مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال۱۴۰۲/ دوره ۱۳/ شماره ۴/ صفحه ۱۵-۳۷

نشریه مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/JSFM.2023.12071.3628

بررسی اثر دیسک‌صلب متصل به لبه‌های پوسته‌استوانه‌ای در تغییر فرکانس طبیعی و توزیع مودها

مسلم نجفی[1]، سعید محمودخانی[2,*]

[1] کارشناسی ارشد، فناوری‌های نوین و مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی تهران، تهران، ایران

[2] استادیار، فناوری‌های نوین و مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی تهران، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۴/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۶/۲۸

چکیده

در این مطالعه ارتعاشات پوسته استوانه با دیسک صلب در لبه‌های انتهایی مورد بررسی قرار گرفته و میزان تغییرات نتایج در مقایسه با فرض متداول ثابت بودن لبه به‌جای درنظرگرفتن دیسک مورد بررسی قرار گرفته است. برای مدلسازی پوسته از مدل سندرز-کویتر با احتساب برش عرضی مرتبه اول استفاده شده و اثر دیسک در انتها برای اولین بار با استفاده از روابط سینماتیکی حاکم به شکل مستدل و نظام‌مندی استخراج شده است. برای حل مساله نیز از روش اجزامحدود نیمه‌تحلیلی استفاده شده و نحوه اصلاح ماتریس‌های سفتی و جرم برای افزودن اثر دیسک نیز برای اولین بار شرح داده شده است. علت اثرگذاری دیسک روی ماتریس سفتی، قیدهای حرکتی ایجاد شده بین مولفه‌های جابجایی پوسته در محل اتصال به دیسک صلب است. مطالعات عددی متعددی برای بررسی اثر خواص جرمی دیسک بر فرکانس مودهای مختلف پوسته انجام شده که نشان دهنده اثرگذاری قابل توجه دیسک در فرکانس‌های طبیعی مودهای با تعداد موج‌های محیطی صفر و یک است. طبق نتایج حاصل، افزایش جرم دیسک می‌تواند مود با فرکانس کمینه را از مود با ارتعاشات موضعی متمرکز روی پوسته به شکل ارتعاشات خمشی شبه‌تیر تبدیل کند.

کلمات کلیدی: پوسته استوانه‌ای؛ دیسک صلب؛ اجزامحدود نیمه تحلیلی؛ شکل مود ارتعاشی.

Effects of the rigid disk attached to the edges of the cylindrical shells on the natural frequencies of different modes

M. Najafi[1], S. Mahmoudkhani[2,*]

[1] MSc. , New Technologies and Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University of Tehran, Tehran, Iran

[2] Assist. Prof., New Technologies and Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University of Tehran, Tehran, Iran

Abstract

The vibration of cylindrical shells with rigid disks attached at the edges is investigated and the results are compared by those obtained under the common simplifying assumption that the edges are clamped at points attached to the rigid disk. The shell is modeled using Sanders-Koiter shell theory, including the transverse shear deformation. The effect of the rigid disk on the edges displacements is also determined in a systematic manner by using the kinematic relations of the disk. To solve the problem, the semi-analytical finite element method is used and the stiffness and mass matrices of the element attached to the disks are completely determined for the first time. The reason that the disk affects the stiffness matrix is that some constraints appear between the displacement components of the shell edges due to the attached rigid disk. Numerous numerical studies are performed to investigate the effect of mass properties of the rigid disks on different shell natural frequencies and mode shapes. Results show that the rigid disk can significantly change the natural frequencies of the modes with zero and one circumferential wave number. It is also shown that by increasing the rigid disk mass, the mode with the smallest frequency would change from a mode with a high circumferential wave-number to a beam-like bending mode.

Keywords: Cylindrical shell; rigid disk; semi-analytical finite element method; mode shapes.

* نویسنده مسئول؛ سعید محمودخانی تلفن: ۲۹۹۰۳۲۴۴ داخلی ۱۱۵؛ فکس: ۲۲۴۱۱۵۹۲

آدرس پست الکترونیک: s_mahmoudkhani@sbu.ac.ir

۱- مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای از جمله پرکاربردترین انواع سازه‌ها در دنیای اطراف ما هستند که در انواع سازه‌های مهندسی همانند بدنه هواپیماها، ماهواره‌برها، ماهواره و فضاپیماها، زیردریایی‌ها، خطوط انتقال نفت و گاز و مخازن ذخیره‌سازی انرژی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از آنجایی که در بسیاری از این کاربردها، سازه تحت اثر بارهای دینامیکی قرار می‌گیرد، توجه به رفتار ارتعاشی پوسته‌ها اهمیت بالایی در دستیابی به طراحی ایمن و مقرون به صرفه خواهد داشت. همین امر موجب گسترش قابل توجه تحقیقات در ارتباط با ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای شده است.

علی‌رغم گستردگی مطالعات انجام شده در این زمینه که شامل بررسی اثر عوامل مختلفی بر رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای است، برخی از عوامل تاثیرگذار همچنان از نظرها دور مانده و یا مورد توجه جدی قرار نگرفته‌اند. یکی از این عوامل، شرایط مرزی پوسته است که به‌طور معمول در مدل-سازی سازه، با ساده‌سازی و حذف برخی پیچیدگی مدنظر قرار می‌گیرد. از جمله این ساده‌سازی‌ها، ساده‌سازی مربوط به ثابت فرض کردن انتهای پوسته در محل اتصال به عضوهای دیگر است که در بسیاری از سازه‌های مهندسی قابل مشاهده است[۱]. از بین این نوع سازه‌ها می‌توان به ماهواره‌برها اشاره کرد که در آنها، کابین‌های ساخته شده از پوسته‌های استوانه‌ای با استفاده از اتصالاتی همانند فلنج‌ها به هم متصل شده‌اند. نمونه دیگر آن را می‌توان در دودکش‌های خورشیدی مشاهده کرد که در آن بخش‌های استوانه‌ای مختلف به همدیگر متصل می‌شوند. در همه این موارد برای کاستن از حجم محاسبات، تحلیل‌ها تنها بر روی یک پوسته استوانه‌ای انجام گرفته و دو سر پوسته در محل اتصال به اعضای دیگر، به شکل ثابت درنظرگرفته می‌شوند. واضح است که این فرض در شرایط خاص و برای مقادیر معین از جرم و سفتی قطعات متصل شده، فرض معقولی بوده و چندان از دقت نتایج نهایی نمی‌کاهد؛ اما این موضوع همواره برقرار نبوده و در مواردی نیاز به مدلسازی کل مجموعه است که البته موجب افزایش قابل توجه حجم محاسبات خواهد شد. مشکلی که امکان دستیابی به نتایج مطمئن در زمانی کوتاه را با مشکل مواجه می‌کند. در این بین، روش میانه‌ای که برای حفظ میزانی از دقت و سرعت می‌توان درنظرگرفت، تحلیل تنها یک عضو استوانه‌ای و استفاده از جرم صلب در انتهای پوسته برای اعمال کردن اثر خواص جرمی عضوهای همسایه است. طبق مطالعات مروری انجام شده که در ادامه ارائه شده، اگرچه مطالعه روی اثر جرم در لبه‌های استوانه در مقالات مختلفی مورد توجه بوده، اما تاثیر ساده-سازی ناشی از حذف جرم و ثابت فرض کردن شرایط مرزی مورد توجه ویژه‌ای قرار نگرفته است.

در رابطه با اثر شرایط مرزی بر روی رفتار ارتعاشی پوسته-های استوانه‌ای از جمله اولین مطالعات انجام شده می‌توان به مطالعه کوگا[1] [۲] اشاره کرد که در آن اثر شرایط مرزی کلاسیک مختلف از جمله مفصلی، گیردار و آزاد در ارتعاشات آزاد پوسته استوانه مورد توجه قرار گرفت. مطالعات دیگری نیز با در نظرگرفتن شرایط پیچیده‌تری همانند درنظرگرفتن اثر پوسته‌های متصل و یا اثر وجود کشسانی و سفتی متغیر آن در قیدهای مرزی انجام شده است. در رابطه با پوسته استوانه‌های متصل به هم در سال ۱۹۷۹ چانگ[2] و همکاران [۳] به بررسی تحلیلی و عددی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌های چند قسمتی پرداختند که هر کدام از قسمت‌ها دارای خواص هندسی و مکانیکی متفاوتی در مقایسه با دیگر قسمت‌ها بود. آنها نتایج تحلیل خود را برای حالت‌های دوسر مفصلی و یک سرگیردار انجام دادند. برای استخراج معادلات خود نیز از سری فوریه[3] و چند جمله‌ای لاگرانژ[4] استفاده کردند و در ادامه با استفاده از روش ریلی ریتز[5] معادلات خود را حل نمودند؛ همچنین، دای[6] و همکارانش [۴] در سال ۲۰۱۱ به بررسی اثر شرایط مرزی-های کلاسیک و تکیه‌گاه الاستیک در کنترل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای پرداختند. آنها با استفاده از تئوری دانل_مشتری-_ولاسو[7] معادلات خود را استخراج کرده و با استفاده از روش ریلی ریتز حل کردند. بر طبق مطالعات آنها با افزایش میزان الاستیک بودن تکیه‌گاه‌ها میزان ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کاهش می‌یابد، اما بعد از افزایش تا مقدار مشخصی میزان

[1] Koga
[2] chang
[3] Fourier series
[4] Lagrange polynominal
[5] Rayleigh-ritz
[6] Dai
[7] Donnell-moshtari-vlasov theory

ارتعاشات پوسته استوانه‌ای به مقدار تقریبا ثابتی می‌رسد. در سال ۲۰۱۲ ژئو[1] و همکارانش [۵] با استفاده از تئوری فلوگ[2] به بررسی اثر تکیه‌گاه الاستیک در فرکانس طبیعی پوسته استوانه پرداختند. آنها با استفاده از روش انتشار موج معادلات خود را حل کرده و با کمک نرم‌افزار انسیس[3] به بررسی دقت محاسبات خود پرداختند. طبق مطالعات آنها در سختی‌های نسبتا بزرگ، فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای به شدت افزایش پیدا می‌کند؛ ولی در سختی‌های خیلی بزرگ مقدار فرکانس طبیعی افزایش چشمگیری ندارد. آنها همچنین اثر نسبت طول به شعاع و نیز ضخامت به شعاع را با سختی تکیه-گاه‌ها در فرکانس طبیعی را مطالعه کردند. کیو[4] و همکارانش [۶] در سال ۲۰۱۳ به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته استوانه‌های یکنواخت و چندتایی در انواع شرایط مرزی‌های کلاسیک و شرایط مرزی الاستیک پرداختند. در این مطالعه اثر میرایی سازه‌ای، ضخامت پوسته‌های مختلف و انواع شرایط مرزی در فرکانس طبیعی و اجباری مورد بررسی قرار گرفت. همچنین مقایسه نتایج آنها با روش المان محدود نشان داد که که روش به‌کار رفته از دقت خوبی برخوردار است. در سال ۲۰۱۷ تانگ[5] و همکارانش [۷] به بررسی نیمه تحلیلی پوسته استوانه‌های متصل به هم پرداختند. آنها اثر تکیه‌گاه الاستیک و نیز اثر تعداد پوسته استوانه‌ای را نیز بررسی کردند. بر اساس مطالعات آنها با افزایش سختی تکیه‌گاه الاستیک در هر دو حالت مقید و آزاد، مقدار فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. در مطالعات دیگری همانند مطالعه تانگ و همکاران [۸] و لی و همکاران[۹] نیز، ارتعاشات استوانه با احتساب اثر اتصالات پیچی در لبه‌ها مورد بررسی قرارگرفت.

اثر جرم صلب در دو انتهای پوسته نیز در مطالعات مختلفی مورد توجه قرار گرفته است. از اولین کارها در این زمینه می‌توان به مطالعه بوکارینو[6] [۱۰] در سال ۱۹۶۳ اشاره کرد که در آن، ارتعاشات پوسته استوانه‌ای با استفاده از نظریه پوسته دانل-مشتری و با توجه ویژه بر روی فرکانس مودهای متقارن محوری مورد مطالعه قرار گرفت. اندکی بعد اسمیرنو[7] [۱۱]، داروسکی[8] [۱۲]، کانا[9] [۱۳]، پالاماروچوک[10] [۱۴] به بررسی ارتعاشات پوسته استوانه‌های یک سرگیردار با جرم انتهایی پرداختند. کووالاچوک[11] [۱۵] و همکارانش در سال ۱۹۸۰ به بررسی غیرخطی ارتعاشات پارامتریک پوسته استوانه‌ای متصل به یک جرم پرداختند. آنها مطالعاتی نیز بر روی تاثیر اینرسی غیرخطی جسم صلب بر ارتعاشات پوسته استوانه‌ای انجام دادند. ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد ارتوتروپیک[12] متصل به جرم انتهایی نیز توسط کازلوو[13] [۱۶] در سال ۱۹۸۸ مورد بررسی قرار گرفت. مطالعه در این زمینه در۲۰ سال اخیر نیز در مقالات پلیکانو[14]، ترتسنکو[15]، ملون[16]و همکارانشان پی گرفته شده است. بر اساس مطالعات تجربی، تئوری و عددی انجام شده در مراجع [۱۷-۱۹] که با محوریت پلیکانو انجام شده، ارتعاشات خطی و غیرخطی پوسته با درنظرگرفتن جابجایی‌های بزرگ پوسته مورد بررسی قرارگرفته است. در این مطالعات از نظریه سندرز-کویتر[17] با عبارات غیرخطی ون-کارمن[18] برای مدلسازی پوسته استفاده شد. بر اساس مطالعات تجربی آنها بعد از تحریک مود متقارن محوری اول پوسته استوانه‌ای پدیده غیرخطی بزرگی قابل مشاهده است. به‌علاوه، اثر دما در رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای با دیسک متصل به لبه بالا نیز اخیرا توسط زیپو[19] و همکاران [۲۰] انجام شده که در ادامه مطالعات تیم تحقیقاتی پلیکانو صورت گرفته است. بر اساس مطالعات انجام شده در مراجع [۲۱-۲۳] که با محوریت ترتسنکو بود با استفاده از تئوری دانل-مشتری به بررسی تئوری و عددی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای متصل به جرم انتهایی پرداخته شد. در این مقالات، معادلات با استفاده از روش ریتز حل شده است. طبق مطالعات آنها با افزوده شدن جرم انتهایی به پوسته استوانه‌ای فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. ملون و همکارانش [۲۴, ۲۵]

[1] Zhou
[2] Flugge
[3] Ansys
[4] Qu
[5] Tang
[6] Bukarinov
[7] Smirnov
[8] Darevskii
[9] Kana
[10] Palamarchuk
[11] Kovalchuk
[12] Orthotropic
[13] Kozlov
[14] Pellicano
[15] Trotsenko
[16] Mallon
[17] Sanders-koiter
[18] Von-karman
[19] Zippo

نیز به صورت عددی-تجربی پایداری دینامیکی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپ[1] و ارتوتروپیک متصل به یک جرم انتهایی را با استفاده ازنظریه پوسته دانل و با کمک روش ریلی ریتز مورد مطالعه قرار دادند. در این مطالعات اثر جرم همانند پیش‌بار محوری در پوسته درنظرگرفته شد. اثر بارمحوری با تغییرات زمانی هارمونیک نیز در مطالعات انجام شده توسط یاداو[2] و همکاران [۲۶, ۲۷] روی پوسته‌های استوانه‌ای بررسی شده است.

موضوعی که در این مطالعات مورد توجه اصلی محققان نبوده، تعیین میزان اثرگذاری خواص جرمی اعضای همسایه در خواص مودال پوسته در مقایسه با شرایطی است که انتهای پوسته ثابت در نظرگرفته شده است. با پرداختن به این مساله می‌توان محدوده خواص جرمی شامل جرم، ممان اینرسی و همچنین فاصله مرکز جرم عضو مجانب از لبه پوسته را تشخیص داد که در آن می‌توان از فرض ثابت بودن دو انتها استفاده کرد. در ضمن اثر جرم متصل به پوسته در تغییرات شکل مودهای ارتعاشی در مقالات ذکر شده مورد توجه قرار نگرفته و این در حالی است که آگاهی از نوع شکل مودها در تعیین چگونگی شکل و رفتار ارتعاشی و نقاط بحرانی سازه بسیار موثر است. این موارد در مقاله حاضر مورد توجه اصلی قرار گرفته‌اند؛ بنابراین، مهم‌ترین نوآوری این مقاله مربوط به مطالعات عددی انجام شده برای تعیین میزان تغییر نتایج فرکانسها و شکل‌مودهای ارتعاشی حاصل از احتساب جرم صلب به لبه، به جای فرض متداول ثابت درنظرگرفتن لبه‌ی اتصال استوانه به اجزای دیگر است. بحث‌های انجام شده در این ارتباط نشان خواهد داد که حذف اجزای متصل به یک پوسته و ثابت فرض کردن شرایط مرزی در نقاط اتصال تا چه میزان ممکن است منجر به تغییر نتایج شبیه‌سازی نظری شود. موضوع مهم دیگری که برای اولین بار در این مطالعه مورد توجه قرار گرفته، استخراج نظام‌مند و مستدل معادلات مربوط به اثر جرم صلب است که در مقالات موجود یا به‌طور کامل بدان پرداخته نشده و یا در برخی معادلات با اعمال برخی فرضیات ساده کننده استخراج شده است. در نهایت، سومین نوآوری این مقاله تعیین نحوه اعمال روش اجزامحدود نیمه تحلیلی به مسئله پوسته متصل به دیسک است که نیازمند درنظرگرفتن تمهیداتی ویژه‌ای است که تا به امروز در هیچ مطالعه‌ای گزارش نشده است.

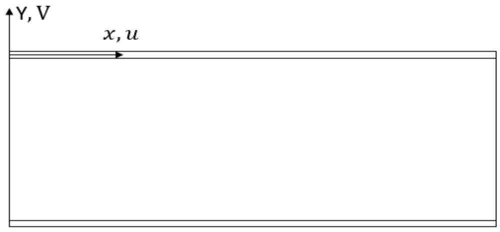
استخراج روابط در کار حاضر با استفاده از نظریه پوسته استوانه-ای سندرز-کویتر با احتساب برش عرضی صورت گرفته و برای حل معادلات از روش اجزای محدود نیمه تحلیلی استفاده شده است. برای جلوگیری از بروز پدیده قفل شدگی برشی[3] نیز از روش سازگاری میدانی[4] استفاده شده است. المان‌های مورد استفاده در این مطالعه المان‌های سه گرهی هستند، که برای تقریب جابجایی‌ها از توابع شکل لاگرانژی استفاده شده است. دیسک متصل شده در لبه انتهایی پوسته استوانه‌ای، صلب بوده و دارای شش درجه آزادی است و اثر آن در قالب انرژی جنبشی دورانی و انتقالی دیسک لحاظ شده است. علاوه بر آن، وجود دیسک صلب در انتهای پوسته موجب ایجاد قیودی بین مولفه-های جابجایی مختلف پوسته می‌شود که برای بدست آوردن این قیود، سرعت دیسک در نقاط اتصال به پوسته با استفاده از قوانین سینماتیک اجسام صلب و برحسب درجات آزادی دیسک بدست آمده و سپس با سرعت لبه پوسته برحسب مولفه‌های جابجایی پوسته برابر قرار داده شد.

۲- روابط حاکم

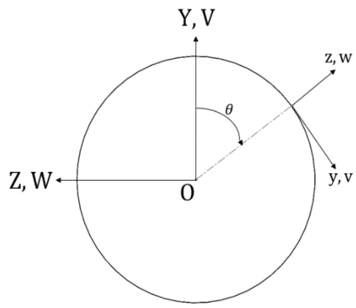
جابجایی‌های پوسته در مطالعه حاضر بر اساس دستگاه مختصات استوانه‌ای xyz درنظرگرفته شده که در ۰ نشان داده شده است؛ همچنین در این شکل، دستگاه مختصات کارتزین XYZ نشان داده شده که مرکز آن منطبق بر مرکز دیسک صلب در صفحه تماس با لبه پوسته استوانه‌ای است. طبق این شکل، x راستای طولی، y راستای محیطی و z راستای شعاعی استوانه هستند و زاویه هر نقطه روی پوسته با محور Y با θ نشان داده شده است؛ همچنین طبق تعریف مختصات استوانه‌ای، رابطه $y = R\theta$ برقرار است که R شعاع پوسته استوانه‌ای را نشان می‌دهد. علاوه بر اینها، U، V و W در ۰ به‌ترتیب مولفه‌های جابجایی در راستای X، Y و Z و u، v و w مولفه‌های جابجایی در سه راستای x، y و z را نشان می‌دهند؛ همچنین لازم به ذکر است که راستای z به سمت بیرون پوسته مقداری مثبت دارد و مرکز مختصات استوانه‌ای در لبه انتهایی صفحه میانی پوسته قرارگرفته است. در ۰ (ج) نمای سه بعدی پوسته

[1] Isotropic
[2] yadav
[3] Shear locking
[4] Field consistency

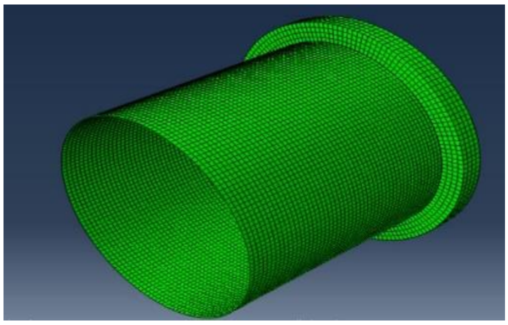
استوانه‌ای یک سردیسک صلب-یک‌سرگیردار نیز رسم شده که تصویر دقیق‌تری از مساله مورد بررسی به‌دست می‌دهد. در ادامه این بخش روابط سینماتیک و ساختاری استفاده شده برای استخراج معادلات شرح داده شده و پس از آن نیز توضیحات لازم در رابطه با روش حل اعمال شده، داده شده است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱- نمای شماتیک پوسته استوانه‌ای با دیسک صلب متصل به لبه، به‌همراه دستگاه مختصات درنظرگرفته شده (الف) نمای جانبی (ب) نمای از روبرو (ج) نمای سه بعدی

۲-۱- روابط سینماتیکی حاکم بر پوسته

با استفاده از نظریه برشی مرتبه اول می‌توان تغییرات مولفه‌های جابجایی در راستای ضخامت را مطابق با رابطه (۱) تعریف کرد [۲۸]:

$$\begin{aligned} u &= u_0(x,\theta) + u_1(x,\theta)z \\ v &= v_0(x,\theta) + v_1(x,\theta)z \\ w &= w_0(x,\theta) \end{aligned} \tag{۱}$$

که در رابطه (۱)، u_0، v_0 و w_0 نشانگر جابجایی صفحه میانی پوسته، به‌ترتیب در راستاهای x، θ و z هستند؛ همچنین u_1 و v_1 به‌ترتیب، دوران در راستای محورهای x و θ هستند. با استفاده از تئوری خطی مرتبه اول سندرز-کویتر روابط کرنش-جابجایی به صورت رابطه (۲) خواهند بود [۲۸]:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \varepsilon_x^1 z \,, \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + \varepsilon_\theta^1 z \\ &\varepsilon_{x\theta} = \varepsilon_{x\theta}^0 + \varepsilon_{x\theta}^1 z, \\ &\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}^0 \,, \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{\theta z}^0 \end{aligned} \tag{۲}$$

که در روابط فوق:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \,, \varepsilon_\theta^0 = \frac{\partial v_0}{R\partial\theta} + \frac{w_0}{R} \\ &2\varepsilon_{x\theta}^0 = \frac{\partial u_0}{R\partial\theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ &2\varepsilon_{xz}^0 = u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ &2\varepsilon_{\theta z}^0 = v_1 + \frac{\partial w_0}{R\partial x} - \frac{v_0}{R} \end{aligned} \tag{۳}$$

۲-۲- روابط ساختاری حاکم بر پوسته

معادلات ساختاری نیز بر اساس قانون هوک و با فرض تنش صفحه‌ای تعیین شده است که برای مواد ایزوتروپ به‌صورت رابطه زیر است [۱۷]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{۴}$$

که در رابطه (۴)، $\boldsymbol{\sigma}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}$ به ترتیب مولفه‌های بردار تنش و کرنش هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۸]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}, \sigma_{xz}, \sigma_{\theta z}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, 2\varepsilon_{x\theta}, 2\varepsilon_{xz}, 2\varepsilon_{\theta z}]^T \end{aligned} \tag{۵}$$

Q نیز ماتریس مربعی با بعد ۵ است که مولفه‌های غیرصفر آن طبق رابطه زیر تعیین می‌شوند [۲۹]:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E}{1-v^2} \\ Q_{12} &= Q_{21} = \frac{Ev}{1-v^2} \\ Q_{33} &= \frac{E}{2(1+v^2)} \\ Q_{44} &= Q_{55} = k_s Q_{33} \end{aligned} \qquad (۶)$$

که در رابطه (۶)، k_s ضریب برشی اصلاحی بوده و مقدار آن برابر با $\frac{۵}{۶}$ درنظرگرفته شده‌است [۳۰]؛ همچنین E و v به‌ترتیب، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون ماده هستند. در نهایت، منتجه‌های تنش نیز به صورت رابطه زیر تعریف می‌شوند [۲۹]:

$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} dz, \quad \mathbf{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} z dz \qquad (۷)$$

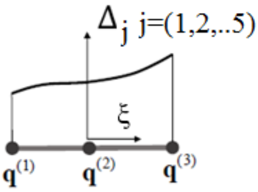
که در رابطه (۷)، h ضخامت پوسته است.

۲-۳- روش المان محدود نیمه تحلیلی

برای گسسته‌سازی و حل معادلات ابتدا مولفه‌های جابجایی پوسته با استفاده از توابع تحلیلی زیر درنظرگرفته می‌شوند [۲۸]:

$$\begin{aligned} u_0 &= \tilde{U}_n(x)\cos(n\theta) \\ v_0 &= \tilde{V}_n(x)\sin(n\theta) \\ w_0 &= \tilde{W}_n(x)\cos(n\theta) \\ u_1 &= \tilde{\Phi}_{un}(x)\cos(n\theta) \\ v_1 &= \tilde{\Phi}_{vn}(x)\sin(n\theta) \\ n &= 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \qquad (۸)$$

که n بیانگر تعداد نیم موج‌های محیطی بوده و توابع متغیر x که به توابع سینوسی و کسینوسی ضرب شده‌اند، توابع مجهولی هستند که برای بدست آوردن آنها از روش اجزاء محدود استفاده شده است. برای این کار، طول پوسته به تعداد مشخصی المان سه گرهی با اندازه مساوی، تقسیم شده که در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱- المان سه‌گرهی با مختصات بی بعد ξ

در شکل ۱، ξ مختصات بی‌بعد در راستای x بوده و در وسط هر المان قرار دارد و رابطه آن با x به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$x = \frac{Le}{2}(\xi + 1) \qquad (۹)$$

همچنین Δ_j در شکل ۱ نماینده توابع مجهول بر روی هر المان بوده و ۵ مولفه آن برابر با $\tilde{U}_n$، $\tilde{V}_n$، $\tilde{W}_n$، $\tilde{\Phi}_{un}$ و $\tilde{\Phi}_{vn}$ است. هریک از این توابع مجهول به‌شکل توابع چندجمله‌ای برحسب مقادیر جابجایی روی گره‌های هر المان درنظرگرفته می‌شوند:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{3} S_i(\xi) q_j^{(i)} \qquad (۱۰)$$

که در رابطه (۱۰) $q_j^{(i)}$ مقادیر گرهی Δ_j را در گره iام نشان داده و $S_i(\xi)$ نیز توابع شکل لاگرانژی برای المان سه‌گرهی هستند که به صورت رابطه زیر تعریف می‌شوند [۲۸]:

$$\begin{aligned} S_1(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ S_2(\xi) &= 1 - \xi^2 \\ S_3(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

لازم به ذکر است که با توجه به رابطه (۱۰)، برای هرگره، تعداد ۵ درجه آزادی وجود دارد که در صورت سه‌گرهی درنظرگرفتن هر المان، تعداد تمام درجات آزادی هر المان برابر با ۱۵ می‌شود. تمامی این درجات آزادی در بردار $\mathbf{q}^e$ قرار می‌گیرند که ۵ مولفه اول، دوم و سوم آن به‌ترتیب مربوط به عبارات جابجایی در گره اول، دوم و سوم هستند. برای کل سازه نیز در صورت

استفاده از تعداد N_e المان، بردار جابجایی‌های گرهی شامل $10N_e + 5$ مولفه خواهد بود.

با توجه به اینکه در این مطالعه از تئوری مرتبه اول برشی استفاده شده است، انتظار می‌رود، در پوسته استوانه‌ای با ضخامت‌های کم، پدیده قفل شدگی برشی اتفاق بیفتد. با استفاده از روش سازگاری میدانی از ایجاد قفل شدگی برشی جلوگیری شده است. برای جلوگیری از بروز این خطا در محاسبات، در کرنش برشی عرضی باید توابع شکل u_1 به صورت زیر درنظر گرفته شود [۲۸]:

$$S_1(\xi) = \frac{1}{6} - \frac{\xi}{2}$$
$$S_2(\xi) = 2 \tag{۱۲}$$
$$S_3(\xi) = \frac{1}{6} + \frac{\xi}{2}$$

در ادامه، برای استخراج ماتریس‌های هر المان، نیاز به تعیین عبارات مربوط به انرژی کرنشی و انرژی جنبشی خواهد بود. عبارت انرژی کرنشی برای المان شماره e نیز به شکل رابطه زیر خواهد بود:

$$U^{(e)} = \frac{L_e}{4}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}^0 R d\theta d\xi + \frac{L_e}{4}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\kappa}^0 R d\theta d\xi \tag{۱۳}$$

که $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = [\varepsilon_x^0, \varepsilon_\theta^0, \varepsilon_{x\theta}^0, \varepsilon_{xz}^0, \varepsilon_{\theta z}^0]^T$ و $\boldsymbol{\kappa}^0 = [\kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta}, 0,0]^T$ است، همچنین $\mathbf{M}$ و $\mathbf{N}$ بر طبق رابطه (۷) تعریف می‌شوند. انرژی جنبشی مربوط به هر المان نیز طبق رابطه زیر قابل تعریف است:

$$T^{(e)} = \frac{L_e}{4}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}[I_0(\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2) + 2I_1(\dot{u}_0\dot{u}_1 + \dot{v}_0\dot{v}_1) + I_2(\dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2)]R d\theta d\xi \tag{۱۴}$$

که در رابطه (۱۴)، $I_i = \int_{-h/2}^{h/2}\rho z^i dz$ است. با جایگذاری حل تقریبی درنظرگرفته شده در رابطه (۸) و (۱۰) برای عبارات جابجایی مجهول در رابطه (۱۳) و (۱۴)، می‌توان عبارات انرژی را برحسب مقادیر مجهول جابجایی‌های گرهی بدست آورد که همان مولفه‌های $\mathbf{q}^{\mathrm{e}}$ هستند. در نهایت می‌توان بخشی از معادله لاگرانژ را برای المان شماره e، به‌شکل رابطه زیر به دست آورد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial \dot{q}_i^{(e)}}\right) - \frac{\partial T^{(e)}}{\partial q_i^{(e)}} + \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \dot{q}_i^{(e)}} \tag{۱۵}$$

علت اینکه رابطه (۱۵) برابر با صفر گذاشته نشده آن است که برخی از جابجایی‌های گرهی المان‌های مجاور با المان eام، با المان شماره e مشترک هستند و در صورت اضافه شدن آنها به رابطه بالا، حاصل برابر با صفر خواهد شد. این جابجایی‌های مشترک به‌هنگام مونتاژ ماتریس‌ها لحاظ خواهند شد. از رابطه (۱۵) ماتریس‌های سفتی و جرم هر المان به‌دست خواهند آمد که به‌علت طولانی بودن روابط، ارائه آنها در اینجا امکان‌پذیر نیست.

در پایان با مونتاژ ماتریس همه المان‌ها و اعمال شرایط مرزی در ماتریس مونتاژ شده نهایی، معادلات تعادل به صورت رابطه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\widetilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{۱۶}$$

که در رابطه (۱۶)، $\mathbf{q}$ بردار جابجایی گره‌های تمامی المان‌ها است و $\widetilde{\mathbf{M}}$ ماتریس جرم سازه‌ای و $\widetilde{\mathbf{K}}$ نیز ماتریس سفتی است. باید توجه داشت که برای تعداد المان برابر با N_e، تعداد سطر و ستون ماتریس‌های سفتی و جرم به‌ازای هر مقداری از n برابر با $10N_e + 5$ خواهد بود.

۳- نحوه اضافه کردن اثر جسم صلب در معادلات

در این بخش نحوه اصلاح معادلات حاکم برای افزودن اثر دیسک صلب لبه‌های انتهایی پوسته شرح داده شده است. در این راستا در بخش اول، اثر جسم صلب در ایجاد قید حرکتی

در لبه‌ها و در نتیجه تغییر شرایط مرزی مورد توجه قرار گرفته است. در بخش دوم نیز، انرژی جنبشی دیسک صلب محاسبه شده و در بخش سوم نحوه اصلاح ماتریس‌های سفتی و جرم مونتاژ شده $\tilde{\mathbf{K}}$ و $\tilde{\mathbf{M}}$ برای اضافه‌کردن اثر دیسک صلب شرح داده شده است.

۳-۱- تعیین شرایط مرزی ایجاد شده توسط جسم صلب

برای تعیین قید ایجاد شده در جابجایی لبه پوسته، در ابتدا سرعت هر نقطه روی لبه پوسته با سرعت دیسک صلب در محل اتصال به همان نقطه برابر قرار داده می‌شود. پس از آن با جایگزینی عبارات سرعت با جابجایی متناظر، شرایط مرزی مورد نظر حاصل می‌شود. در صورتی که هر نقطه دلخواه دیسک صلب در محل تماس دیسک صلب با صفحه میانی پوسته با P مشخص شود، می‌توان سرعت نقطه P را برحسب سرعت انتقالی مرکز جرم و سرعت دورانی دیسک صلب، طبق رابطه زیر تعیین کرد:

$$\mathbf{V}_\mathrm{P} = \mathbf{V}_\mathrm{O} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{۱۷}$$

که $\mathbf{V}_\mathrm{O}$ بردار سرعت در مرکز جرم دیسک صلب و $\boldsymbol{\omega}$ بردار سرعت دورانی دیسک صلب را نشان می‌دهند و $\mathbf{r}$ بردار خطی است که مرکز جرم دیسک صلب را به نقطه P وصل می‌کند. هریک از این بردارها نسبت به دستگاه کارتزین XYZ طبق روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_\mathrm{O} = \dot{U}\mathbf{I} + \dot{V}\mathbf{J} + \dot{W}\mathbf{K} \\
&\boldsymbol{\omega} = \omega_X\mathbf{I} + \omega_Y\mathbf{J} + \omega_Z\mathbf{K} \\
&\mathbf{r} = R\mathbf{k} = R\cos(\theta)\mathbf{J} - R\sin(\theta)\,\mathbf{K}
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

که $\mathbf{I}$، $\mathbf{J}$ و $\mathbf{K}$ به‌ترتیب، بردارهای مربوط به محورهای X، Y و Z هستند و $\mathbf{k}$ بردار یکه راستای محور z دستگاه مختصات استوانه‌ای است. در ادامه در راستای تعیین مولفه‌های بردار سرعت نقطه P نسبت به دستگاه استوانه‌ای xyz ماتریس تبدیل دورانی از دستگاه کارتزین به دستگاه استوانه‌ای مطابق با رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \\ 0 & -\cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \tag{۱۹}$$

حال با ضرب ترانهاده ماتریس تبدیل $\mathbf{Q}$ در بردار سرعت $\mathbf{V}_\mathrm{P}$، سرعت نسبت به دستگاه مختصات xyz بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\acute{\mathbf{V}}_\mathrm{P} = \mathbf{Q}^\mathrm{T}\mathbf{V}_\mathrm{P} = \big(\dot{U} - R\sin\theta\,\omega_y \\
- R\cos\theta\,\omega_z\big)\mathbf{i} \\
+ \big(\dot{V}\sin\theta \\
+ \dot{W}\cos\theta + \omega_x R\big)\mathbf{j} \\
+ \big(\dot{V}\cos\theta \\
- \dot{W}\sin\theta\big)\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

سرعت نقطه P برحسب مولفه‌های جابجایی پوسته نیز برابر خواهد بود با: $\dot{u}_0\mathbf{i} + \dot{v}_0\mathbf{j} + \dot{w}_0\mathbf{k}$ که با برابر قراردادن مولفه‌های آن با مولفه‌های سرعت بدست آمده در رابطه (۲۰)، رابطه زیر بین مولفه‌های سرعت پوسته و دیسک صلب به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\dot{u}_0 = \dot{U} - R\sin\theta\,\omega_y - R\cos\theta\,\omega_z \\
&\dot{v}_0 = \dot{V}\sin\theta + \dot{W}\cos\theta + \omega_x R \\
&\dot{w}_0 = \dot{V}\cos\theta - \dot{W}\sin\theta
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

حال برای تعیین رابطه بین عبارات جابجایی دورانی u_1 و v_1 با مولفه‌های جابجایی دیسک صلب، شرط عدم لغزش در نقطه‌ای با فاصله z از صفحه میانی پوسته اعمال می‌شود. در صورتی که این نقطه با S نام‌گذاری شود، بردار خط شعاعی مربوط به نقطه S برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_\mathrm{S} = (R+z)\mathbf{k} = (R \\
+ z)[\cos(\theta)\mathbf{J} \\
- \sin(\theta)\,\mathbf{K}]
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

که با استفاده از رابطه بالا، سرعت نقطه S برحسب مولفه‌های سرعت دیسک صلب به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\acute{\mathbf{V}}_{\mathrm{S}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\mathbf{V}_{\mathrm{O}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{S}}) \tag{۲۳}$$

بردار سرعت نقطه S برحسب مولفه‌های جابجایی پوسته نیز برابر خواهد بود با $(\dot{u}_0 + z\dot{u}_1)\mathbf{i} + (\dot{v}_0 + z\dot{v}_1)\mathbf{j} + \dot{w}_0\mathbf{k}$ که با مساوی قراردادن مولفه‌های متناظر آن با مولفه‌های سرعت $\acute{\mathbf{V}}_{\mathrm{S}}$ و استفاده از رابطه (۲۳)، رابطه زیر برای $\dot{u}_1$ و $\dot{v}_1$ در محل اتصال به دیسک صلب حاصل خواهد شد:

$$\dot{u}_1 = -\sin(\theta)\,\omega_y - \cos(\theta)\,\omega_z$$
$$\dot{v}_1 = -\omega_x \tag{۲۴}$$

در ادامه لازم است تا مولفه‌های بردار سرعت دورانی دیسک صلب، $\boldsymbol{\omega}$، برحسب مولفه‌های جابجایی دیسک صلب تعیین شود. برای این منظور می‌توان از زوایای دوران اویلر استفاده کرد که در صورت حذف عباراتی که منجر به غیرخطی شدن روابط می‌شوند، منجر به رابطه ساده زیر خواهد شد:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{I} + \dot{\psi}\mathbf{J} + \dot{\varphi}\mathbf{K} \tag{۲۵}$$

در نهایت با جایگذاری رابطه (۲۵) در دو رابطه (۲۱) و (۲۴) و حذف مشتق زمانی (بالانویس نقطه) از همه مولفه‌های جابجایی، رابطه مورد نظر برای شرایط مرزی در لبه‌های متصل به دیسک صلب به‌دست می‌آید. شکل نهایی این روابط پس از مساوی قرار دادن ضرایب $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\sin n\theta$، $\cos n\theta$ و همچنین عبارات ثابت، به‌شکل زیر برحسب $\widetilde{U}_n$، $\widetilde{V}_n$، $\widetilde{W}_n$، $\widetilde{\phi}_{un}$ و $\widetilde{\phi}_{vn}$ به‌دست می‌آید:

$$\widetilde{U}_0 = U, \widetilde{V}_0 = -R\theta,\ \widetilde{W}_0 = 0,$$
$$\widetilde{\phi}_{u0} = 0, \widetilde{\phi}_{v0} = -\theta, \tag{۲۶}$$
$$\psi = \varphi = 0, V = W = 0$$

$$\widetilde{U}_1 = -\varphi R, \widetilde{V}_1 = -V, \widetilde{W}_1 = V, \quad \widetilde{\phi}_{u1} = -\varphi,\ \widetilde{\phi}_{v1} = 0 \tag{۲۷}$$
$$\psi = \theta = 0, W = U = 0,$$

$$\widetilde{U}_n = 0, \widetilde{V}_n = 0, \qquad \widetilde{W}_n = 0, \widetilde{\phi}_{un} = 0, \widetilde{\phi}_{vn} = 0\ (n > 1), \tag{۲۸}$$
$$\theta = \psi = \varphi = 0, U = V = W = 0$$

که در سه رابطه بالا، رابطه (۲۶) در شرایط مرزی مربوط به مود $n = 0$ اثر گذاشته و رابطه (۲۷) در شرایط مرزی مود $n = 1$ اثر می‌گذارد. رابطه (۲۸) نیز شرط مرزی مربوط به مودهای با $n > 1$ است که همان‌طور که واضح است، در این مودها وجود دیسک صلب موجب ایجاد شرایط گیردار کامل برای استوانه می‌شود؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که درنظرگرفتن اثر دیسک صلب تنها برای مودهای با $n = 0$ و $n = 1$ ظاهر شده و برای مودهای با تعداد موج محیطی بیشتر، شرایط گیردار کامل برقرار خواهد بود؛ همچنین طبق رابطه (۲۶) مشخص است که برای مودهای با $n = 0$، دو نوع حرکت طولی و پیچشی حول محور دیسک صلب برای دیسک اتفاق افتاده و هیچ حرکتی در راستای شعاع در لبه پوسته دیده نخواهد شد. در مقابل، رابطه (۲۷) نشان می‌دهد که در مودهای با $n = 1$، حرکت دیسک صلب به‌شکل دوران حول محور Z بوده و جابجایی در راستای محور Y است. این حرکت در دیسک صلب نیز در واقع همراه با خمش کل استوانه در صفحه XY خواهد بود که به معنای رفتار شبیه به تیر در استوانه است.

۳-۲- انرژی جنبشی جسم صلب

برای محاسبه انرژی جنبشی جسم صلب ابتدا باید سرعت جسم صلب در مرکز جرم جسم صلب تعیین شود که برای این منظور می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{G}} = \mathbf{V}_{\mathrm{O}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{G}} \tag{۲۹}$$

که با فرض آن‌که مرکز جرم جسم صلب در راستای محور استوانه باشد، $\mathbf{r}_{\mathrm{G}} = h_g\mathbf{I}$. با جایگذاری رابطه (۱۸) در رابطه (۲۹) سرعت در نقطه مرکز جرم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{G}} = \dot{U}\mathbf{I} + \left(\dot{V} + \omega_Z h_g\right)\mathbf{J} + (\dot{W} - \omega_Y h_g)\mathbf{K} \tag{۳۰}$$

در نهایت انرژی جنبشی با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید [۱۹]:

$$T_d = \frac{1}{2}m_d\dot{U}^2 + \frac{1}{2}m_d(\dot{V} + h_g\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m_d(\dot{W} - h_g\dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}J_X\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_Y\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_Z\dot{\varphi}^2 \quad (۳۱)$$

که در رابطه (۳۱)، J_X، J_Y و J_Z به ترتیب ممان‌های اینرسی جرمی دیسک صلب حول محورهای مختصات کارتزین است. حال با استفاده از رابطه (۲۶) و (۳۱) برای حالت $n = 0$ انرژی جنبشی به صورت زیر خواهد بود:

$$T_d = \frac{1}{2}m_d\dot{U}^2 + \frac{1}{2}J_X{\omega_X}^2 \quad (۳۲)$$

با استفاده از رابطه (۲۷) و (۳۱) برای حالت $n = 1$ انرژی جنبشی به صورت زیر خواهد بود:

$$T_d = \frac{1}{2}m_d(\dot{V} + h_g\omega_Z)^2 + \frac{1}{2}J_Z{\omega_Z}^2 \quad (۳۳)$$

و انرژی جنبشی دیسک در حالت $n > 1$ نیز برابر با صفر خواهد بود که علت آن ایجاد شرایط گیردار شدن پوسته در مودهای با $n > 1$ است.

۳-۳- نحوه افزودن اثر دیسک صلب به ماتریس‌های سفتی و جرم مونتاژ شده

پس از تعیین شرایط مرزی حاصل از اتصال دیسک صلب، نیاز به اعمال آن به ماتریس‌های سفتی و جرم مونتاژ شده $\widetilde{\mathbf{K}}$ و $\widetilde{\mathbf{M}}$ است. باید توجه داشت که اگر دیسک صلب در انتهای سمت راست متصل شده باشد، ۵ سطر و ستون آخر ماتریس باید اصلاح شوند و در مقابل، در صورت اتصال دیسک صلب به انتهای سمت چپ، ۵ سطر و ستون اول باید اصلاح شوند. واضح است که در صورت اتصال دیسک صلب به هر دو انتها، ۵ ستون و سطر اول و آخر ماتریس‌های مونتاژ شده باید اصلاح شوند. برای انجام این کار برای مودهای با $n = 0$، درجات آزادی پوسته در ناحیه اتصال به دیسک صلب، با استفاده از رابطه (۲۶)، برحسب درجات آزادی غیرصفر دیسک صلب در این مودها که شامل دو درجه آزادی U و θ است، نوشته می‌شود؛ در نتیجه این‌کار و در شرایطی که دیسک صلب به انتهای سمت راست متصل باشد، بعد ماتریس‌های اصلاح شده از $10N_e + 5$ به $10N_e + 2$ کاهش می‌یابند. در این حالت ماتریس سفتی اصلاح شده $\widetilde{\mathbf{K}}_{S0}$ به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{S0}[g_1; g_1] = \widetilde{\mathbf{K}}[g_1; g_1],$$
$$\widetilde{\mathbf{K}}_{S0}[g_1; g_2] = \left[-R\widetilde{\mathbf{K}}[g_1; 10N_e + 2] - \widetilde{\mathbf{K}}[g_1; 10N_e + 5] \quad \widetilde{\mathbf{K}}[g_1, 10N_e + 1]\right],$$
$$\widetilde{\mathbf{K}}_{S0}[g_2; g_1] = \begin{bmatrix} -R\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e + 2; g_1] - \widetilde{\mathbf{K}}[10N_e + 5; g_1] \\ \widetilde{\mathbf{K}}[10N_e + 1; g_1] \end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{K}}_{S0}[g_2; g_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (۳۴)$$

که:

$$g_1 = 1, \ldots, 10N_e,$$
$$g_2 = 10N_e + 1, \ldots, 10N_e + 2$$
$$\mathbf{Y} = -R\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e + 1; 10N_e + 2] - R\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e + 2, 10N_e + 1] - \widetilde{\mathbf{K}}[10N_e + 1, 10N_e + 5] - \widetilde{\mathbf{K}}[10N_e + 5, 10N_e + 1], \quad (۳۵)$$

ماتریس جرم اصلاح شده $\widetilde{\mathbf{M}}_{S0}$ را نیز می‌توان با جایگزینی نماد $\mathbf{K}$ در رابطه (۳۴) با نماد $\mathbf{M}$ بدست آورد. لازم به توجه است که بردار جابجایی کلیه گره‌ها نیز که با $\mathbf{q}$ نشان داده شده طبق رابطه زیر تغییر می‌کند:

$$\mathbf{q}_{S0}[g_1] = \mathbf{q}[g_1],$$
$$\mathbf{q}_{S0}[g_2] = [\theta, U]^T \quad (۳۶)$$

ماتریس سفتی اصلاح شده برای مودهای مربوط به $n = 1$ نیز با استفاده از رابطه (۲۷)، طبق رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{S1}[g_1; g_1] = \widetilde{\mathbf{K}}[g_1; g_1],$$
$$\widetilde{\mathbf{K}}_{S1}[g_1; g_2] = \left[-R\widetilde{\mathbf{K}}[g_1; 10N_e + 1] - \widetilde{\mathbf{K}}[g_1; 10N_e + 4] \quad - \widetilde{\mathbf{K}}[g_1; 10N_e + 2] + \widetilde{\mathbf{K}}[g_1; 10N_e + 3]\ \right], \quad (۳۷)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{S1}[g_2;g_1]=\begin{bmatrix}-R\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e+1;g_1]-\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e+4;g_1]\\ -\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e+2;g_1]+\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e+3;g_1]\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{S1}[g_2;g_2]=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{Y} & \mathbf{0}\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}=R\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e+1;10N_e+2] &+R\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e+2;10N_e+1] -R\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e+1,10N_e+3] -R\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e+3,10N_e+1] \\ &+\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e+2,10N_e+4] +\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e+4,10N_e+2] -\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e+3,10N_e+4] -\widetilde{\mathbf{K}}[10N_e+4,10N_e+3],\end{aligned}$$

بردار جابجایی همه گره‌ها نیز به‌شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{q}_{S1}[g_1]=\mathbf{q}[g_1],\qquad \mathbf{q}_{S1}[g_2]=[\varphi,V]^T \tag{۳۸}$$

در ادامه، ماتریس جرم مربوط به دیسک صلب نیز با جایگذاری رابطه (۳۲)، (۲۶) و (۲۷) در رابطه لاگرانژ برای مودهای مربوط به $n=0$ و $n=1$ به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\mathbf{M}_{D0}=\begin{bmatrix}J_X & 0\\ 0 & m_d\end{bmatrix} \tag{۳۹}$$

$$\mathbf{M}_{D1}=\begin{bmatrix}m_d{h_g}^2+J_Z & m_dh_g\\ m_dh_g & m_d\end{bmatrix} \tag{۴۰}$$

که ماتریس جرم $\mathbf{M}_{D0}$ ضریب بردار $[\ddot{\theta},\ddot{U}]^T$ و ماتریس جرم $\mathbf{M}_{D1}$ ضریب بردار $[\ddot{\varphi},\ddot{V}]^T$ هستند. در نهایت، دو ماتریس $\mathbf{M}_{D0}$ و $\mathbf{M}_{D1}$ به‌ترتیب با ماتریس $\widetilde{\boldsymbol{M}}_{S0}[g_2;g_2]$ و ماتریس $\widetilde{\boldsymbol{M}}_{S1}[g_2;g_2]$ جمع می‌شوند.

۴- نتایج عددی

در این بخش اثر عوامل مختلف موثر مانند تغییرات جرم جسم صلب انتهایی، تغییرات فاصله مرکز جرم جسم صلب از لبه، تغییرات ممان جرم حول محور طولی و تغییرات ممان جرم حول محور z مورد بررسی قرارگرفته است؛ همچنین از بین تمام شرایط مرزی مختلفی که می‌توان برای پوسته استوانه‌ای درنظرگرفت، در نهایت نتایج برای دو حالت یک سر دیسک صلب-یک سر درگیر (مورد الف) و حالت دیسک صلب در دو سر پوسته استوانه‌ای (مورد ب) ارائه خواهد شد. واضح است که در مورد ب، پوسته استوانه‌ای در شرایط مرزی دو سر آزاد قرار داشته و لذا دو مود اول مربوط به مودهای صلب حرکت انتقالی و دورانی در صفحه بوده و فرکانس‌های متناظر با آنها برابر با صفر خواهد بود. بر این اساس، مقادیر کمترین فرکانس گزارش شده در ادامه این بخش مربوط به فرکانس‌های غیرصفر خواهد بود.

۴-۱- صحت‌سنجی نتایج

برای اطمینان از درستی روابط و کد تهیه شده، در قدم اول مقایسه‌ای بین مقادیر فرکانس حاصل از مطالعه حاضر با نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس برای پوسته استوانه‌ای با یک سر دیسک صلب-یک سرگیردار انجام شده است. خواص فیزیکی و مکانیکی پوسته استوانه‌ای مورد نظر در ۰ داده شده است. برای مدلسازی دیسک در آباکوس، از یک دیسک با شعاع ۰/۱۲ متر استفاده شده است؛ همچنین برای صلب درنظرگرفتن دیسک، مدول الاستیسیته آن برابر با ۵۰۰ گیگاپاسکال درنظرگرفته شده است. المان استفاده شده برای پوسته و دیسک نیز به‌ترتیب المان SR4 و C3D8R بوده است؛ همچنین خواص جرمی دیسک صلب داده شده در ۰ با فرض چگالی ۱۵۹۲ کیلوگرم بر متر مکعب برای دیسک صلب بدست آمده است.

جدول ۱- خواص هندسی و مکانیکی پوسته استوانه‌ای و دیسک صلب استفاده شده برای صحت‌سنجی

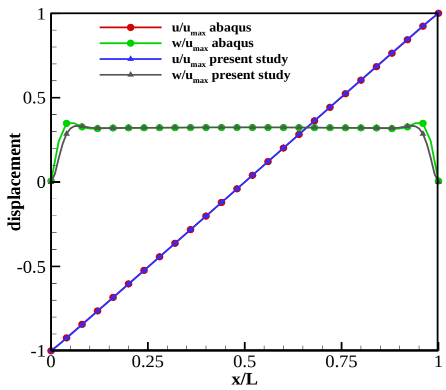
پوسته	L (m)	۰/۲	دیسک صلب	h_g(m)	۰/۰۱
	R (m)	۰/۱		m_d (kg)	۱/۴
	h (mm)	۰/۳		E(GPa)	۵۰۰
	ρ (kg/ m^3)	۲۶۶۳		J_z	۵/۰۹
	v	۰/۳۱		J_x	۰/۰۱
	E (GPa)	۷۱			

نتیجه حاصل از مقایسه نتایج با آباکوس در ۰ ارائه شده که همان‌طورکه مشخص است، انطباق بسیار خوبی بین نتایج برقرار است.

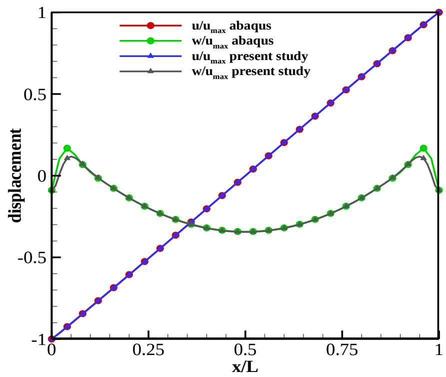
جدول ۲- مقایسه نتایج مطالعه حاضر با نتایج نرم‌افزار آباکوس برای حالت یک سر دیسک صلب-یک سر درگیر

خطا٪	آباکوس (هرتز)	مطالعه حاضر(هرتز)	n
۰/۴	۷۸۷/۸	۷۹۱/۱	۰
۰/۰	۳۷۲/۸	۳۷۲/۸	۱
۰/۴	۱۲۰۹/۷	۱۲۱۴/۷	۵
۰/۴	۹۶۲/۵	۹۶۵/۹	۶
۰/۳	۸۱۹/۹	۸۲۲/۱	۷
۰/۱	۷۶۵	۷۶۶	۸
۰/۰	۷۸۴	۷۸۳/۷	۹
۰/۳	۸۶۱/۶	۸۵۹/۴	۱۰
۰/۴	۹۸۱/۷	۹۷۷/۳	۱۱

علاوه بر مقایسه فرکانسهای طبیعی با آباکوس، شکل مودهای بدست آمده در کار حاضر برای مود دوم $n = 0$ و مود دوم $n = 1$ در شرایط دو سر جرم صلب نیز در ۰ با نتایج آباکوس مقایسه شده است که نشانگر نزدیکی قابل قبول نتایج است.



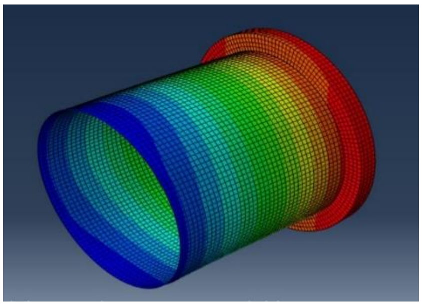
(الف)



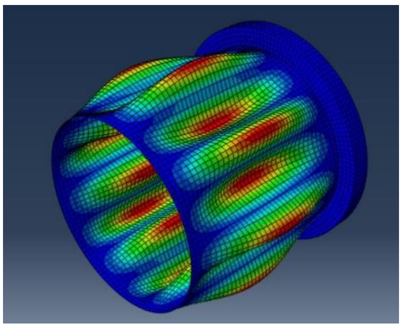
(ب)

شکل ۳- مقایسه شکل مود در نرم افزار آباکوس و مطالعه حاضر در شرایط دو سر جسم صلب برای حالت (الف) مود دوم $(m = 2)$ در حالت $n = 0$، (ب) مود دوم $(m = 2)$ در حالت $n = 1$

همچنین در ۰ نمای سه بعدی مربوط به مود اول $n = 1$ و $n = 8$ بدست آمده از آباکوس رسم شده است که نشان از عملکرد درست نرم‌افزار برای تشخیص شکل مودها دارد.



(الف)

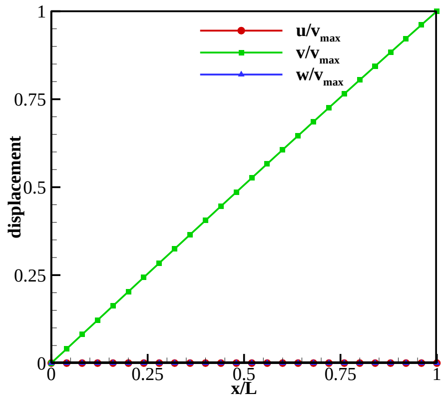


(ب)

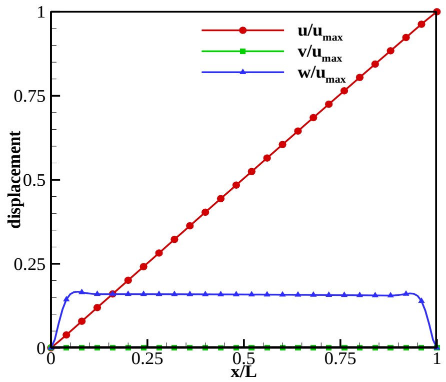
شکل ۴ - شکل مود مربوط به (الف) مود اول $n = 1$ (ب) $n = 8$

۴-۲- بررسی شکل مودهای پوسته با دیسک صلب

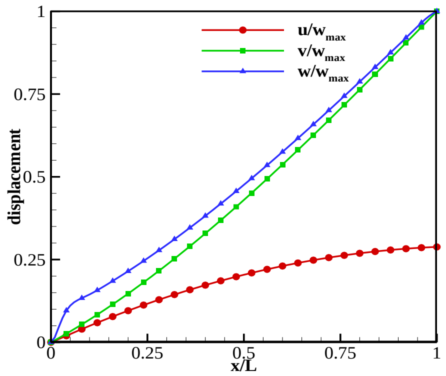
برای رسم شکل مود، نیاز به استفاده از بردار ویژه هر مود خواهد بود. شکل مودی که با استفاده از این روش برای مودهای مختلف پوسته حالت یک سر دیسک صلب-یک سر گیردار بدست آمده در ۰ برای مودهای اول و دوم مربوط به $n = 0$ و $n = 1$ رسم شده است. طبق این شکل، مود اول و دوم با $n = 0$ به‌ترتیب از نوع حرکت پیچشی و حرکت محوری استوانه هستند. مود اول با $n = 1$ نیز به نظر می‌رسد مربوط به مود شبیه به تیر است که در آن کل استوانه همانند یک تیر دچار خمش و پیچش می‌شود. مود دوم مربوط به $n = 1$ نیز بیشتر شبیه به نوع حرکت محوری است، هرچند میزانی از خمش و پیچش هم در پوسته اتفاق می‌افتد. در مقابل، در مودهای مربوط به $n > 1$ که در اینجا ارائه نشده، مود اول مربوط به حالتی است که در آن علاوه بر ایجاد شکل گلبرگی در محیط پوسته استوانه‌ای، نقطه گرهی در حرکت استوانه هنگام مشاهده آن از پهلو دیده نشده و لذا تنها یک نیم موج در راستای طولی قابل مشاهده است. در مقابل، مود دوم مربوط به حالتی است که دو نیم موج در راستای طولی در حرکت پوسته دیده می‌شود.



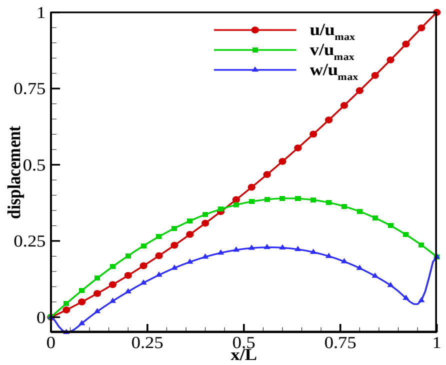
(الف)



(ب)



(ج)

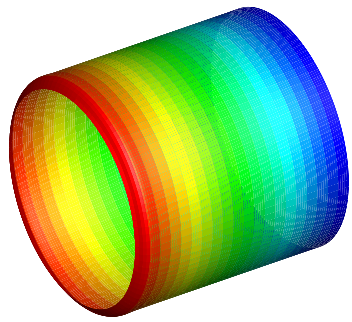


(د)

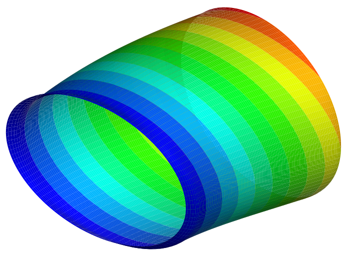
شکل ۵- دو شکل مود اول در شرایط یک سر جسم صلب-یک سر گیردار برای حالت (الف) مود اول $(m = 1)$ در حالت $n = 0$، (ب) مود دوم $(m = 2)$ در حالت $n = 0$، (ج) مود اول $(m = 1)$ در حالت $n = 1$ و (د) مود دوم $(m = 2)$ در حالت $n = 1$

a

همچنین شکل مود سه بعدی برای مود اول $n = 0$ و $n = 1$ برای حالت یک سر دیسک صلب- یک سر گیردار در ۰ ترسیم شده است که رنگ‌های روی شکل مودها نشانگر جابجایی راستای محوری پوسته استوانه‌ای هستند.



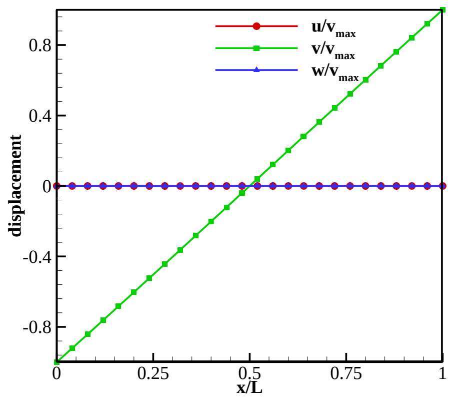
(الف)



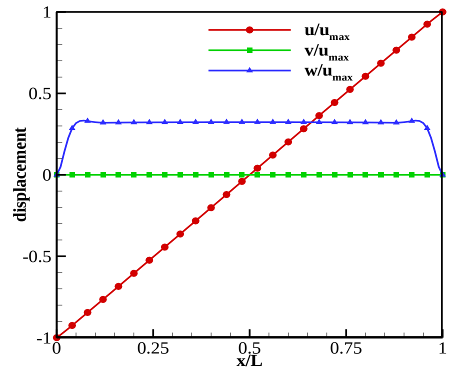
(ب)

شکل ۶- شکل مود سه بعدی در شرایط یک سر جسم صلب-یک سر گیردار برای حالت (الف) مود اول ($m = 1$) در حالت $n = 0$، (ب) مود اول ($m = 1$) در حالت $n = 1$

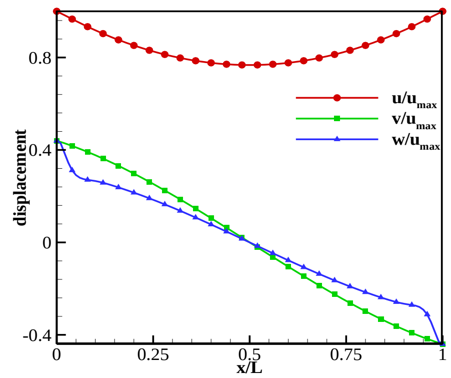
در حالت وجود دیسک صلب در دو انتهای پوسته استوانه‌ای همانطور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، مود اول $n = 0$ مربوط به حرکت پیچشی است. مود دوم $n = 0$ نیز مربوط به حرکت محوری است. به نظر می‌رسد، مود اول $n = 1$ حرکت الاستیک پیچشی همراه با حرکت صلب انتقالی شده است. مود دوم $n = 1$ نیز به نظر می‌رسد، حرکت الاستیک محوری همراه با حرکت صلب پیچشی شده است.



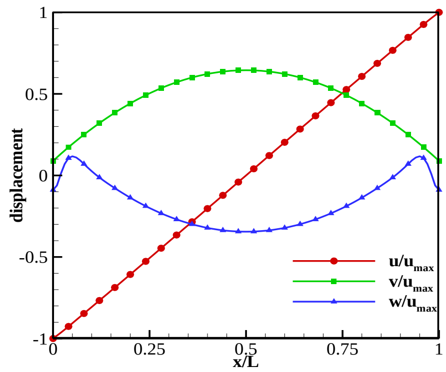
(الف)



(ب)



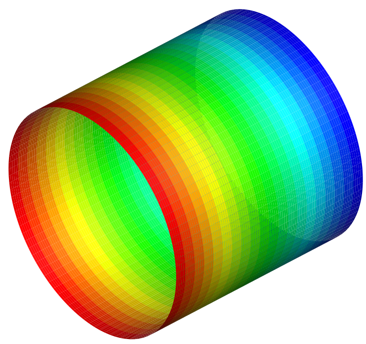
(ج)



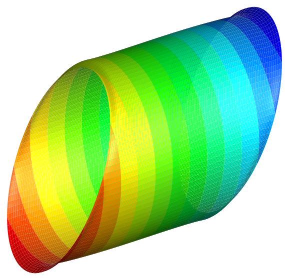
(د)

شکل ۷- دو شکل مود اول در شرایط دو سر جرم صلب برای حالت (الف) مود اول $(m = 1)$ در حالت $n = 0$، (ب) مود دوم $(m = 2)$ در حالت $n = 0$، (ج) مود اول $(m = 1)$در حالت $n = 1$ و (د) مود دوم $(m = 2)$ در حالت $n = 1$

همچنین شکل مود سه بعدی برای مود اول $n = 0$ و $n = 1$ برای حالت دو سر دیسک صلب در ۰ ترسیم شده است، که رنگ‌های روی شکل مودها نشانگر جابجایی راستای محوری پوسته استوانه‌ای هستند.



(الف)



(ب)

شکل ۸-شکل مود سه بعدی در شرایط دو سر جسم صلب برای حالت (الف) مود اول $(m = 1)$ در حالت $n = 0$، (ب) مود اول $(m = 1)$ در حالت $n = 1$

۴-۳- اثر خواص جرمی دیسک صلب بر تغییرات فرکانس طبیعی مودهای مختلف

در این بخش اثر خواص جرمی دیسک صلب بر تغییرات فرکانس طبیعی با تعداد موج محیطی در دو حالت الف و ب به‌ازای سه مقدار مختلف از نسبت جرم دیسک صلب به جرم پوسته استوانه‌ای (که با μ_m نشان داده شده است) به‌دست آمده و با نتایج حاصل از جایگزینی دیسک صلب با شرایط مرزی گیردار مقایسه شده است.

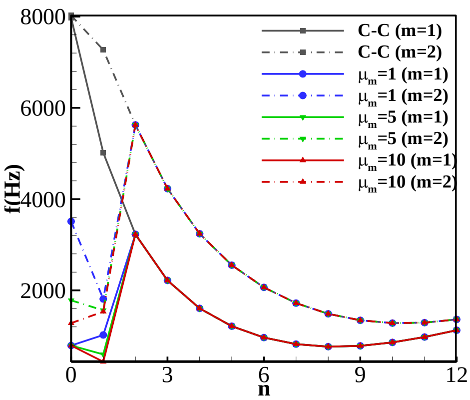
نتایج در ابتدا در ۰ (الف) برای حالت الف آورده شده است. در این شکل، تمامی مقادیر مربوط به خواص مادی و هندسی همانند ۰ بوده، تنها با این تفاوت که میزان جرم دیسک صلب انتهایی متغیر است. m نیز بیانگر تعداد نیم موج طولی در دید جانبی در هر شکل مود است که $m = 1$ یعنی در راستای طولی در دید جانبی یک نیم موج وجود دارد و $m = 2$ بیانگر وجود دو نیم موج در راستای طولی در دید جانبی است. همان-طور که دیده می‌شود، زمانی که دو لبه انتهایی به صورت گیردار فرض می‌شوند، فرکانس طبیعی کمینه در $n = 8$ دیده می‌شود. این روند با اضافه شدن جرم صلب به جای تکیه‌گاه، برای مودهای $n > 1$ هیچ تغییری نکرده و به‌طور کامل منطبق بر شرایط گیردار کامل است؛ اما برای مودهای اول در $n = 0$ و $n = 1$ کاهش قابل توجهی در فرکانس‌های مربوطه مشاهده می‌شود، به‌طوری که با افزایش نسبت جرم دیسک صلب به جرم پوسته از مقداری مشخص، در مود اول مربوط به $n = 1$

، کمترین فرکانس از مود با $n = 8$ به مود با $n = 1$ تغییر می‌یابد. ظاهر شدن این نقطه کمینه می‌تواند موجب ایجاد تغییرات قابل توجه در رفتار سازه تحت اثر بارهای دینامیکی محیطی شود. چرا که طبق نتایج ارائه شده در ۰ و شکل ۷، مود تحریک شده، شکل متفاوتی داشته و لذا شکل تغییر شکل‌های ایجاد شده در سازه از حالت متمرکز بر پوسته با ایجاد ۸ نیم‌موج، به خمش سراسری کلی شبه تیر تغییر می‌یابد؛ بنابراین، واضح است که فرض گیردار بودن انتهای پوسته استوانه‌ای می‌تواند موجب ایجاد خطای قابل توجه در پیش‌بینی رفتار سازه تحت اثر بارهای دینامیکی می‌شود.

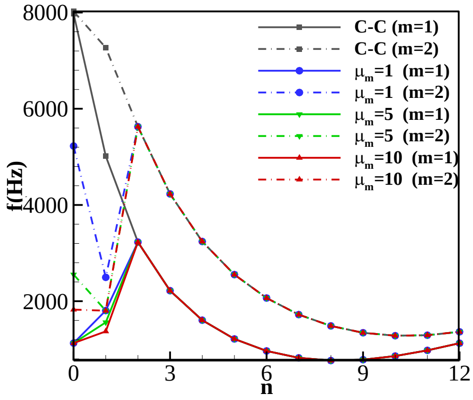
تغییرات فرکانس با n در حالت اتصال دیسک به هر دولبه پوسته در ۰ (ب) نمایش داده شده است که روند تغییراتی مشابه با آنچه در ۰ (الف) دیده شد دارد. با این تفاوت که در این حالت، فرکانس مودهای با $n = 0$ و $n = 1$ برای هیچ یک از مقادیر درنظرگرفته شده برای μ_m، کمتر از فرکانس مربوط به مود با $n = 8$ نمی‌شود. به‌علاوه در این حالت مود اول مربوط به $n = 0$ که در واقع مربوط به مود محوری استوانه است، به ازای تمام مقادیر μ_m مقداری کمتر از فرکانس مربوط به مود با $n = 1$ دارد که این بر خلاف نتایجی است که برای شرایط مرزی حالت الف (یک‌سر گیردار- یک‌سر دیسک) در ۰ (الف) دیده شد.

مقایسه نتایج در شکل ۹-الف و ب نشان دهنده مقادیر پایین‌تر فرکانس طبیعی مودهای اول $(m = 1)$ برای $n = 0$ و $n = 1$ در حالت یک‌سردیسک-یک‌سرگیردار نسبت به حالت دوسر دیسک است. همین اتفاق در مودهای دوم $(m = 2)$ با $n = 1$ نیز رخ می‌دهد. اما در مود دوم با $n = 0$، و همچنین مودهای با $n > 1$، فرکانس‌های بدست آمده در هردوحالت یک‌سر دیسک و دوسردیسک یکسان هستند. علت پایین‌تر بودن فرکانس استوانه یک‌سر دیسک در موارد ذکر شده بالا، مربوط به شکل‌مودهای متناظر است که در شکل ۵ و شکل ۷ نشان داده شده‌اند. در تمام این مودها، بخش‌عمده‌ای از حرکت مربوط به حرکت پیچشی استوانه بوده که در حالت یک-سردیسک دارای گره در انتهای سمت چپ استوانه و در حالت دوسردیسک دارای گره در نقطه میانی استوانه است. این بدان معنی است که پیچش در حالت اول، نسبت به انتها و در حالت دوم نسبت به وسط اتفاق افتاده و لذا سفتی پیچشی در مود مربوط به حالت یک‌سر دیسک کمتر از حالت دوسر دیسک بوده و در نتیجه فرکانس متناظر با آن نیز کمتر است. توضیحات بیشتر در این ارتباط در توضیحات ذیل شکل ۱۰ نیز ارایه شده است.

در مورد مود دوم مربوط به $n = 1$ نیز، این مود با حرکت غالب محوری بوده و همانند مود قبلی مورد بحث، در این مود نیز نقطه گرهی از لبه سمت چپ در شرایط یک‌سردیسک به نقطه میانی در حالت دوسردیسک منتقل می‌شود؛ اما برای مود محوری، طول استوانه با ارتعاش محوری اثری در سفتی و در نتیجه فرکانس نداشته و لذا فرکانس در دوحالت یک‌سردیسک و دو سردیسک یکسان است. برای مودهای مربوط به $n > 1$ نیز، دیسک صلب تنها به‌عنوان یک مقیدکننده صلب عمل کرده و موجب گیردار شدن لبه‌ها می‌شود؛ لذا در هردو حالت یک‌سر دیسک و دوسر دیسک، فرکانس‌های مربوط به مودهای با $n > 1$ یکسان و مربوط به پوسته دوسرگیردار خواهند بود.



(الف)



(ب)

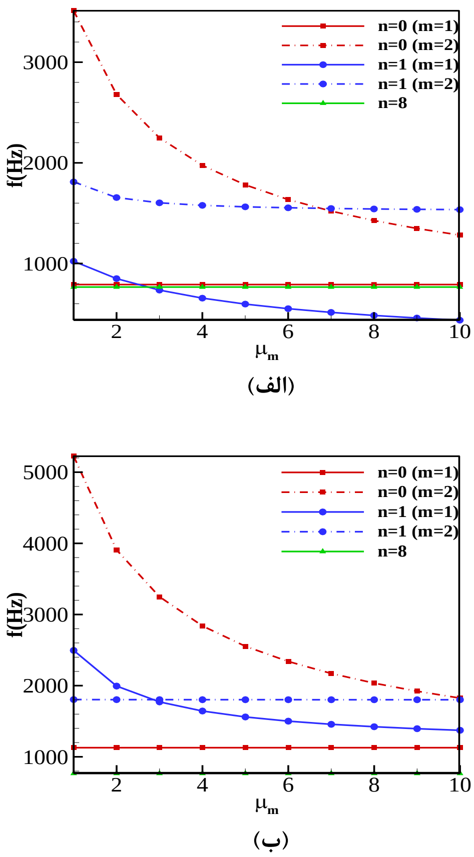
شکل ۹- تغییرات فرکانس طبیعی دو مود اول با تعداد موج محیطی یکسان به تغییرات n به ازای ۳ مقدار مختلف جرم در (الف) حالت یک سر دیسک صلب-یک سر گیردار (ب) حالت دوسر دیسک صلب

۴-۴- بررسی تغییرات فرکانس طبیعی با جرم دیسک صلب

همان‌طور که در بخش قبلی دیده شد با اضافه کردن دیسک صلب به یک یا هر دو لبه پوسته استوانه‌ای، دیگر فرکانس طبیعی کمینه الزاما در $n > 1$ رخ نداده و فرکانس طبیعی مربوط به مودهای $n = 0$ و $n = 1$ ممکن است مقادیر کمتری داشته باشند. بر این اساس، به منظور تعیین محدوده دقیق مقادیر خواص جرمی دیسک صلب که منجر به کمینه شدن فرکانس طبیعی مودهای مربوط به $n = 0$ و $n = 1$ می‌شوند، تغییرات فرکانس طبیعی مودهای مختلف با خواص جرمی دیسک صلب برای تعداد موج محیطی صفر و یک، به‌همراه فرکانس طبیعی مربوط به مود $n = 8$ مورد مطالعه قرارگرفته است. تغییرات فرکانس طبیعی با نسبت جرم دیسک صلب به جرم پوسته استوانه‌ای که با μ_m نشان داده شده، در ۰ ارائه شده است. در این قسمت، مقدار عددی تمامی خواص پوسته همانند ۰ است. طبق این شکل، در حالت الف با افزایش نسبت جرم دیسک صلب به جرم پوسته استوانه‌ای، فرکانس طبیعی مود اول در حالت $n = 1$ و فرکانس طبیعی مود دوم به ازای هر دو مقدار n کاهش می‌یابد، اما فرکانس طبیعی مود اول به ازای $n = 0$ تغییری نمی‌کند. علت عدم تغییر فرکانس مود اول مربوط به $n = 0$ با تغییرات جرم دیسک آن است که ممان‌های اینرسی دیسک صلب مستقل از جرم و ثابت درنظرگرفته شده‌اند و چون فرکانس مود اول مربوط به $n = 0$ مود پیچشی بوده و لذا وابسته به ممان اینرسی J_x است، با تغییر جرم و ثابت ماندن J_x تغییری نمی‌کند. برای مود دوم مربوط به $n = 0$ و مود اول مربوط به $n = 1$ با افزایش جرم، فاصله فرکانس‌های مربوطه با هم کمتر شده و به فرکانس طبیعی مود $n = 8$ نزدیک می‌شوند؛ همچنین در مقدار تقریبی $\mu_m = 2.7$، مقدار فرکانس طبیعی اول مربوط به مود $n = 1$ از فرکانس مود $n = 8$ کمتر شده و در نتیجه، مود بحرانی از مود $n = 8$ به مود $n = 1$ تغییر می‌یابد؛ بنابراین، به‌ازای مقادیر $\mu_m > 2.7$ شکل مود اول از حالت ارتعاشات متمرکز بر روی پوسته به خمش سراسری پوسته که مشابه خمش در تیر است تغییر می‌یابد.

تغییرات فرکانس طبیعی با دو جرم صلب متصل به لبه‌های پوسته استوانه‌ای حالت ب در ۰ (ب) ارائه شده است. طبق این شکل با افزایش نسبت جرم دیسک صلب به جرم پوسته استوانه‌ای، فرکانس طبیعی مود دوم به ازای $n = 0$ و نیز فرکانس طبیعی هر دو مود به ازای $n = 1$ کاهش می‌یابد. البته میزان تغییرات مود دوم در حالت $n = 1$ چشمگیر نیست و در مقایسه با تغییرات دیگر مودها کمتر است اما فرکانس طبیعی مود اول در $n = 0$ تغییری نمی‌کند. با تمام اینها، در محدوده در نظرگرفته شده برای μ_m که بیشترین مقدار آن برابر با ۱۰ است، فرکانس مربوط به مود $n = 8$ همچنان کمتر از مودهای دیگر است. علاوه براین، مقایسه نتایج بین حالت یک‌سر دیسک و دوسر دیسک نشان می‌دهد که فرکانس طبیعی در مود اول مربوط به $n = 0$ برای استوانه یک‌سر دیسک مقدار کمتری است. این نتیجه را می‌توان با توجه به شکل‌مودهای متناظر با این مودها توضیح داد که در شکل ۵-الف و شکل ۷-الف نمایش داده شده‌اند. طبق این شکل‌ها، این مود مربوط به مود پیچشی استوانه است که در حالت یک سر گیردار-یک‌سر دیسک، نقطه گره آن در لبه انتهای سمت چپ استوانه است. بنابراین طول استوانه تحت پیچش در این حالت برابر با طول طول خود استوانه است. در مقابل، در حالت دو سر دیسک، مود پیچشی دارای گره در وسط استوانه بوده و لذا طول استوانه تحت پیچش نصف طول استوانه است. براین مبنا با توجه به بلندتر

بودن طول عضو پیچشی در حالت یک‌سر دیسک صلب، سفتی پیچشی کمتر بوده و در نتیجه فرکانس نیز در مقایسه با حالت دوسر دیسک کمتر خواهد بود.



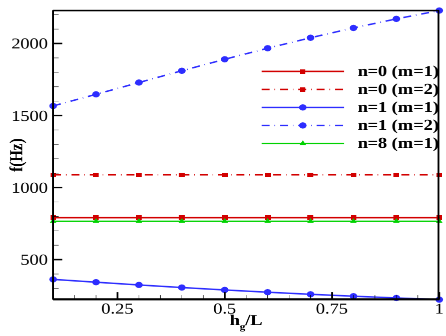
شکل ۱۰- تغییرات فرکانس طبیعی دو مود اول $n = 0$ و $n = 1$ با جرم دیسک صلب برای حالت (الف) یک سر دیسک صلب-یک سر گیردار (ب) دو سر دیسک صلب

۴-۵- بررسی تغییرات فرکانس طبیعی با فاصله مرکز جرم دیسک صلب از لبه

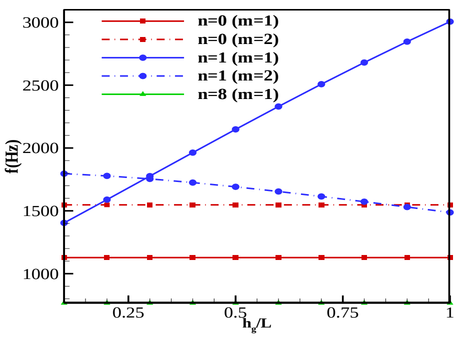
در این قسمت به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای با جرم صلب انتهایی در اثر تغییرات فاصله مرکز جرم دیسک صلب از لبه اتصال پوسته استوانه‌ای پرداخته شده است. مشخصات پوسته استوانه‌ای همانند ۰ است. طبق ۰ (الف) و (ب)، افزایش فاصله مرکز جرم دیسک صلب از لبه انتهایی، تغییری در مود اول و دوم مربوط به $n = 0$ در هر دو حالت پوسته استوانه‌ای یک سر دیسک صلب-یک سر گیردار و دو سر دیسک صلب ایجاد نمی‌کند، چرا که این دو مود طبق توضیحات ارائه شده در ۰ ، مودهای پیچشی و محوری بوده که تنها وابسته به جرم و ممان اینرسی حول محور پوسته هستند و لذا فاصله مرکز جرم دیسک صلب از لبه پوسته نمی‌تواند اثری در آنها داشته باشد. برای مودهای مربوط به $n = 1$، در حالت الف، همان‌طور که از ۰ (الف) مشخص است، مود اول دچار کاهش شده، اما مود دوم افزایش یافته است. برای توجیه این نتیجه باید توجه داشت که انتظار می رود که افزایش h_g از دو مسیر متفاوت و مخالف هم بر روی فرکانسهای طبیعی اثر بگذارد. در مسیر اول، افزایش h_g موجب افزایش ممان اینرسی دورانی حول محل اتصال دیسک به پوسته شده و از این طریق موجب کاهش فرکانس در مودهایی می‌شود که در آنها دوران در انتهای پوسته حول محور Z اتفاق می‌افتد. البته لازم به ذکر است، فرض ثابت بودن ممان‌های اینرسی تنها برای مرکز جرم صحیح است و افزایش h_g باعث افزایش ممان اینرسی در محل اتصال دیسک صلب به پوسته استوانه‌ای می‌شود. در مسیر دوم، دیسک همانند قید دورانی عمل کرده و با افزایش h_g اثر قید دورانی-خمشی بیشتر شده و در نتیجه شرایط به شرایط گیردار شدن دورانی لبه نزدیک می‌شود. در مقابل، افزایش قید نیز موجب افزایش فرکانس طبیعی در مودهایی می‌شود که در آنها حرکت دورانی خمشی در لبه استوانه ناچیز است. بر این اساس با توجه به ۰ (الف)، علت کاهش فرکانس طبیعی مود اول $n = 1$ در حالت یک سر دیسک صلب-یک سر گیردار را می‌توان در غالب بودن مسیر اول تاثیرگذاری دیسک صلب دانست، چراکه مود مربوطه طبق ۰ (ج)، شبیه به مود اول تیر یکسر گیردار بوده و حرکت خمشی در انتهای پوسته استوانه‌ای قابل توجه است. در مقابل، علت افزایش فرکانس طبیعی مود دوم $n = 1$ نیز غالب بودن مسیر دوم تاثیرگذاری دیسک صلب است؛ چرا که طبق ۰ (د) حرکت غالب در این شکل مود، مود محوری همراه با اندکی خمش است و این به این معنا است که با افزایش h_g دورانی بیشتری در انتها اعمال شده است که سبب افزایش فرکانس طبیعی می‌شود.

بر طبق ۰ (ب) نیز مشاهده می‌شود که در حالت وجود دیسک صلب در هر دو لبه پوسته استوانه‌ای، با افزایش فاصله مرکز جرم دیسک‌های صلب از لبه‌های اتصال، فرکانس طبیعی مود اول در حالت $n = 1$ افزایش می‌یابد. دلیل بروز این تغییر

در غالب بودن مسیر دوم تاثیرگذاری دیسک صلب است؛ زیرا طبق شکل ۷ (ج) در شکل مود متناظر با این فرکانس، حرکت غالب محوری بوده و افزایش h_g سبب افزایش فرکانس طبیعی می‌شود؛ اما در مود دوم $n = 1$ با توجه به شکل ۷ (د)، مود ارتعاشی با حرکت غالب محوری است که اندازه h_g نمی‌تواند اثر چندانی بر روی فرکانس‌های آن داشته باشد. همین موضوع موجب شده که شیب تغییرات این نمودار در مقایسه با شیب افزایش فرکانس طبیعی مود اول $n = 1$، بسیار کمتر باشد؛ اما این شیب برابر با صفر نبوده و مقداری منفی دارد. علت این مشاهده را می‌توان با توجه به شکل ۷ (د) در وجود جابجایی عرضی همراه با دوران خمشی در لبه‌ها در این مود دانست.



(الف)

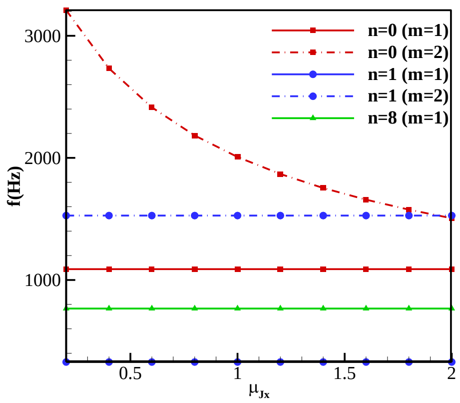


(ب)

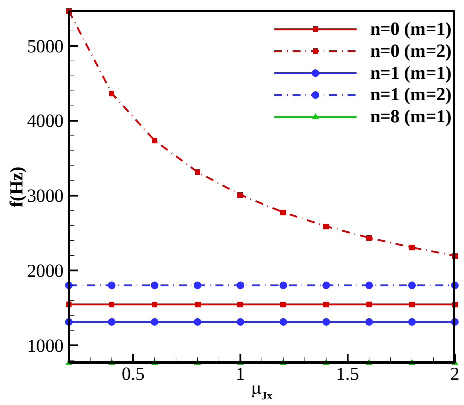
شکل ۱۱- تغییرات فرکانس طبیعی دو مود اول $n = 0$ و $n = 1$ با فاصله از مرکز جرم برای حالت (الف) یک سر دیسک صلب-یک سر گیردار (ب) دو سر دیسک صلب

۴-۶- بررسی تغییرات فرکانس طبیعی با ممان جرمی حول محور طولی

در ۰ (الف) تغییرات فرکانس طبیعی با نسبت ممان جرمی دیسک صلب حول محور طولی به ممان جرمی پوسته استوانه‌ای حول محور طولی (μ_{Jx}) برای حالت الف رسم شده است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش μ_{Jx} مقدار فرکانس طبیعی هر دو مود مربوط به $n = 1$ و مود اول مربوط به $n = 0$ تغییری نمی‌کنند؛ اما مود دوم $n = 0$ با افزایش μ_{Jx} کاهش می‌یابد. همانطور که در ۰ (ب) دیده می‌شود، این کاهش به دلیل محوری بودن مود آن است. این کاهش به‌گونه‌ای است که در فاصله μ_{Jx} بین صفر تا ۲، مقدار فرکانس این مود به نصف مقدار اولیه خود نزدیک می‌شود؛ همچنین طبق ۰ (الف) میزان فرکانس طبیعی مود اول $n = 1$ از میزان فرکانس طبیعی $n = 8$ کمتر است که نشان می‌دهد، در این بازه برای μ_{Jx} فرض گیردار بودن لبه‌های پوسته استوانه‌ای فرض نادرستی است؛ همچنین همانطور که در ۰ (ب) دیده می‌شود با افزایش μ_{Jx} در حالت پوسته استوانه‌ای با دو جرم صلب انتهایی فرکانس طبیعی دو مود $n = 1$ و نیز مود اول $n = 0$ تغییری نمی‌کنند، اما مود دوم $n = 0$ با افزایش μ_{Jx} کاهش می‌یابد.



(الف)

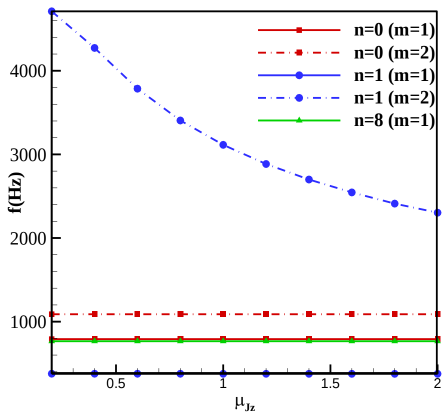


(ب)

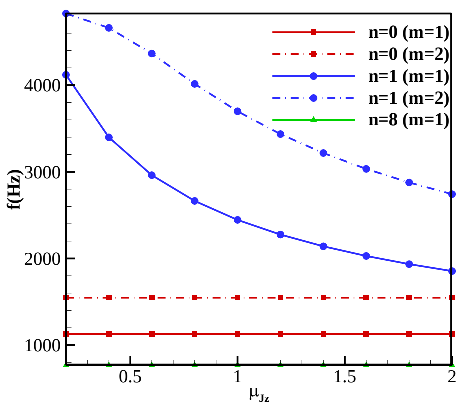
شکل ۱۲- تغییرات فرکانس طبیعی دو مود اول $n = 0$ و $n = 1$ با ممان اینرسی جرمی حول محور طولی برای حالت (الف) یک سر دیسک صلب-یک سر گیردار (ب) دو سر دیسک صلب

۴-۷-بررسی تغییرات فرکانس طبیعی با ممان اینرسی حول محور z

در ۰ تغییرات فرکانس طبیعی با نسبت ممان جرمی دیسک صلب حول محور z به ممان جرمی پوسته استوانه‌ای حول محور z ، μ_{Jz} دیده می‌شود. همانطور که در ۰ (الف) دیده می‌شود، در حالت پوسته استوانه‌ای با یک سر دیسک صلب-یک سرگیردار افزایش μ_{Jz} تاثیری در فرکانس طبیعی مود اول و دوم $n = 0$ ندارد. این در حالی است که افزایش μ_{Jz} سبب کاهش فرکانس طبیعی مود اول و دوم $n = 1$ شده است. این کاهش میزان فرکانس طبیعی در مود اول $n = 1$ در مقایسه با مود دوم آن چشمگیر نیست. با توجه به ۰ (ج) و (د) به نظر می‌رسد، این کاهش فرکانس طبیعی به دلیل وجود حرکت خمشی در شکل مودهای آنها است. طبق ۰ (الف) در تمامی محدوده μ_{Jz} میزان فرکانس طبیعی مود اول $n = 1$ از مقدار فرکانس طبیعی $n = 8$ کمتر است و این خود نشان می‌دهد، فرض گیردار بودن انتهای پوسته استوانه‌ای در این محدوده μ_{Jz} فرض نادرستی است؛ همچنین در حالت پوسته استوانه‌ای با دو سر دیسک صلب همانطور که در ۰ (ب) دیده می‌شود، افزایش μ_{Jz} تاثیری در فرکانس طبیعی مودهای اول و دوم $n = 0$ ندارد. اما افزایش μ_{Jz} سبب کاهش فرکانس طبیعی مودهای اول و دوم $n = 1$ شده است. همانطور که در شکل ۷ (ج) و (د) دیده می‌شود، این کاهش به دلیل وجود حرکت خمشی در مود مربوط به آنها است که همراه با دوران دیسک حول محور z است.



(الف)



(ب)

شکل ۱۳- تغییرات فرکانس طبیعی دو مود اول $n = 0$ و $n = 1$ با ممان اینرسی جرمی حول محور z برای حالت (الف) یک سر دیسک صلب-یک سر گیردار (ب) دو سر دیسک صلب

۵- نتیجه‌گیری

در این مطالعه به بررسی اثر افزوده شدن جرم صلب در دو حالت یک سر دیسک صلب-یک سرگیردار و دو سر دیسک صلب در فرکانس طبیعی پرداخته شده و میزان تفاوت ایجاد

شده در فرکانسها در مقایسه با اعمال فرض متداول گیرداربودن انتها بجای احتساب اثردیسک مورد توجه قرارگرفته است.

در استخراج معادلات حاکم بر مساله، روابط مرتبط با اثر دیسک در انتهای پوسته به‌شکل نظام‌مند و با توجه به‌اصول سینماتیکی برای اولین بار تعیین شده است. این روابط نشان-دهنده اثرگذاری دوگانه دیسک بر روی پوسته هستند. از طرفی به دلیل صلبیت دیسک (ها)، بین مولفه‌های جابجایی پوسته در لبه (ها)ی اتصال به دیسک قیود حرکتی ایجاد می‌شود که این قیود در قالب شرایط مرزی جدید خود را نشان می‌دهند. از خواص جرمی دیسک که افزوده شدن عبارات اضافی به انرژی جنبشی کل می‌شود. برای مدلسازی پوسته در این مطالعه نیز، از مدل پوسته استوانه‌ای سندرز-کویتر استفاده و برای حل مساله روش اجزامحدود نیمه تحلیلی به‌کارگرفته شده است. در حل ارائه شده، نحوه اصلاح ماتریس‌های سفتی و جرم برای اضافه کردن اثر دیسک در انتها نیز به تفصیل و برای اولین بار شرح داده شده است؛ همچنین با استفاده از بردار ویژه شکل مودهای مربوط به مود اول و دوم برای $n = 0$ و $n = 1$ در دو حالت یک سر دیسک صلب-یک سر گیردار و نیز دو سر دیسک صلب رسم شده تا با استفاده از آنها اثر عوامل مختلف بررسی شوند.

در ادامه، نتایج عددی متعددی برای تعیین اثر عوامل مختلف شامل جرم دیسک صلب، فاصله مرکز جرم دیسک صلب از لبه پوسته استوانه‌ای، ممان جرمی پوسته استوانه‌ای حول محور طولی و ممان جرمی پوسته استوانه‌ای حول محور z در فرکانس طبیعی مودهای مختلف ارائه شده است. این نتایج نشان می‌دهد که با اضافه شدن جرم صلب در لبه انتهایی پوسته استوانه‌ای، فرکانس طبیعی مودهای مربوط به $n = 0$ و $n = 1$ دچار کاهش قابل توجه شده و با افزایش مقدار جرم دیسک، در حالت یک‌سرگیردار-یک سر دیسک، مود با کمترین مقدار فرکانس از مود با ارتعاشات متمرکز بر پوسته با $n = 8$ به مود شبه‌تیر که در آن خمش سراسری در پوسته اتفاق می-افتد انتقال می‌یابد. واضح است که علت پایین‌تر آمدن فرکانس مود خمشی با افزایش جرم دیسک، سهم بالای جابجایی دیسک در این مود است. البته در پوسته استوانه‌ای با دیسک متصل به هر دو انتها، در محدوده جرم درنظرگرفته شده برای دیسک‌ها، فرکانس کمینه همچنان مربوط به مود با $n = 8$ باقی می‌ماند، هرچند که فاصله فرکانس این مود با مود شبه‌تیر پوسته با افزایش جرم دیسک، کاهش می‌یابد. در حالت پوسته استوانه‌ای با یک سر دیسک صلب-یک سر گیردار، با افزایش فاصله مرکز جرم دیسک صلب از لبه انتهایی پوسته استوانه‌ای فرکانس مود اول $n = 1$ کاهش یافته و مود دوم افزایشی است. اما فرکانس مود اول و دوم مربوط به $n = 0$ تغییری نمی‌کنند. علت این امر را نیز می‌توان در شکل مودهای مربوطه جستجو کرد. در واقع با بررسی شکل مودهای رسم شده در مقاله می-توان مشاهده کرد که مودهای اول و دوم مربوط به $n = 0$، مودهای پیچشی و محوری استوانه هستند که در آنها دوران دیسک حول محورهای داخل صفحه مقطع (محور Y و Z) اتفاق نمی‌افتد؛ لذا فاصله مرکز جرم دیسک صلب از لبه پوسته نمی‌تواند اثری در فرکانس آنها داشته باشد.

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی	
E	مدول الاستیسیته
J_x	ممان اینرسی جرمی دیسک صلب حول محور طولی
J_z	ممان اینرسی جرمی دیسک صلب حول محور z
h	ضخامت پوسته استوانه‌ای
h_g	فاصله مرکز جرم دیسک صلب تا لبه انتهایی پوسته استوانه‌ای
$\widetilde{K}$	ماتریس سفتی سازه‌ای
L	طول پوسته استوانه‌ای
L_e	طول هر المان
m_d	جرم دیسک صلب
N, M	منتجه‌های تنش
$\widetilde{M}$	ماتریس جرم سازه‌ای
N_e	تعداد المان‌ها
n	تعداد گلبرگ مانندهای محیطی
q	بردار جابجایی هر المان
R	شعاع پوسته استوانه‌ای
S_i	توابع شکل
T^e	انرژی جنبشی هر المان
T_d	انرژی جنبسی جسم صلب
U^e	انرژی پتانسیل کرنشی هر المان
V_0	سرعت مرکز جرم دیسک صلب
علائم یونانی	
ν	ضریب پواسون
ρ	چگالی
σ	بردار تنش

ε	بردار کرنش
ω	بردار سرعت دورانی دیسک صلب

مراجع

[1] heidari , V., Ahmadi , M, Orak , M, Salehi , M. (2021) Modal Analysis of Complex Structures via a Sub-Structuring Approach. ADMT J. 14(1): p. 59-71.

[2] Koga, T.(1988) Effects of boundary conditions on the free vibrations of circular cylindrical shells. AIAA J. 26(11): p. 1387-1394.

[3] Chang, S.-D. and R. Greif (1979) Vibrations of segmented cylindrical shells by a fourier series component mode method. JSV. 67(3): p. 315-328.

[4] Dai , L., Yang T, Sun , Y , Liu , J (2011) Influence of boundary conditions on the active control of vibration and sound radiation for a circular cylindrical shell. Trans Tech Publ.

[5] Zhou, H., Li , W , Lv , B, Li , W (2012) Free vibrations of cylindrical shells with elastic-support boundary conditions. Appl. Acoust. 73(8): p. 751-756.

[6] Qu , Y., Chen , Y , Long , X , Meng, G (2013) Free and forced vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells using a domain decomposition method. Appl. Acoust. 74(3): p. 425-439.

[7] Tang , D., Yao , X , Wu , G , Peng , Y. (2017) Free and forced vibration analysis of multi-stepped circular cylindrical shells with arbitrary boundary conditions by the method of reverberation-ray matrix. TWS. 116: p. 154-168.

[8] Tang Q , L.C., She H , Wen B.(2018) Modeling and dynamic analysis of bolted joined cylindrical shell. Nonlinear Dyn. 93: p. 1953-1975.

[9] Li C, Q.R., Miao X (2021) Investigation on the vibration and interface state of a thin-walled cylindrical shell with bolted joints considering its bilinear stiffness. Appl. Acoust. 172: p. 107580.

[10] Bukarinov, G.N. (1974) Oscillations of two bodies joined by a circular cylindrical shell. Studies on Elasticity and Plasticity (Issledovaniya po Uprugosti i Plastichnosti), Leningrad, Leningrad University. 2: p. 74–80 (In Russian)

[11] Smirnov, M.M. (1964) Oscillation of a System of masses connected to a cylindrical shell. Investigations of Elasticity and Plasticity. (Issle-dovaniia po Uprugosti i Plastichnosti), Izdatel'- stvo Leningradskogo Universiteta, p. 114-123. (In Russian)

[12] Darevskii, V.M., and Sharinov, I.L. (1966) Free oscillations of a cylindrical shell with concentrated mass, Transactions of 6th All-Union Conference on the Theory of Shells and Plates, Baku, Azerbaidzhan. p. 350–354. (In Russian)

[13] Kana, D.D. and W.C. Hu. (1968) Transmission characteristics of conical and cylindrical shells under lateral excitation. J. Acoust. Soc. Am. 44(6): p. 1647-1657.

[14] Palamarchuk, V. (1978) Dynamical instability of a system consisting of a ribbed cylindrical shell and an absolutely rigid body. Sov. Appl. Mech. 14(5): p. 479-484.

[15] Ganiev, R. and P. Kovalchuk (1980) Dynamics of solid and elastic bodies/Resonance phenomena during nonlinear oscillations. Moscow, Izdatel'stvo Mashinostroenie. (In Russian)

[16] Kozlov S.V. (1980) On parametric instability domain of orthotropic cylindrical shells with attached masses. Dop ANUSSR; A:45–8. (In Russian)

[17] Pellicano, F. (2011) Dynamic instability of a circular cylindrical shell carrying a top mass under base excitation: Experiments and theory. Int J Solids Struct. 48(3-4): p. 408-427.

[18] Pellicano, F. and K. Avramov (2007) Linear and nonlinear dynamics of a circular cylindrical shell connected to a rigid disk. Commun Nonlinear Sci Numer Simul. 12(4): p. 496-518.

[19] Pellicano, F. (2007) Vibrations of circular cylindrical shells: theory and experiments. JSV,. 303(1-2): p. 154-170.

[20] Yadav A, A., M , Panda, S , Dey , T , Kumar , R. (2020) Nonlinear vibrations of circular cylindrical shells with thermal effects: an experimental study. Nonlinear Dyn. 99: p. 373-391.

[21] Trotsenko, Y.V. (2006) Frequencies and modes of vibration of a cylindrical shell with attached rigid body. JSV. 292(3-5): p. 535-551.

[22] Trotsenko, V. and Y.V. Trotsenko (2004) Methods for calculation of free vibrations of a cylindrical shell with attached rigid body. Nonlinear Oscillations, 2004. 7(2): p. 262-284.

[23] Trotsenko, Y.V. (2001) On equilibrium equations of cylindrical shell with attached rigid body. Нелінійні коливання.

[24] Mallon, N., R. Fey, and H. Nijmeijer (2010) Dynamic stability of a base-excited thin orthotropic cylindrical shell with top mass: simulations and experiments. JSV. 329(15): p. 3149-3170.

[25] Mallon, N., R. Fey, and H. Nijmeijer (2008) Dynamic stability of a thin cylindrical shell with top mass subjected to harmonic base-acceleration. Int J Solids Struct. 45(6): p. 1587-1613.

[26] Yadav A, A.M., Panda S, Dey T , Kumar R. (2022) A semi-analytical approach for instability analysis of composite cylindrical shells subjected to

[29] Mohammadi, F. (2012) Nonlinear vibration analysis and optimal damping design of sandwich cylindrical shells with viscoelastic and ER-fluid treatments. 2012, Concordia University.

[30] Wang, C., J.N. Reddy, and K. Lee (2000) Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions: Elsevier.

harmonic axial loading. Compos. Struct. 296: p. 115882.

[27] Yadav A, A.M., Panda S, Dey T. (2023) Instability analysis of fluid-filled angle-ply laminated circular cylindrical shells subjected to harmonic axial loading. Eur J Mech A Solids. 97: p. 104810.

[28] Mahmoudkhani, S. (2019) Aerothermoelastic analysis of imperfect FG cylindrical shells in supersonic flow. Compos. Struct. 225: p. 111160.