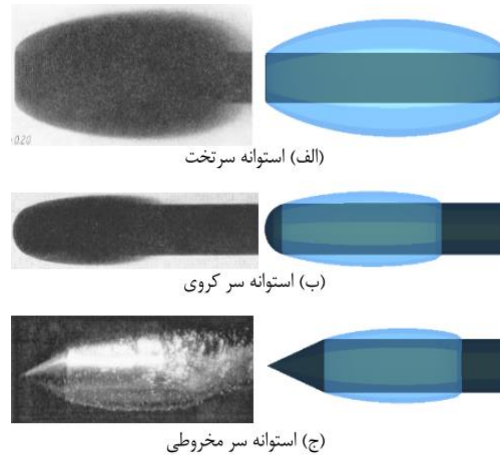
شکل ۹- مقایسه نمودار توزیع ضریب فشار تحلیل حاضر و مخلوط همگن مرجع [۶] حول استوانه سرتخت در عدد کاویتاسیون ۰/۲.

۳-۲-۴- توزیع ضریب فشار روی هندسه‌های مورد بررسی: در شکل ۱۰، توزیع ضریب فشار روی بدنه استوانه سرتخت، سرکروی و سرمخروطی (با زاویه مخروط ۴۵ درجه) حاصل از

کاویتی حاصل از نتایج آزمایشگاهی، حدود ۱۵ درصد بزرگتر از نتایج روش المان مرزی حاضر است که علت را می‌توان به اثرات دیواره مقطع آزمایش نسبت داد؛ در حالی که به نظر می‌رسد نتایج آزمایشگاهی مرجع [۳۶] به علت بیشتر بودن نسبت قطر مقطع تست به قطر استوانه، متاثر از اثرات دیواره نبوده است. نتایج آزمایشگاهی مختلف نشان می‌دهد که دیواره مقطع آزمایش تونل آب، طول کاویتی را افزایش می‌دهد [۳۸].



شکل ۶- نمای سه‌بعدی پرتابه‌های مورد بررسی.



شکل ۷- مقایسه کیفی مشخصات هندسی کاویتی جزئی حول استوانه‌های مختلف به دست آمده از روش المان مرزی حاضر و نتایج آزمایشگاهی مرجع [۳۶، ۳۷].

۳-۲-۳- مقایسه نتایج حاضر با نتایج مخلوط همگن: در شکل ۸، نتایج تحلیل حاضر (نیمه پایینی شکل) با نتایج حاصل از شبیه‌سازی روش مخلوط همگن مرجع [۶] (نیمه بالایی شکل) در نرم افزار فلونتت مقایسه شده است. در تحلیل به روش مخلوط همگن مذکور از مدل آشفتگی RSM استفاده شده است. روش مخلوط همگن یکی از روش‌های تحلیل دوفازی جریان کاویتاسیون است و بررسی مرجع [۳۸] حاکیست که این روش برای جریان‌های دوفازی همراه با کاویتاسیون طبیعی جواب قابل قبولی ارائه می‌دهد. در شکل ۸ نتایج دو روش برای جریان کاویتاسیون جزئی حول یک

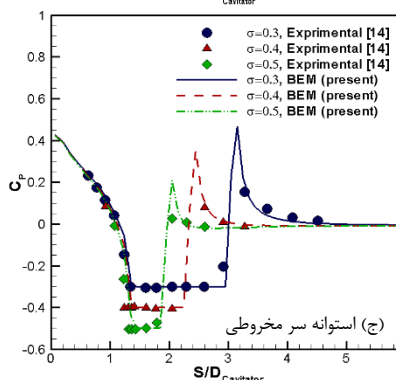
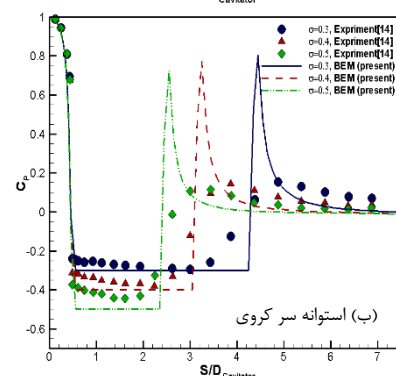
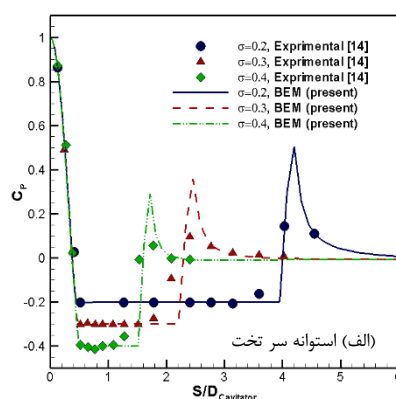
سکون غیرواقعی، به علت استفاده از مدل بستن ساده در انتهای کاویتا و دور شدن از فرض اصلی روش المان مرزی یعنی پتانسیلی بودن جریان در این منطقه است. بررسی مرجع [۳۹] نشان می‌دهد، حتی با اعمال مدل جت بازگشتی در انتهای کاویتا نیز مقدار بیشینه ضریب فشار با مقدار آزمایشگاهی اختلاف دارد. البته این اختلاف نتایج منحصر به روش‌های بر پایه پتانسیل نیست و حتی در روش‌های عددی مراجع [۳،۴۰] نیز که در آنها از حل کامل معادله ناور-استوکس برای تحلیل کاویتاسیون استفاده شده، مقدار بیشینه ضریب فشار در انتهای کاویتا بیش از مقدار واقعی است. البته به دلیل محدود بودن منطقه این پیک فشاری، اثرات آن بر ضرایب آیرودینامیکی محدود است.

۳-۲-۵- هندسه کاویتا جزئی:

در جدول ۱ هندسه کاویتا شامل طول، بیشینه ضخامت و نیز موقعیت نقطه بیشینه ضخامت کاویتا ایجاد شده حول سه هندسه سرتخت، سرکروی و سرمخروطی (با زاویه مخروط ۴۵ درجه) در اعداد کاویتاسیون مختلف ارائه شده است. مطابق انتظار، طول کاویتا با عدد کاویتاسیون رابطه عکس دارد. در یک عدد کاویتاسیون ثابت، با توجه به پرش بیشتر جریان در لبه پیشانی سرتخت، طول کاویتا بزرگ‌تر از طول کاویتا در استوانه‌های سرمخروطی و سرکروی است؛ همچنین در هر سه هندسه، با کاهش عدد کاویتاسیون (افزایش طول کاویتا)، موقعیت بیشینه ضخامت به نقطه وسط کاویتا نزدیک شده و شکل کاویتا حالت متقارن‌تری به خود می‌گیرد.

در شکل ۱۱ تغییرات طول کاویتا نسبت به عدد کاویتاسیون، حول پرتابه‌های با پیشانی مختلف با نتایج آزمایشگاهی و عددی دیگر مقایسه شده است که تطابق نسبی نتایج مختلف با نتایج پژوهش حاضر در محدوده وسیعی از اعداد کاویتاسیون (۰/۶-۰/۷۵) مشهود است؛ البته در شکل (۱۱-الف)، طول کاویتا حاصل از روش‌های پتانسیلی المان مرزی حول پرتابه سرتخت، حدود ۱۰ درصد بیش از مقدار پیش‌بینی شده توسط روش VOF [۳] و رابطه تجربی ارائه شده در مرجع [۴۰] است که علت آن را می‌توان به فرض پتانسیلی بودن جریان و لحاظ یک سرعت ثابت بر روی المان‌های کاویتا در این روش نسبت داد. در شکل‌های (۱۱-ب) و (۱۱-ج) نیز نتایج پژوهش حاضر با نتایج مرجع [۳۸،۴۱] تطابق مناسبی دارند.

تحلیل حاضر با داده‌های آزمایشگاهی مرجع [۳۶] مقایسه شده است. مطابق شکل، نتایج حاضر با تطبیق بسیار خوبی داده‌های آزمایشگاهی را تا منطقه انتهای کاویتا دنبال می‌کند؛ اما در انتهای کاویتا، شیب و بیشینه ضریب فشار با نتایج آزمایشگاهی تطابق ندارد.



شکل ۱۰- مقایسه نتایج تغییرات توزیع ضریب فشار در راستای یک یال طولی در تحلیل حاضر با نتایج تجربی مرجع [۳۶] در اعداد کاویتاسیون مختلف برای پرتابه‌های مختلف.

پرش ضریب فشار در نقطه بیشینه آن، ناشی از ایجاد یک نقطه

جدول ۱- طول، ضخامت و موقعیت بیشینه کاویتی

جزئی حول استوانه سرتخت، سرکروی و

سر مخروطی در اعداد کاویتاسیون مختلف.

| نوع پیشانی | σ | $L_{cav.}$ | $H_{cav.,Max}$ | $\frac{H_{cav.,Max}}{L_{cav.}}$ |
|------------|----------|------------|----------------|---------------------------------|
| سرتخت | ۰/۲ | ۶/۶۷ | ۰/۶۸۲ | ۰/۵۴ |
| | ۰/۳ | ۳/۹۰ | ۰/۴۳۹ | ۰/۵۵ |
| | ۰/۴ | ۲/۶۳ | ۰/۳۱۸ | ۰/۵۶ |
| سرکروی | ۰/۵ | ۱/۹۵ | ۰/۲۴۷ | ۰/۵۶ |
| | ۰/۲ | ۳/۶۲ | ۰/۲۲۹ | ۰/۵۷ |
| | ۰/۳ | ۱/۹۵ | ۰/۱۲۳ | ۰/۶۱ |
| | ۰/۴ | ۱/۱۸ | ۰/۰۷۱ | ۰/۶۶ |
| سر مخروطی | ۰/۵ | ۰/۷۶۵ | ۰/۰۴۳ | ۰/۶۸ |
| | ۰/۲ | ۳/۱۸ | ۰/۲۱۵ | ۰/۵۶ |
| | ۰/۳ | ۱/۷۴ | ۰/۱۲۷ | ۰/۵۷ |
| | ۰/۴ | ۱/۰۸ | ۰/۰۸۵ | ۰/۵۷ |
| | ۰/۵ | ۰/۷۵ | ۰/۰۶۲ | ۰/۶۷ |

$$\left. \frac{L_{cav.}}{D_{cavitator}} \right|_{Hemispherical-head} = 0.295\sigma^{-1.51} \quad (17)$$

$$R^2 = 0.994$$

$$\left. \frac{L_{cav.}}{D_{cavitator}} \right|_{Conical-head45^\circ} = 0.284\sigma^{-1.47} \quad (18)$$

$$R^2 = 0.998$$

همچنین با گذراندن منحنی از نمودار بیشینه ضخامت کاویتی بر حسب عدد کاویتاسیون به ترتیب برای استوانه سرتخت، سرکروی و سر مخروطی، روابط توانی به صورت روابط ۱۹ تا ۲۱ به دست می‌آید:

$$\left. \frac{H_{cav.,Max}}{D_{cavitator}} \right|_{Blunt-head} = 0.115\sigma^{-1.09} \quad (19)$$

$$R^2 = 0.999$$

$$\left. \frac{H_{cav.,Max}}{D_{cavitator}} \right|_{Hemispherical-head} = 0.015\sigma^{-1.60} \quad (20)$$

$$R^2 = 0.998$$

$$\left. \frac{H_{cav.,Max}}{D_{cavitator}} \right|_{Conical-head45^\circ} = 0.027\sigma^{-1.26} \quad (21)$$

$$R^2 = 0.998$$

در روابط فوق، کمیت R^2 معرف «ضریب تشخیص» است که میزان تطابق روابط فوق را با داده‌های تحلیل نشان می‌دهد. روابط فوق یکی از نوآوری‌های این پژوهش است که برای اعداد کاویتاسیون در محدوده ۰/۰۷۵ تا ۰/۵ صادق است.

۳-۲-۷- کاویتاسیون جزئی در زوایه حمله غیر صفر:

در شکل ۱۲ نتایج تحلیل حاضر برای جریان حول یک استوانه سرتخت به طول ۱۵ در زوایای حمله ۴ و ۸ درجه در عدد کاویتاسیون ۰/۱۷ با نتایج حاصل از تحلیل فلونتت به روش مخلوط همگن مقایسه شده است. طبق شکل، طول و ضخامت کاویتی حاصل از روش المان مرزی حاضر حدود ۱۵ درصد از طول کاویتی حاصل از روش عددی مخلوط همگن بزرگتر است که به علت ماهیت پتانسیلی روش المان مرزی است. در شکل-های ۱۳ و ۱۴ ضرایب آیرودینامیکی به تفکیک برای پیشانی و بدنه پرتابه به دو روش المان مرزی و مخلوط همگن (فلونتت) به ترتیب در راستای محور پرتابه و عمود بر آن با هم مقایسه شده است. مطابق شکل ۱۳، ضریب آیرودینامیکی محوری در دو تحلیل مذکور، به جز در زاویه هشت درجه بر روی پیشانی پرتابه، از انطباق قابل قبولی برخوردار است که در استثنای

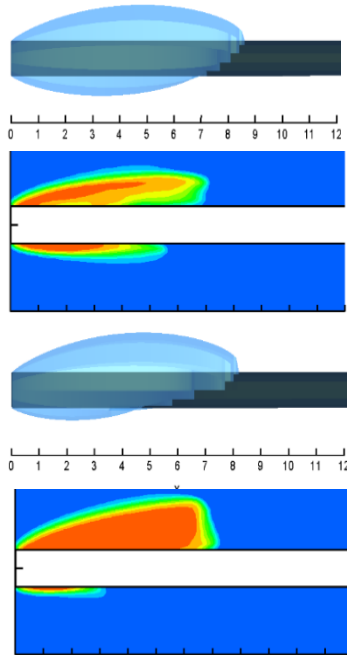
رابطه عکس طول کاویتی با عدد کاویتاسیون را می‌توان این‌گونه توجیه نمود که در اعداد کاویتاسیون کوچکتر (سرعت بیشتر)، جریان سیال دارای مومنتوم بیشتری نسبت به جریان در اعداد کاویتاسیون بزرگتر است؛ این مسأله باعث می‌شود که در اعداد کاویتاسیون کوچکتر، خطوط جریان تمایل داشته باشند که طول بیشتری را تا رسیدن به نقطه سکون روی جسم (انتهای کاویتی) طی کنند؛ بنابراین طول کاویتی افزایش خواهد داشت.

۳-۲-۶- ارائه روابطی برای طول و ضخامت کاویتی جزئی:

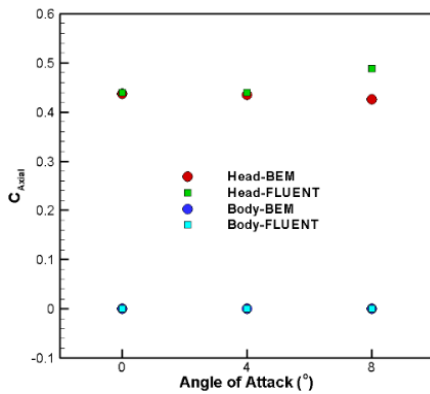
نتایج ارائه شده در شکل ۱۱، وجود رابطه توانی بین طول و ضخامت کاویتی جزئی ایجاد شده روی سه هندسه مورد بررسی را با عدد کاویتاسیون تایید می‌کند. بر همین مبنا، می‌توان رابطه‌ای را برای طول و ضخامت بیشینه کاویتی به صورت $A\sigma^{-B}$ ارائه نمود که در آن σ عدد کاویتاسیون است. بر این اساس، با گذراندن یک منحنی از نتایج حاصل از روش المان مرزی حاضر، رابطه طول بی‌بعد کاویتی بر حسب عدد کاویتاسیون به ترتیب برای استوانه سرتخت، سرکروی و سر مخروطی در قالب روابط ۱۶ تا ۱۸ به دست می‌آید:

$$\left. \frac{L_{cav.}}{D_{cavitator}} \right|_{Blunt-head} = 0.785\sigma^{-1.31} \quad (16)$$

$$R^2 = 0.999$$

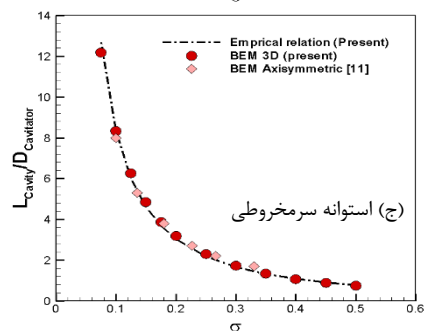
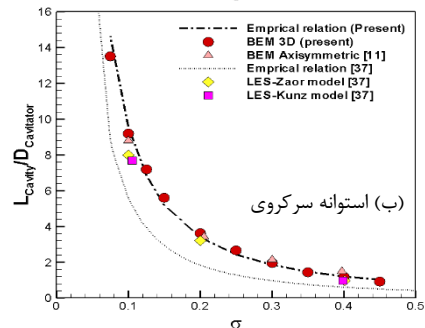
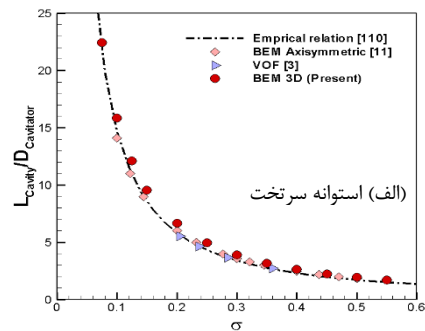


شکل ۱۲- مقایسه شکل کاویتی حاصل از روش المان مرزی و روش مخلوط همگن (فلوئنت) حول یک استوانه سر تخت در زوایای حمله ۴ و ۸ درجه در عدد گاویناسیون ۰/۱۷.



شکل ۱۳- تغییر ضریب آیرودینامیکی در راستای محور پرتابه سر تخت در عدد گاویناسیون ۰/۱۷ حاصل از روش المان مرزی و تحلیل مخلوط همگن در زوایای حمله مختلف.

مشاهده شده اختلاف نتایج دو تحلیل حدود ۱۲ درصد است. همچنین مطابق شکل ۱۴، هر دو روش ضریب فشاری عمود بر محور پرتابه در زاویه حمله صفر را مطابق انتظار، برابر صفر پیش‌بینی می‌کنند و با افزایش زاویه حمله، به علت اختلاف فشار بیشتر بین یال‌های مختلف پرتابه، ضریب فشاری عمودی بیشتر و نتایج دو روش از همدیگر فاصله می‌گیرند که ناشی از اختلاف طول کاویتی پیش‌بینی شده در یال‌های مختلف در دو روش مذکور و نیز پرش غیرمتعارف ضریب فشار در انتهای کاویتی در روش المان مرزی است که البته با توجه به محدود بودن منطقه دارای پیک فشاری، تاثیر آن بر ضرایب آیرودینامیکی محدود است.



شکل ۱۱- نمودار طول کاویتی جزئی بر حسب عدد گاویناسیون حول استوانه با پیشان‌ب مختلف.

۵- مراجع

[۱] برازنده، ح.، جعفری گاوزن، ا. (۱۳۹۸). بررسی تجربی پدیده کاویتاسیون حول جسم با دماغه مخروطی و پس جسم استوانه‌ای، مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، د. ۹، ش. ۲، ص. ۲۴۹-۲۵۹.

[2] Kartikeya K. (2006) Cavitating flow over oscillating hydrofoils and hydrofoil-based ship stabilization system, Mumbai, p.15.

[3] Euteneuer A. (2003) Further studies into the dynamics of a supercavitating torpedo, Minnesota Uni., p. 1.

[4] Franc J.P., Michel J.M. (2005) Fundamentals of Cavitation, Kluwer academic publishers, eBook ISBN: 1-4020-2233-6, USA.

[5] Wang G., Senocak I., Shyy W., Ikohagi T., Cao SH. (2001) Dynamics of attached turbulent cavitating flows, Progress in Aerospace Sciences, Vol. 37, pp. 551-581.

[6] De Lange D.F., De Bruin G.J. (1998) Sheet Cavitation Cloud Cavitation and Re-entrant Jet and Three-Dimensionality, Netherlands, pp. 92-95.

[۷] نوروزی م. (۱۳۹۵). تحلیل سه بعدی جریان همراه با کاویتاسیون حول پرتابه‌ها در زوایای حمله مختلف با استفاده از روش المان مرزی بر پایه پتانسیل. پایان نامه دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد.

[8] Hess J.L., Smith A.M.O. (1966) Calculation of potential flow about arbitrary three-dimensional bodies, Progress in Aeronautical Science, Vol. 8, pp. 1-138, Pergamon Press, New York.

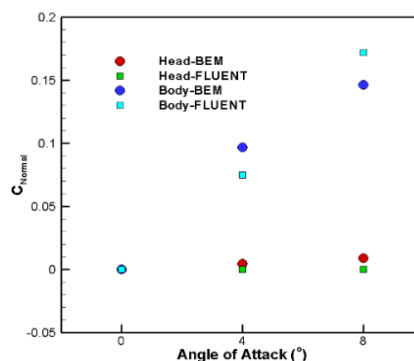
[9] Basu B.C., Hancock G.J. (1978) The unsteady motion of a two-dimensional hydrofoil in incompressible inviscid flow, J. Fluid Mech., Vol. 87, Part 1, pp. 159-178.

[10] Pellone E., Rowe A. (1981) Supercavitating hydrofoils in nonLinear theory, in Proceedings, Third International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics.

[11] Uhlman J.S. (1987) The surface singularity method applied to partially cavitating hydrofoils, J. Sh. Res., Vol. 31, No. 2, pp. 107-124.

[12] Uhlman J.S. (1989) The Surface singularity or boundary integral method applied to supercavitating hydrofoils, J. Sh. Res., Vol. 33, No. 1, pp. 16-20.

[13] Kinnas S.A., Fine N.E. (1990) Non-linear analysis of the flow around partially or supercavitating hydrofoils by a potential based panel method, In Proceedings of the IABEM-90 Symposium of the



شکل ۱۴- تغییرات ضریب آیرودینامیکی عمود بر محور پرتابه سرتخت در عدد کاویتاسیون ۰/۱۷ حاصل از روش المان مرزی و مخلوط همگن در زوایای حمله مختلف.

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با استفاده از روش المان مرزی سه‌بعدی، جریان همراه با کاویتاسیون جزئی حول پرتابه با پیشانی‌ها و زوایای حمله مختلف شبیه‌سازی و با نتایج عددی و تجربی دیگر اعتبارسنجی گردید؛ هم‌چنین برای طول و ضخامت بیشینه کاویتا ایجاد شده حول پرتابه‌های سرتخت، سرکروی و سرمخروطی، در زاویه حمله صفر درجه، یک سری روابط کلی برحسب عدد کاویتاسیون ارائه گردید که این روابط، در محدوده اعداد کاویتاسیون ۰/۰۷۵ تا ۰/۵ معتبر می‌باشند. هم‌چنین، قابلیت روش المان مرزی در شبیه‌سازی جریان همراه با کاویتاسیون جزئی حول پرتابه‌ها در زوایای حمله غیرصفر نیز ارائه و با نتایج حاصل از روش مخلوط همگن (فلوئنت) مقایسه گردید؛ مقایسه هندسه و ضرایب آیرودینامیکی حاصل از این روش با روش مخلوط همگن در زوایای حمله مختلف (تا زاویه حمله ۸ درجه) نشان می‌دهد که با وجود هزینه محاسباتی بسیار پایین نسبت به روش‌های عددی بر پایه حل معادلات ناویر-استوکس، این روش قابلیت و سرعت مناسبی در پیش‌بینی خواص جریان همراه با کاویتاسیون را داراست که البته با افزایش زاویه حمله و فاصله گرفتن از فرض پتانسیلی بودن جریان، نتایج با مقداری خطا همراه خواهد بود. سرعت همگرایی بسیار بالا، انعطاف‌پذیری مناسب الگوریتم حل و نتایج قابل قبول از ویژگی‌های روش المان مرزی ارائه شده در این پژوهش است.

- غیرخطی جزئی روش المان مرزی، نشریه فنی مهندسی مدرس، د. ۱۶، ش. ۷، ص ۲۲-۱۲.
- [27] M. Nouroozi M., Pasandidehfarid M., Djavarehshkian M. H. (2016) Simulation of partial and supercavitating flows around axisymmetric and quasi-3D bodies by boundary element method using simple and reentrant jet models at the closure zone of cavity, *Math. Probl. Eng.*, Volume 2016 | Article ID 1593849.
- [28] D. Anevlavi, K. Belibassakis. (2021) An Adjoint Optimization Prediction Method for Partially Cavitating Hydrofoils, *J. Mar. Sci. Eng.*, Vol. 9, No. 9, 976 .
- [۲۹] ملاتانی شاهرخت ع.، پسندیده فرد م.، مغربی م.ج.، (۱۴۰۰) بررسی مشخصات موج و مقاومت موجی یک جسم زیرسطحی به همراه سطح کنترل در نزدیکی سطح آزاد، نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، د. ۱۲، ش. ۲، ص ۶۵-۷۹.
- [30] Beer G., Smith I., Duenser C. (2008) *Boundary Element Method with Programming*, USA, pp. 1-10.
- [31] Vaz N.V.B. (2005) *Modeling of Sheet Cavitation on Hydrofoils and Marine Propellers using Boundary Element Methods*, Phd thesis, University of Technology, Lisbon, Portugal, pp. 10-20.
- [32] Labertaux K.R., Ceccio S.L. (2001) Partial cavity flows (Part 1), Cavities forming on models without span wise variation, *J. Fluid Mech.*, Vol. 431, pp. 1-41.
- [33] Morino L., Kuo C. (1974) Subsonic Potential Aerodynamics for Complex Configurations: A General Theory, *AIAA J.*, Vol. 12, No. 2, pp. 191-197.
- [34] Arakeri V.H. (1975) Viscous Effects on the Position of Cavitation Separation from Smooth Bodies, *J. Fluid Mech.*, Vol. 68, No. 4, pp. 779-799.
- [35] Currie I.G. (2002) *Fundamental Mechanics of Fluids*, Third Edition, University of Toronto, Canada.
- [36] Rouse H., Mc Nown J.S. (1948) Cavitation and Pressure Distribution, Head Forms at Zero angle of Yaw, *Stud. Engrg.*, State University of Iowa, Vol. 32.
- [37] Wei G., Yousheng H., Tianqun H. (2001) Transcritical Patterns of Cavitating Flow and Trends of Acoustic Level, *Transactions of the ASME*, Vol. 123, pp. 850-856.
- International Association for Boundary Element Methods, Rome, Italy.
- [14] Fine N.E. (1992) *Non-linear Analysis of Cavitating Propellers in Nonuniform Flow*, PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology - MIT.
- [15] Fine N.E. (1993) Kinnas S.A., A boundary element method for the analysis of the flow around 3-D cavitating hydrofoils, *J. Sh. Res.*, Vol. 37, No. 1.
- [16] Georges L., Chahine T.H., Chao T.H. (2001) Modeling 3D unsteady sheet cavities using a coupled UnRANS-BEM code, *DYNAFLOW, INC.*, 7210 Pindell School Road.
- [17] Lee, H.S., Kinnas, S.A. (2002) Application of BEM in Unsteady Blade Sheet and Developed Tip Vortex Cavitation Prediction on Marine Propellers, *IABEM 2002 Proceedings*, Austin Texas, USA.
- [18] Lee H.S., Kinnas S.A. (2005) A BEM for the modeling of unsteady propeller sheet cavitation inside of a cavitation tunnel, *Comput. Mech.*, Vol. 37, pp. 41-51.
- [19] Young Y.L. (2003) *Fluid and Structural Modeling of Cavitating Propeller Flows*, Cav2003 Proceedings, Japan.
- [20] Young Y.L., Shen Y.T. (2007) A Numerical Tool for the Design/Analysis of Dual-Cavitating Propellers, *J. Fluids Eng.*, Vol. 129, pp. 720-730.
- [21] Bal S. (2008) Prediction of wave pattern and wave resistance of surface piercing bodies by a boundary element method, *Int. J. numer. Methods Fluids*, Vol. 56, No. 3, pp. 305-329.
- [22] Young Y.L., Motley M.R., Yeung R.W. (2010) Three-Dimensional Numerical Modeling of the Transient Fluid-Structural Interaction Response of Tidal Turbines, *J. Offshore Mech. Arct. Eng.*, Vol. 132.
- [23] Chang S.H., Kinnas S.A. (2012) Numerical Method for the Analysis of Cavitating Waterjet Propulsion Systems, *Proceedings of the Eighth International Symposium on Cavitation (CAV 2012)*, pp. 649-655.
- [24] Rashidi I., Passandideh-Fard Mo., Passandideh-Fard Ma. (2012) The Optimum Design of a Cavitator for High-Speed Axisymmetric Bodies in Partially Cavitating Flows, *J. Fluids Eng.*, Vol. 135, No. 1:011301.
- [25] Yari E., Ghassemi H. (2013) Numerical analysis of sheet cavitation on marine propellers, considering the effect of cross flow, *Int. J. Nav. Archit. Ocean Eng.*, Vol. 5, No. 4, pp. 546-558.
- [۲۶] جعفری ج.، پسندیده فرد م.، چنگیزیان م. (۱۳۹۵) مدل سازی کاویتا سیون گسترده بر روی بال با استفاده از مدل

- [38] رشیدی ا. (۱۳۹۱) طرح بهینه شکل کاویتاتور برای پرتابه های زیرسطحی در جریان همراه با کاویتاسیون طبیعی و گازدهی شده به کمک روشهای عددی و تجربی. پایان نامه دکتری: دانشگاه فردوسی مشهد.
- [39] پسندیده فرد م. و نوروزی م.، (۱۳۹۰) استفاده از مدل جت بازگشتی در انتهای کاویتی در شبیه سازی جریان همراه با کاویتاسیون حول هندسه های متقارن محوری به روش المان مرزی، مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، د. ۴۱، ش. ۱، ص ۱۱-۲۲.
- [40] Billet M.L., Weir D.S., The effect of gas diffusion on the flow coefficient for a ventilated cavity, J. Fluids Eng., December issue, American Society of Mechanical Engineers, New York.
- [41] Pendar M., Roohi E. (2016) Investigation of cavitation around 3D hemispherical head-form body and conical cavitator using different turbulence and cavitation models, Ocean Eng., Vol. 112, pp. 287-306.