



## تحلیل غیرخطی ارتعاشات روتور نامتقارن با کوپلینگ ناهمراستا با استفاده از مدل تیر تیموشنکو

حامد جمشیدی<sup>۱</sup>، علی اصغر جعفری<sup>۲\*</sup> و نادر محمدی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران غرب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

<sup>۲</sup>استاد، عضو هیات علمی گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران غرب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران و

عضو هیات علمی دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی، تهران، ایران

<sup>۳</sup>دانشیار، عضو هیات علمی گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۱۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۱/۲۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۱۴

### چکیده

در این تحقیق، یک مدل تحلیلی مناسب، جهت بررسی رفتار ارتعاشات غیرخطی روتورهای متقارن و نامتقارن تحت نیروهای ناهم‌محوری و نامیزانی جرمی در دستگاه مختصات دوار ارائه شده است. روتور موردنظر با اتصال ناهم‌محور به یک موتور متصل گردیده است. برای تحلیل ارتعاشی دقیق تر، از تئوری تیر تیموشنکو و جهت مدل‌سازی نیروی ناهم‌محوری، از معادلات گیبنز استفاده شده است. با بکارگیری روش ریلی-ریتز، متغیرهای مکانی و زمانی روابط انرژی از یکدیگر جدا شده و سپس با بهره‌گیری از اصل همیلتون، معادلات حرکت بدست آمده‌اند. با بررسی‌های دقیقی که در این تحقیق انجام گرفته، نشان داده شد که روتورهای نامتقارن برخلاف روتورهای متقارن، در یک محدوده فرکانسی، ناپایدار می‌شوند. همچنین مقایسه رفتار دینامیکی دو روتور متقارن و نامتقارن در یک فرکانس کاری انجام گرفته تا اثر پارامترهای مختلف بطور مشخص، دیده شود. جهت بررسی بهتر، ابتدا پاسخ ارتعاشی آنها در حوزه زمان رسم گردید و سپس با گرفتن تبدیل فوریه سریع، پاسخ‌ها به حوزه فرکانس برده شده تا با مشخص شدن فرکانس‌های ارتعاشات روتورها، بتوان اثر پارامترهای مختلف را به خوبی مشاهده کرد. بطور کلی در این مطالعه، تاثیر هر کدام از عیوب نامتقارنی شافت، نیروی ناهم‌محوری، نامیزانی جرمی و ترم‌های غیرخطی، روی رفتار دینامیکی روتور، کاملاً بررسی گردیده است.

**کلمات کلیدی:** روتور نامتقارن؛ ناهمراستایی؛ ارتعاشات غیرخطی؛ مدل تیر تیموشنکو.

## Nonlinear Vibration Analysis of Asymmetric Rotor with Misaligned Coupling Using Timoshenko Beam Theory

H. Jamshidi<sup>1</sup>, A.A. Jafari<sup>2</sup>, N. Mohammadi<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ph.D. Student, Department of Mech. Eng., West Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

<sup>2</sup> Professor, Department of Mech. Eng., West Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

Also Faculty Member of Department of Mech. Eng., K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

<sup>3</sup> Associate Professor, Department of Mech. Eng., Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran.

### Abstract

In the present study, a proper analytical model is developed for investigating nonlinear vibration behavior of asymmetric and symmetric rotors under unbalanced and misalignment induced forces in rotating coordinates. The rotor is connected to a motor through a misaligned coupling. For a more accurate vibration analysis, Timoshenko's beam theory is applied and for a better modeling of misaligned coupling forces, Gibbons' equations are used. The equations of motion are discretized by Rayleigh-Ritz method and derived from Hamilton's principle, thereafter. According to this investigation, for asymmetric rotors as opposed to symmetric rotors, a frequency range is detected in which resonance and instability occurs. Also, the dynamic behaviors of the symmetric and asymmetric rotors are analyzed at the same rotational speed to indicate specifically the effects of different parameters. For investigating the vibration behaviors of the rotors more accurately, their time-domain vibration responses are plotted and then their Fast Fourier Transform are presented to determine the frequencies of the rotors, so the effects of different parameters can be well observed. As a whole, in this study, the effects of each of the defects such as shaft asymmetry, misalignment, mass unbalance and nonlinear terms are investigated on the dynamic behavior of the rotors.

**Keywords:** Asymmetric Rotor; misalignment; Nonlinear Vibration; Timoshenko Beam Theory.

## ۱- مقدمه

با توجه به افزایش روزافزون نیاز به وجود یک دیدگاه تحلیلی مناسب از سیستم های دوار که نقش مهمی در طراحی، شناسایی، تشخیص و کنترل سیستم های دوار دارند، داشتن مدل های ریاضی که دارای قابلیت اطمینان بالاتری هستند مورد توجه بوده است. همچنین برخلاف مشکلات تحلیل غیرخطی در مقایسه با تحلیل خطی، مدل های غیرخطی در دهه های گذشته علاقه مندان بیشتری داشته است. غیرخطی شدن سیستم ممکن است دلایل مختلفی مانند تغییر شکل های بزرگ [۱]، بیرینگ های مغناطیسی [۲] و نیروهای تماسی [۳] داشته باشد. با این حال یک مدل تحلیلی که رفتار دینامیکی روتور دارای شافت کوتاه نامتقارن که با تیر تیموشنکو مدل شده باشد و نیز این سیستم تحت اثر نیروهای ناهم محوری و نامیزانی جرمی باشد، هنوز بسیار مورد نیاز است.

خاطر نشان می شود که در صنعت، می توان مواردی را یافت که شافت آنها متقارن نباشد. در عمل، روتورهای ژنراتورهای توربو، به دلیل برآورده ساختن الزامات طراحی الکتریکی، متقارن نیستند. یکی دیگر از نمونه هایی عملی با مقطعی نزدیک به بیضی، روتورهای کمپرسورها و پمپ ها از نوع لوب می باشد.

گیبنز [۵] نیروها و گشتاورهایی که در هنگام وجود ناهم محوری های گوناگون اعمال می شوند را استخراج کرده که این نیروها و گشتاورها از عوامل اصلی ارتعاشات در سیستم های دوار هستند.

شاد و همکاران [۶] یک مدل ریاضی برای روتوری که تحت تغییر شکل های خمشی بزرگی قرار گرفته است، معرفی کردند تا رفتار دینامیکی غیرخطی روتورها را بررسی کنند. روتور مدنظر دارای یک شافت انعطاف پذیر و یک دیسک صلب می باشد که با استفاده از روابط انرژی و بکارگیری اصل همپلتون، معادلات حرکت بدست آمدند و سپس با روش مقیاس چندگانه به حل این معادلات پرداختند. با مشاهده نتایج دریافتند که تغییر شکل های بزرگ بر روی رفتار دینامیکی روتور، اثرات مهمی می گذارد.

سحار و پرابهو [۷] نیروها و گشتاورهایی که به دلیل ناهم محوری انعطاف پذیر بوجود می آیند را گسترش دادند. برطبق نتایج آنها، می توان مشاهده کرد که مشخصه

شافت های دارای ناهم محوری در وجود ارتعاشات با فرکانسی دو برابر سرعت دورانی روتور می باشد.

در مورد روتورهایی که دارای شافت نامتقارن هستند، توندل [۸] رفتار دینامیکی اینگونه سیستم ها را بررسی کرد و محدوده های ناپایداری را برای آنها نشان داد.

بدلانی و همکاران [۹] همچنین با در نظر گرفتن مدل تیر تیموشنکو برای این روتورهای نامتقارن، محدوده های ناپایداری جدیدی را مشاهده کردند.

شاهقلی و خادم [۱۰] تشدیدهای پارامتری و اولیه ی یک روتور دارای شافت نامتقارن را با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی که به دلیل تغییر شکل های بزرگ اتفاق می افتد، بدست آوردند. آنها از روش مقیاس چندگانه برای حل معادلات حرکت استفاده کردند و نشان دادند که نتایج بدست آمده از این روش با نتایج بدست آمده از روش عددی مطابقت خوبی دارند.

ردموند و الحسین [۱۱] اثرات ناهم محوری موازی را روی پاسخ های عرضی و پیچشی دو شافت دوار (روتورهای جفکات) با استفاده از تحلیل های عددی و تئوری بررسی کردند. آنها تحریک هایی برابر با فرکانس شافت دوار را در دو راستای عرضی و پیچشی مشاهده کردند.

همچنین در مقاله دیگر [۱۲] الحسین یک مدل برای ناهم محوری موازی بین دو روتور جفکات معرفی کرد. نتایج نشان داد که افزایش ناهم محوری زاویه ای یا سفتی اتصال مکانیکی منجر به افزایش محدوده پایداری سیستم می شود.

لیز [۱۳] تاثیر ناهم محوری را در اتصال صلب روتورهایی که روی بیرینگ های خطی یکسان قرار گرفته اند، مطالعه کرد. او عبارت هایی برای اندازه و فاز پاسخ های ارتعاشی استخراج کرد و مشاهده نمود که ارتعاشاتی که به دلیل ناهم محوری به وجود آمده اند، دارای فرکانس  $2X$  هستند.

پتل و دارپ [۱۴ و ۱۵] یک ترکیبی از تحلیل تئوری و آزمون های آزمایشگاهی برای دو روتور جفکات مشابه که روی بال بیرینگ ها قرار گرفته اند و با المان تیر تیموشنکو مدل شده اند، ارائه کردند.

پناچی [۱۶] پاسخ دینامیکی یک شافت هایپیرالاستیک با وجود ناهم محوری که روی بیرینگ های ژورنال قرار

وانگ [۲۲] یک مدل از سیستم دوار در موتور هوایی با یک اتصال صلب بین دو روتور الاستیک که روی دو بیرینگ قرار گرفته است، ارائه کردند و به‌عنوان یک تابع برای ناهم‌محوری، یک سفتی خمشی در نظر گرفتند.

شاهقلی و خادم [۲۳] پایداری پاسخ حالت پایای یک شافت نامتقارن دوار را با در نظر گرفتن اثرات نابرابر بودن ممان اینرسی جرمی حول محورهای اصلی مطالعه کردند. آنها روش مقیاس چندگانه را به فرم مختلط معادلات دیفرانسیل جزئی حرکت اعمال کردند تا پاسخ سیستم را تحلیل کنند.

بدلانی و همکاران [۲۴] پایداری شافت نامتقارن که روی بیرینگ‌های نامتقارن قرار دارند مطالعه کردند. آنها با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو به محدودهای ناپایداری جدیدی دست یافتند.

سودهاکار و سخار [۲۵] مطالعات مختلف را روی مدل‌سازی ناهم‌محوری خلاصه کردند. در نتیجه مشاهدات آشکارسازی ناهم‌محوری در شافت‌های روتورها، همانطور که در مقالات گذشته نشان داده شده، ویژگی عیب ناهم‌محوری روتور را می‌توان در تغییرات اندازه دامنه ارتعاشات در فرکانس کاری  $2X$  برای شافت روتور دید.

وانگ و ژیانگ [۲۶] بصورت عددی و تجربی مشخصه‌های ارتعاشی یک روتور که شامل دو شافت می‌شود را با وجود عیب‌های ناهم‌محوری و نامیزانی جرمی مطالعه کردند. نتایج آنها، مرجع‌های تئوری و مهندسی مهمی را برای عملکرد امن این روتورها و آشکارسازی دقیق این خطاها فراهم کردند.

لی و همکاران [۲۷] رفتار دینامیکی غیرخطی یک روتور نامتقارن با وجود عیب ناهم‌محوری موازی بین دو روتور را بررسی کردند. نتایج نشان دادند که اجزای روتور در فرکانس  $2X$  به طور قابل ملاحظه‌ای قابل تشخیص و آشکارسازی هستند.

گات [۲۸] رفتار دینامیکی روتور که دارای عیب ناهم‌محوری است را بررسی کرد. ناهم‌محوری و جرم نامیزانی برای روتور در نظر گرفته شدند تا سیستم تحت چند نیرو و تحریک بررسی شود.

وانگ و گنگ [۲۹] رفتار دینامیکی دو روتور که ناهم‌محور هستند و دارای جرم نامیزانی می‌باشند را تحلیل

گرفته‌اند را بررسی کرد. آنها مسئله را با روش المان محدود، حل کردند. بیشترین اثر ناهم‌محوری صلب، ارتعاشات سوپرهارمونیک در اثر بارگذاری متغیر روی بیرینگ‌ها بود.

وانگ و همکاران [۱۷] قوانین ناپایداری فیلم نازک روغن را برای یک روتور که دارای ناهم‌محوری موازی و زاویه‌ای است در مراحل راه‌اندازی و کم شدن سرعت بررسی کردند. آنها از مدل ارائه شده توسط گیبنز برای مطالعه ناهم‌محوری و از روش المان محدود برای حل مسائل بهره گرفتند. همچنین برای شافت دوار از المان تیموشنکو با ۴ درجه آزادی استفاده کردند.

فنگ و همکاران [۱۸] مشخصه‌های ارتعاشی یک روتور ناهم‌محور که دارای شافت نامتقارن است، را بررسی کردند. این سیستم از دو شافت نامتقارن تشکیل می‌شود. به‌عنوان نتیجه، آنها مشاهده کردند زمانیکه روتور فقط تحت تاثیر نامتقارن بودن شافت بررسی شود، نزدیک فرکانس  $\omega_n/2$  دامنه ارتعاشات به بیشترین مقدار می‌رسد و در صورتی که تحت تاثیر نیروهای نامیزانی و ناهم‌محوری موازی قرار بگیرد، در فرکانس  $\omega_n$  به بیشترین مقدار دامنه ارتعاشی می‌رسد.

جالان و موهانتی [۱۹] نامیزانی جرمی و ناهم‌محوری را در یک روتور با استفاده از روش مدل پایه بصورت آزمایشگاهی تعیین کردند. در روش مدل پایه، سیستم دوار، بصورت تیر با استفاده از المان محدود، مدل شده است. در این روش، خطاها به‌عنوان بارهای معادل لحاظ گردیده که در سیستم به وجود می‌آیند. برای تحلیل عددی  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  اجزای نیروهایی که در اثر ناهم‌محوری وارد می‌شوند، در نظر گرفته شده‌اند.

رافا و واتا [۲۰] معادلات حرکت را برای یک روتور دارای شافت تیموشنکو و نامتقارن بدست آوردند.

جمشیدی و جعفری [۲۱] رفتار ارتعاشی یک روتور دارای شافت نامتقارن که تحت نیروهای نامیزانی جرمی قرار گرفته است را تحلیل کردند. آنها شافت روتور را با المان تیر اویلر-برنولی مدل کردند و معادلات کلی حرکت را با در نظر گرفتن اثرات تغییرشکل بزرگ در خمش شافت استخراج کردند. معادلات غیرخطی بدست آمده با روش مقیاس چندگانه حل شده‌اند.

## ۲- مدل دینامیکی و معادلات حرکت

شکل ۱ مدلی از یک روتور انعطاف پذیر را نشان می‌دهد که به یک موتور الکتریکی متصل شده است. این روتور شامل یک دیسک متصل در فاصله  $L_1$  از بیرینگ ۱ می‌باشد. شافت این روتور دارای مقطع بیضی شکل با طول  $L$  بوده که با المان تیر تیموشنکو مدل شده است. این دیسک صلب با شعاع  $R_D$  و جرم  $M_D$  همراه با یک نامیزانی به جرم  $m$  نشان داده شده است.

از آنجایی که در این تحقیق، عامل تحریک پیچشی وجود ندارد و از طرفی، دور روتور، متغیر نیست، از تغییر شکل‌های پیچشی صرف نظر شده است.

در شکل ۲  $\alpha_0, \gamma_0, z_0$  به عنوان دستگاه مختصات ایرنسی استفاده شده‌اند که بعد از سه دوران به ترتیب حول محورهای  $x_2, \gamma_1, z_0$  دستگاه مختصات  $x_2, \gamma_2, z_2$  بدست می‌آید که جهت راحتی، می‌توان  $x, \gamma, z$  و نیز معرفی کرد.

اجزای جابجایی در راستاهای  $x, \gamma, z$  در هر مکانی از  $z$  به ترتیب بصورت  $u(z,t), v(z,t), w(z,t)$  نوشته شده‌اند و نیز زوایای چرخشی حول محورهای  $x$  و  $\gamma$  در هر مکانی از  $z$  به ترتیب بصورت  $\phi(z,t)$  و  $\theta(z,t)$  و نیز زاویه پیچشی حول محور  $z$  در مکانی از  $z$  با  $\Psi(t)$  در نظر گرفته می‌شوند.

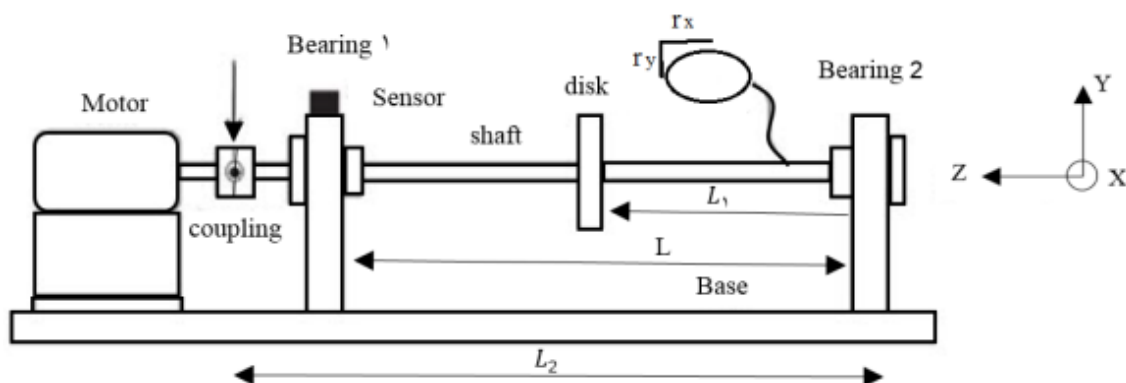
از طرفی باید توجه داشت هر چند در این تحقیق، محاسبات در دستگاه دوار صورت گرفته اما فرکانس‌ها در دستگاه ثابت باید در طراحی مورد استفاده قرار گیرند که به اندازه سرعت دورانی روتور، بزرگتر از فرکانس‌ها در دستگاه دوار هستند. به عبارت دیگر، اگر تحلیل تجربی انجام شود، فرکانس‌ها در دستگاه ثابت که واقعی هستند، حاصل می‌شوند.

کردند. این دو روتور که به یکدیگر متصل هستند با ۶ درجه آزادی مدل شده بودند. به عنوان نتیجه، فرکانس  $2X$  در ناهم محوری موازی و  $2X, 4X, 6X$  را در ناهم محوری زاویه‌ای مشاهده شده‌اند.

بنابراین در برخی مطالعات، رفتارهای ارتعاشاتی روتور دارای شافت نامتقارن تحت نیروهای ناهم محوری، شافت با مدل تیر اویلر-برنولی مدل شده است. برخی دیگر از محققان نیز، معادلات حرکت را برای یک روتور دارای شافت نامتقارن تیموشنکو در دستگاه مختصات دوار استخراج کرده‌اند، اما تاثیرات نیروهایی مثل نامیزانی جرمی ویا ناهم محوری را در رفتار دینامیکی آنها ندیده‌اند. به عبارت دیگر، تاکنون، تحقیقی بر روی شافت نامتقارنی که تحت تاثیر هم نیروهای ناهم محوری و هم نیروهای نامیزانی جرمی است با مدل تیر تیموشنکو، انجام نشده است.

با عنایت به این خلاء علمی، تحقیق حاضر قصد دارد تا یک مدل برای روتوری که دارای شافت تیموشنکو نامتقارن است و تحت نیروهای نامیزانی جرمی و ناهم محوری می‌باشد با در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی در معادلات حرکت، معرفی کند. جهت استخراج معادلات حرکت برای این سیستم، اصل همپلتون به کار گرفته شده و آنگاه این معادلات با روش عددی حل شده‌اند. منحنی‌های کمپیل برای دو شافت با مقاطع مختلف، مقایسه شده‌اند و سپس در مورد نمودارها بطور مبسوط بحث گردیده است.

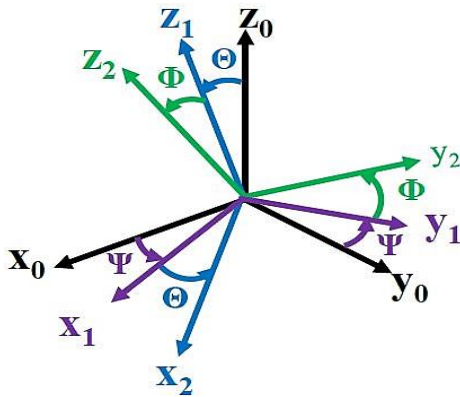
در پایان، با بدست آوردن پاسخ‌های دینامیکی روتور، تاثیرات نامتقارن بودن شافت و نیروی نامیزانی جرمی روی رفتار ارتعاشی روتور بررسی شده‌اند.



شکل ۱- روتور انعطاف پذیر دارای شافت بیضی شکل و متصل به موتور الکتریکی

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} e_{z_0} + \dot{\theta} e_{y_1} + \dot{\phi} e_{x_2} = R_{\phi} \cdot R_{\theta} \cdot \dot{\psi} (\vec{k}) + R_{\phi} \cdot \dot{\theta} (\vec{j}) + \dot{\phi} (\vec{i})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱)$$



شکل ۲- ترتیب زوایای اوایلر برای یک المان از روتور در دستگاه مختصات دوار

که  $I = \frac{I_x + I_y}{2}$ ,  $\Delta I = \frac{I_y - I_x}{2}$  و نیز  $I_x$  و  $I_y$  به ترتیب ممان اینرسی حول محورهای  $x$  و  $y$  هستند.

انرژی جنبشی انتقالی روتور را می‌توان مطابق رابطه زیر بدست آورد:

$$T_{Tr} = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \rho A (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2) dz \quad (۷)$$

بردارهای تغییر شکل را نیز مطابق زیرمی‌توان محاسبه کرد [۱]:

$$\begin{bmatrix} u_p(z,t) \\ v_p(z,t) \\ w_p(z,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(z,t) \\ v(z,t) \\ w(z,t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۸)$$

مطابق شکل ۲، موقعیت مرکز جرم دیسک به دلیل وجود جرم نامیزانی روی آن، در دستگاه  $x, y$

که  $R_{\theta}$  و  $R_{\phi}$  ماتریس‌های دوران حول محورهای به ترتیب  $y$  و  $x$  هستند. به دلیل اینکه تغییرشکل‌های پیچشی قابل چشم‌پوشی‌اند و سرعت دورانی روتور ثابت است، اندازه  $\dot{\psi}$  برابر با  $\Omega$  است.

با حل معادله ۱، سرعت‌های دورانی مطابق زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \Omega \theta \\ \dot{\theta} + \Omega \phi \\ \Omega (1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\phi^2}{2}) - \dot{\theta} \phi \end{bmatrix} \quad (۲)$$

قابل ذکر است، برای این شافت دوار نامتقارن که با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو مدل شده است، انرژی‌های جنبشی در دستگاه مختصات دوار محاسبه شده‌اند تا روتور در طول زمان دوران، ممان اینرسی ثابتی حول محورهای  $y, x$  داشته باشد. همچنین باید توجه داشت که انرژی جنبشی در دستگاه مختصات دوار نسبت به دستگاه مختصات اینرسی تغییر می‌کند در صورتی که تفاوتی در انرژی پتانسیل روتور در دو دستگاه به وجود نمی‌آید.

انرژی جنبشی روتور شامل انرژی جنبشی دورانی و انتقالی شافت و دیسک می‌شود:

$$T_{Rotor} = T_{Ro-S} + T_{Ro-D} + T_{Tr-S} + T_{Tr-D} \quad (۳)$$

انرژی جنبشی دورانی روتور می‌تواند مطابق زیر بدست آید:

$$T_{Ro} = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} (J_{Ix} \omega_x^2 + J_{Iy} \omega_y^2 + J_{Ip} \omega_z^2) dz \quad (۴)$$

بنابراین انرژی جنبشی دورانی برای شافت و دیسک روتور با استفاده از معادله ۲ برابر است با:

$$T_{Ro-S} = \frac{\rho I}{2} \int_0^{L_2} \{ \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 - \Omega^2 (\phi^2 + \theta^2) + 2\Omega^2 - 2\Omega (\theta \dot{\phi} + \dot{\theta} \phi) \} dz + \frac{\rho \Delta I}{2} \int_0^L \{ (\dot{\phi}^2 - \dot{\theta}^2) + \Omega^2 (-\phi^2 + \theta^2) - 2\Omega (\theta \dot{\phi} + \dot{\theta} \phi) \} dz \quad (۵)$$

$$T_{Ro-D} = \frac{1}{2} J_{ID} (\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) - J_{ID} \Omega (\phi \dot{\theta} + \dot{\phi} \theta) - \frac{1}{2} J_{ID} \Omega^2 (\phi^2 + \theta^2) \quad (۶)$$

$$F_{mis_r} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{mis_x} \\ F_{mis_y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

که کار انجام شده توسط این نیرو برابر می شود با:

$$W_{mis_x} = [\cos(\Omega t) f_{mis1} (\sin(\Omega t) + \sin(2\Omega t)) + \sin(\Omega t) f_{mis2} (\cos(\Omega t) + \cos(2\Omega t))] u_{(L_2)}$$

$$W_{mis_y} = [-\sin(\Omega t) f_{mis1} (\sin(\Omega t) + \sin(2\Omega t)) + \cos(\Omega t) f_{mis2} (\cos(\Omega t) + \cos(2\Omega t))] v_{(L_2)}$$

(15)

باتوجه به رابطه (15)، کار نیروی ناهم محوری در محل اتصال  $z=L_2$  محاسبه شده است. وجود اختلافها بین مدلها در این مقاله و مقاله جالان [19] به دلیل دستگاههای سیستم مختصات انتخابی هستند. در این مقاله، دستگاه مختصات دوار استفاده شده اما جعفری دستگاه مختصات ثابت را به کار برده است.

در این مقاله براساس مدل آقایان گیبنز [5]، سخار [7] و جالان [19] برای در نظر گرفتن نیروی تحریک تا فرکانس هارمونی دوم این مدل در نظر گرفته شده است و در اینجا فقط برای مدل سازی ناهمراستایی موازی از مدل گیبنز درحالت خاص که ضرایب فرکانس هارمونی اول و دوم برابر هستند، استفاده شده است.

### ۳- استفاده از روش ریلی-ریتز و اصل همیلتون

برای تخمین توابع  $u(z, t)$  و  $v(z, t)$  که جابجاییهای سیستم دوار به ترتیب در راستاهای  $x$  و  $y$  و  $\theta(z, t)$  و  $\phi(z, t)$  نیز زوایای دورانی سطح مقطع حول محورهای  $x$  و  $y$  هستند، روش ریلی-ریتز می تواند استفاده شود. در این روش، توابع  $u, v, \theta$  و  $\phi$  بصورت زیر بیان می شوند:

$$u(z, t) = a(t)\bar{u}(z), v(z, t) = b(t)\bar{v}(z)$$

$$\theta(z, t) = c(t)\bar{\theta}(z), \phi(z, t) = d(t)\bar{\phi}(z) \quad (16)$$

که  $a(t), b(t), c(t)$  و  $d(t)$  توابع زمانی مستقل هستند و  $\bar{u}_{(z)}$  و  $\bar{v}_{(z)}$ ، شکل مودهای جابجایی عرضی روتور هستند و  $\bar{\theta}_{(z)}$  و  $\bar{\phi}_{(z)}$ ، شکل مودهای زوایای خمشی سطح مقطع می باشند. جابجاییهای در نظر گرفته شده، اولین مود خمشی تیر تحت شرایط مرزی دوسر مفصل هستند. شکل مودها را می توان مانند زیر در نظر گرفت [1]:

$$\begin{bmatrix} u_p(z, t) \\ v_p(z, t) \\ w_p(z, t) \end{bmatrix}$$

و  $z$  است و نیز موقعیت مرکز جرم دیسک در

دستگاه مختصات  $x_1, y_1, z_0$  است که دستگاه مختصات دوار گفته می شود. سرعت های انتقالی در دستگاه مختصات دورانی مطابق فرمول زیر بدست می آیند:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_p \\ \dot{v}_p \\ \dot{w}_p \end{bmatrix} + \Omega(\vec{k}) \cdot \begin{bmatrix} u_p(\vec{i}) \\ v_p(\vec{j}) \\ w_p(\vec{k}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

بنابراین انرژی جنبشی انتقالی برای این روتور برابر است با:

$$T_{Tr_s} = \int_0^{L_2} \frac{1}{2} \mu_s [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \Omega^2(u^2 + v^2) + 2\Omega(u\dot{v} - \dot{u}v)] dz \quad (10)$$

$$T_{Tr_D} = \frac{1}{2} M_D [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \Omega^2(u^2 + v^2) + 2\Omega(u\dot{v} - \dot{u}v)]_{z=L_1} + M_D [\Omega^2(v\varepsilon_y + u\varepsilon_x) - \Omega(\dot{u}\varepsilon_y - \dot{v}\varepsilon_x)] \quad (11)$$

که  $\mu_s = \rho A$  است.

انرژی کرنشی برای یک روتور با تغییرشکل های خمشی بزرگ از نوع غیرخطی فون کارمان بوده و با در نظر گرفتن مدل تیر تیموشنکو برابر است با [1]:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ KGA \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \theta \right)^2 + KGA \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \phi \right)^2 + EI_{xx} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + EI_{yy} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] dz + \frac{EA}{2} \int_0^L \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^4 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^4 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] dz \quad (12)$$

که  $E, G$  و  $K$  به ترتیب مدول های یانگ و برشی و ضریب تصحیح برشی تیموشنکو هستند.

در این مقاله، برای مدل سازی نیروهای ناهم محوری، از نیروهای واکنشی که توسط گیبنز [5] استخراج شده اند، استفاده گردیده است و مدل دینامیکی نیروهای ناهم محوری اعمالی که توسط جعفری [21] پیشنهاد شده، برای دستگاه مختصات ثابت مطابق زیر داده شده است:

$$F_{mis_x} = f_{mis1} (\sin(\Omega t) + \sin(2\Omega t))$$

$$F_{mis_y} = f_{mis2} (\cos(\Omega t) + \cos(2\Omega t)) \quad (13)$$

که  $f_{mis1}$  و  $f_{mis2}$  طبق معادلات گیبنز بدست آمده اند (پیوست الف). با اعمال ماتریس دوران به این نیرو، مدل دینامیکی نیروهای ناهم محوری اعمالی در دستگاه مختصات دوار مطابق زیر بدست می آید:

$$+2\Omega \begin{bmatrix} -G \\ G \end{bmatrix} [\dot{r}] + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{22} & K_{24} \\ K_{31} & K_{33} \\ K_{42} & K_{44} \end{bmatrix} [r] \quad \bar{u}(z) = \bar{v}(z) = \sin \frac{\pi z}{L}$$

$$\bar{\theta}(z) = \bar{\phi}(z) = \cos \frac{\pi z}{L} \quad (17)$$

با اعمال اصل همپلتون به معادلات انرژی‌های جنبشی و کرنشی خواهیم داشت:

$$+ \Omega^2 \begin{bmatrix} -N_{11} & & & \\ & -N_{22} & & \\ & & N_{33} & \\ & & & N_{44} \end{bmatrix} [r] + \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \delta \int_0^L (T_{Tr-D} + T_{Tr-s} + T_{Ro-D} + T_{Ro-s} - U_s + W_{mis}) dt = 0$$

$$(18)$$

حال معادلات حرکت را می‌توان استخراج کرد:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & & & \\ & M_{22} & & \\ & & M_{33} & \\ & & & M_{44} \end{bmatrix} [\dot{r}] + \begin{bmatrix} C_{11} & & & \\ & C_{22} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} [r] \quad (19)$$

که  $[r] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$  بوده و اجزای ماتریس‌های معادله (۱۹) به صورت زیر می‌باشند:

$$M_{11} = \int_0^{L_2} \mu_s \bar{u}_{(z)}^2 dz + M_D \bar{u}_{(L_1)}^2, M_{22} = \int_0^{L_2} \mu_s \bar{v}_{(z)}^2 dz + M_D \bar{v}_{(L_1)}^2$$

$$M_{33} = \int_0^{L_2} \rho(I - \Delta I) \bar{\theta}_{(z)}^2 dz + J_{Dy} \bar{\theta}_{(L_1)}^2, M_{44} = \int_0^{L_2} \rho(I + \Delta I) \bar{\phi}_{(z)}^2 dz + J_{Dx} \bar{\phi}_{(L_1)}^2$$

$$C_{11} = C_{22} = c_i$$

$$G = \int_0^{L_2} \mu_s \bar{v}_{(z)} \bar{u}_{(z)} dz + M_D \bar{v}_{(L_1)} \bar{u}_{(L_1)}$$

$$K_{11} = - \int_0^{L_2} KGA \bar{u}_{(z)}'' \bar{u}_{(z)} dz, K_{13} = \int_0^{L_2} KGA \bar{\theta}_{(z)}' \bar{u}_{(z)} dz$$

$$K_{22} = - \int_0^{L_2} KGA \bar{v}_{(z)}'' \bar{v}_{(z)} dz, K_{24} = - \int_0^{L_2} KGA \bar{\phi}_{(z)}' \bar{v}_{(z)} dz$$

$$K_{31} = - \int_0^{L_2} KGA \bar{\theta}_{(z)} \bar{u}_{(z)}' dz, K_{33} = \int_0^{L_2} (KGA \bar{\theta}_{(z)}^2 - E(I + \Delta I) \bar{\theta}_{(z)}'' \bar{\theta}_{(z)}) dz$$

$$K_{42} = \int_0^{L_2} KGA \bar{\phi}_{(z)} \bar{v}_{(z)}' dz, K_{44} = \int_0^{L_2} (KGA \bar{\phi}_{(z)}^2 - E(I - \Delta I) \bar{\phi}_{(z)}'' \bar{\phi}_{(z)}) dz$$

$$N_{11} = \int_0^{L_2} \mu_s \bar{u}_{(z)}^2 dz + M_D \bar{u}_{(L_1)}^2, N_{22} = \int_0^{L_2} \mu_s \bar{v}_{(z)}^2 dz + M_D \bar{v}_{(L_1)}^2$$

$$N_{33} = \int_0^{L_2} \rho(I - \Delta I) \bar{\theta}_{(z)}^2 dz + J_{ID} \bar{\theta}_{(L_1)}^2, N_{44} = \int_0^{L_2} \rho(I + \Delta I) \bar{\phi}_{(z)}^2 dz + J_{ID} \bar{\phi}_{(L_1)}^2$$

$$Q_x = \frac{1}{2} EA \int_0^L (a^3 \bar{u}_{(z)}'^3 + ab^2 \bar{v}_{(z)}'^2 \bar{u}_{(z)}') \bar{u}_{(z)}' dz$$

$$Q_y = \frac{1}{2} EA \int_0^L (b^3 \bar{v}_{(z)}'^3 + a^2 b \bar{u}_{(z)}'^2 \bar{v}_{(z)}') \bar{v}_{(z)}' dz$$

$$F_x = [\cos(\Omega t) f_{mis1} (\sin(\Omega t) + \sin(2\Omega t)) + \sin(\Omega t) f_{mis2} (\cos(\Omega t) + \cos(2\Omega t))] \bar{u}_{(L_2)} + M_D \Omega^2 \varepsilon_x \bar{u}_{(L_1)}$$

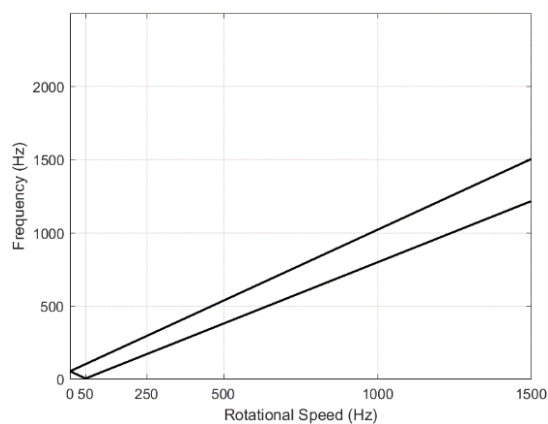
$$F_y = [-\sin(\Omega t) f_{mis1} (\sin(\Omega t) + \sin(2\Omega t)) + \cos(\Omega t) f_{mis2} (\cos(\Omega t) + \cos(2\Omega t))] \bar{v}_{(L_2)} + M_D \Omega^2 \varepsilon_y \bar{v}_{(L_1)}$$

$$(20)$$

روتور ۱ از مرجع [۶] و روتور ۲ از مرجع [۲۱] و روتور ۳ برای صحت‌سنجی روابط (۱۹) و (۲۰) در نظر گرفته شده‌اند. روتور ۱ دارای شافتی متقارن و تحت شرایط مرزی دوسرمفصل می‌باشد که جهت مقایسه نتایج بدست آمده از این تحقیق با مرجع [۶] در نظر گرفته شده‌اند. روتور ۲ و ۳ دارای سطح مقطع مستطیلی شکل هستند که به ترتیب دارای شافتی نازک و ضخیم‌تر هستند و برای بررسی تفاوت نتایج حاصله از تئوری اویلر-برنولی با تیموشنکو در نظر گرفته شده‌اند. روتورهای ۴ و ۵ جهت بررسی رفتار دینامیکی روتورهای متقارن و نامتقارن تحت تاثیر ترم‌های غیرخطی و نیز نیروهای ناشی از عیوب ناهم‌محوری و نامیزانی جرمی لحاظ شده‌اند که می‌توان با مشاهده پاسخ دینامیکی روتورها، به وجود این عیوب پی برد. توجه شود که روتورهای ۴ و ۵ دارای جرمی برابر می‌باشند و در این حالت می‌توان به خوبی تفاوت رفتار دو روتور را مشاهده کرد. همچنین این امر می‌تواند باعث آشکارسازی عیب نامتقارنی روتور شود که ممکن است در ساخت روتور به وجود آمده باشد.

با جایگذاری  $\bar{r}e^{st}$  در معادله (۱۹) بعنوان  $r$  و صرف‌نظر از تحریک‌ها و ترم‌های غیرخطی، می‌توان نمودار کمپل را برای روتوری متقارن یا نامتقارن که مدل آن در شکل ۱ آورده شده است، در دستگاه مختصات دوار رسم کرد.

در ابتدا با استفاده از روتور ۱ به مقایسه نتایج بدست آمده از روابط این تحقیق با مرجع [۶] پرداخته خواهد شد. در شکل ۳ برای روتور ۱ که دارای شافتی متقارن می‌باشد، نمودار کمپل در دستگاه مختصات محلی و یا همان دستگاه مختصات دوار در سرعت دورانی ۵۰ هرتز یا ۳۰۰۰



شکل ۳- نمودار کمپل برای روتور ۱ در دستگاه دوار

در نهایت با مقایسه با مراجع [۲۰ و ۲۱] دیده می‌شود که معادلات حرکت بدست آمده در این مقاله به درستی استخراج شده‌اند. حال امکان این وجود دارد که با حل معادلات حرکت به روش عددی، تحلیل رفتار دینامیکی و ارتعاشی سیستم صورت گیرد.

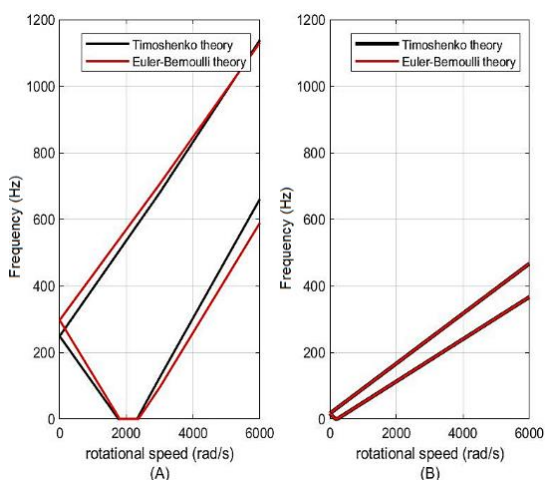
#### ۴- مطالعه عددی

جهت بررسی صحت روابط (۱۹) و (۲۰) و نیز مطالعه رفتار دینامیکی روتورهای متقارن و نامتقارن تحت تاثیر نیروهای ناهم‌محوری و نامیزانی جرمی، سه روتور در جدول ۱ در نظر گرفته شده است.

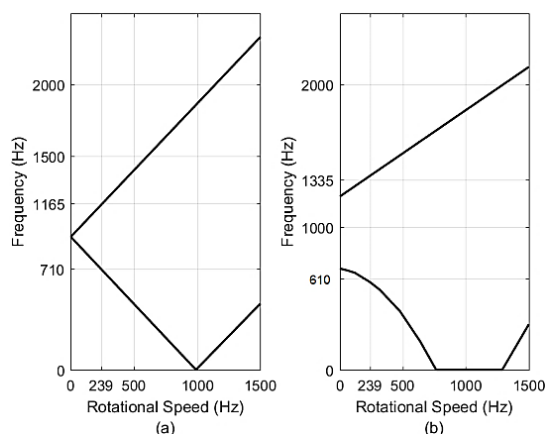
جدول ۱- ابعاد هندسی روتورها

ابعاد شافت	ابعاد دیسک
نمونه ۱ [۶] ابعاد سطح مقطع $r = 10mm$ طول $L_1 = \frac{L}{3}$ , $L = 400mm$	دیسک ۱ $R_1 = 10mm$ $R_2 = 150mm$ $h = 30mm$
نمونه ۲ [۲۱] ابعاد سطح مقطع $s_x = 4mm, s_y = 6mm$ طول $L_1 = 92mm, L = 240mm, L_2 = 320mm$	دیسک ۲ $R_1 = 30mm$ $R_2 = 150mm$ $h = 10mm$
نمونه ۳ ابعاد سطح مقطع $s_x = 15mm, s_y = 20mm$ طول $L_1 = 92mm, L = 240mm, L_2 = 320mm$	دیسک ۳ $R_1 = 30mm$ $R_2 = 150mm$ $h = 10mm$
نمونه ۴ ابعاد سطح مقطع $r = 20mm$ طول $L_1 = 92mm, L = 240mm, L_2 = 320mm$	دیسک ۴ $R_1 = 30mm$ $R_2 = 150mm$ $h = 10mm$
نمونه ۵ ابعاد سطح مقطع $r_x = 26.67mm, r_y = 15mm$ طول $L_1 = 92mm, L = 240mm, L_2 = 320mm$	دیسک ۵ $R_1 = 30mm$ $R_2 = 150mm$ $h = 10mm$





شکل ۴- نمودار کمپیل برای دور روتور ۲ و ۳ در دستگاه دوار (A) روتور ضخیم و (B) روتور نازک



شکل ۵- نمودار کمپیل برای دور روتور ۴ و ۵ در دستگاه دوار (a) روتور متقارن و (b) روتور نامتقارن

در شکل ۵ (b) نیز، نمودار کمپیل برای روتور نامتقارن ۵ با استفاده از معادلات (۱۹) و (۲۰) رسم شده است، مشاهده می‌شود که یک بازه فرکانسی برای روتور وجود دارد که باعث ناپایداری روتور می‌شود و از رفتار روتور متقارن ۴ که تنها در یک سرعت کاری خاص، ناپایدار می‌شد، متفاوت است.

حال با حل کردن معادله (۱۹) پاسخ سیستم دوار به تحریک‌های مختلف بدست می‌آید. لازم به ذکر است که باتوجه به در نظر گرفتن یک مقدار ثابت برای سرعت دورانی روتور، پاسخ بدست آمده در حالت پایا بدست خواهد آمد.

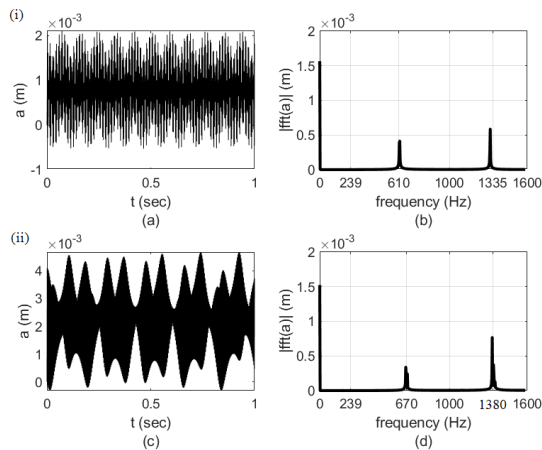
دور بر دقیقه رسم شده است که البته ناظر واقع بر دستگاه مختصات دوار مشاهده می‌کند که روتور با فرکانس صفر حرکت می‌کند که به معنای وقوع ناپایداری در روتور است. نکته قابل ذکر، این می‌باشد که اگرچه برای روتور متقارن در دستگاه مختصات ثابت، دو فرکانس ناپایداری اما در دستگاه مختصات دوار، تنها یک فرکانس ناپایداری بدست خواهد آمد و اگر روتور نامتقارن باشد، یک محدوده ناپایداری دیده می‌شود که با بیشتر شدن میزان نامتقارنی شافت روتور، این محدوده ناپایداری نیز بیشتر می‌شود [۴]. با مراجعه به مرجع [۶] مشاهده می‌شود که برای روتور ۱، فرکانس ناپایداری ۳۰۸۹ دور بر دقیقه را بدست آورده است و با فرکانس محاسبه شده در این مقاله اختلاف کمتر از ۵ درصد دارد که این نشان‌دهنده دقت نتایج بدست آمده از رابطه (۱۹) می‌باشد.

در ادامه با رسم نمودار کمپیل برای دو روتور ۲ و ۳ به بررسی تفاوت نتایج حاصله از تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو برای دو شافت نازک و ضخیم پرداخته خواهد شد.

در شکل ۴ (B) که برای روتوری با شافت نسبتاً نازک از مرجع [۲۱] گرفته شده است، نمودار کمپیل از دو روش، با لحاظ تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو رسم شده است و مشاهده می‌شود که دو نمودار روی یکدیگر افتاده‌اند. همچنین در این نمودار بدست آمده مشاهده شده که در بازه ۱۲۵ تا ۱۸۳ رادیان بر ثانیه روتور دچار ناپایداری می‌شود و این بازه ناپایداری مطابق مرجع [۲۱] برابر ۱۲۱ تا ۱۷۶ رادیان بر ثانیه می‌باشد که این امر نشان از درستی نتایج بدست آمده از معادلات این تحقیق می‌باشد.

اما در شکل ۴ (B) که روتور دارای شافتی ضخیم‌تر است مشاهده می‌شود که فرکانس‌های طبیعی برای سیستم دوار از دو روش اویلر-برنولی و تیموشنکو بایکدیگر تفاوت دارند و این به معنای عدم صحت نتایج با استفاده از مدل اویلر-برنولی است.

در شکل ۵ (a)، نمودار کمپیل برای روتور ۴ که دارای شافتی متقارن می‌باشد، در دستگاه مختصات دوار رسم شده است که با رسیدن یکی از نمودارها به مقدار صفر، سرعت بحرانی روتور بدست می‌آید و همانطور که مشاهده می‌شود این برخورد نیز در فرکانس ۱۰۰۰ هرتز اتفاق افتاده است.



شکل ۶- پاسخ ارتعاشی روتور نامتقارن ۳ دارای نامیزانی جرمی بزرگی معادل  $\epsilon=0/04$  میلی‌متر در  $\Omega=239$  هرتز معادل  $\Omega=1500$  رادیان بر ثانیه؛ (i) بدون در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی و (ii) با در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی

داشته و بنابراین فرکانس‌های طبیعی سیستم دوار افزایش داشته‌اند.

در جدول ۲، تاثیر وجود ترم‌های غیرخطی برای چند تحریک نامیزانی جرمی آورده شده است که با بیشتر شدن مقدار نامیزانی جرمی، دامنه نوسان بیشتر خواهد شد و نیز تاثیر ترم‌های غیرخطی نیز بیشتر می‌شود و بالعکس.

همانطور که در جدول مشاهده می‌شود وقتی نامیزانی جرمی ناچیز است و در نتیجه دامنه و تغییر شکل‌ها، کوچک هستند، تحلیل خطی و غیرخطی، به یک پاسخ منتهی می‌شوند، در صورتیکه وقتی نامیزانی جرمی بیشتر می‌شود، دامنه و تغییر شکل‌ها، بزرگ‌تر خواهند شد و پاسخ تحلیل خطی و غیرخطی، متفاوت خواهند بود. بنابراین ترم‌های غیرخطی برای روتوری با جابجایی‌های بزرگ، فرکانس‌های طبیعی سیستم دوار را دقیق‌تر بدست می‌دهند.

#### ۶- تاثیر عدم تقارن شافت روتور

جهت بررسی رفتار دینامیکی یک روتور که دارای شافتی نامتقارن است، پاسخ ارتعاشی این سیستم تحت یک تحریک مشخص بررسی شود. در این مقاله برای مشاهده بهتر تاثیر نامتقارنی شافت، پاسخ ارتعاشی روتورهای متقارن و نامتقارن تحت تحریک نامیزانی جرمی به اندازه  $\epsilon=10^{-5}$  میلی‌متر مورد مطالعه قرار گرفته است. مقدار تحریک، از این بابت بزرگ در

برای حل معادله، روش عددی رانگ-کوتا استفاده شده است.

#### ۵- تاثیر ترم‌های غیرخطی

با توجه به اینکه ترم‌های غیرخطی در معادله (۱۹) ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ روتور می‌باشند، تنها در صورتی بر رفتار دینامیکی سیستم دوار تاثیر خواهند گذاشت که این سیستم تحت نیروها و تحریک‌های قدرتمند دچار ارتعاشاتی با دامنه‌های نسبتاً زیاد شود. تحریک‌های در نظر گرفته شده در معادله (۱۹) ناشی از وجود عیوب نامهم‌محوری و نامیزانی جرمی می‌باشند. در صنعت، نیروهای وارد شده به روتور از طرف عیب نامهم‌محوری نمی‌توانند خیلی بزرگ باشند زیرا باعث تخریب سیستم دوار در محل اتصال می‌شوند. بنابراین برای بررسی اثر ترم‌های غیرخطی، نیروهای نامیزانی جرمی، بزرگ در نظر گرفته می‌شوند.

برای بررسی تاثیر ترم‌های غیرخطی، به‌عنوان نمونه، پاسخ ارتعاشی روتور نامتقارن ۳ تحت نیروهای نامیزانی جرمی با مقادیر مختلف بررسی شده است. در شکل ۵ پاسخ این روتور به تحریک نامیزانی جرمی به اندازه  $\epsilon=0/04$  میلی‌متر بار بدون در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی و بار دیگر با در نظر گرفتن آنها، آورده شده است تا تغییر در رفتار دینامیکی این روتور مشاهده شود. همانطور که در معادله (۱۶) گفته شد،  $a$  تابع زمانی مستقل برای  $u(z, t)$  می‌باشد و در شکل ۶، فقط رفتار این ترم به‌عنوان نمونه آورده شده است زیرا ترم  $b$  که تابع زمانی مستقل برای  $v(z, t)$  می‌باشد، رفتاری مشابه دارد.

همانطور که در شکل ۶ قابل مشاهده است، پاسخ روتور نامتقارن شامل ۳ فرکانس می‌باشد که فرکانس صفر به این دلیل است که تحریک نامیزانی جرمی در این فرکانس به سیستم وارد می‌شود و دو فرکانس دیگر فرکانس‌های طبیعی ذاتی روتور در این سرعت دورانی می‌باشند. در شکل ۶ (i) که ترم‌های غیرخطی در نظر گرفته نشده‌اند، فرکانس‌های طبیعی در سرعت دوارنی ۲۳۹ هرتز، مطابق نمودارهای کمپل بدست آمده در شکل ۵ (b) برابر ۶۱۰ و ۱۳۳۵ هرتز می‌باشند و این در صورتی است که با اتخاذ ترم‌های غیرخطی، فرکانس‌های طبیعی برابر ۶۷۰ و ۱۳۸۰ هرتز می‌شوند و به عبارت وجود ترم‌های خاصیت سفت‌شوندگی را

جدول ۲- مقایسه فرکانس‌های طبیعی روتور نامتقارن ۵ با سرعت دورانی  $\Omega=239$  هرتز در صورت وجود یا عدم وجود ترم‌های غیرخطی

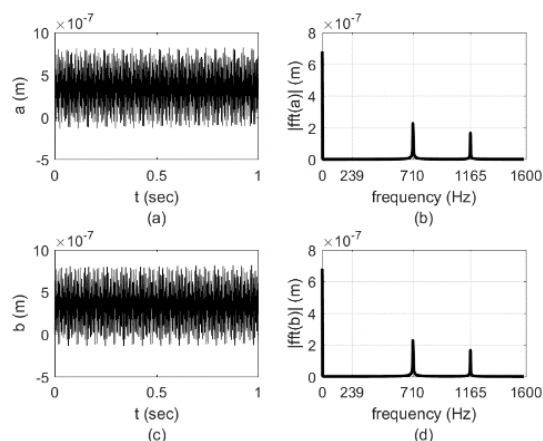
مقدار $\varepsilon$ (m)	بیشینه دامنه نوسان (mm)	فرکانس‌های طبیعی بدون ترم‌های غیرخطی (Hz)	فرکانس‌های طبیعی با وجود ترم‌های غیرخطی (Hz)	درصد تغییرات فرکانس‌ها (%)
۰/۰۴	۵		۶۷۰	(۹/۸)
			۱۳۸۰	(۳/۴)
۰/۰۲	۲/۵	۶۱۰	۶۳۰	(۳/۲)
		۱۳۳۵	۱۳۵۰	(۱/۱۲)
کمتر از	کمتر از ۱		۶۱۰	(۰)
۰/۰۰۸			۱۳۳۵	(۰)

فاصله بیشتری بگیرند که این می‌تواند عاملی برای شناخت روتور نامتقارن از روتور متقارن باشد.

### ۷- اثر وجود عیب ناهم‌محوری در روتورها

حال با حل معادله (۱۹) تحت تاثیر نیروی ناهم‌محوری، اثرات این عیب در سرعت  $\Omega=1500$  رادیان بر ثانیه یا  $\Omega=239$  هرتز بررسی خواهد شد. برای روتورهای ۴ و ۵ ناهم‌محوری موازی  $\Delta Y=0$  و  $\Delta X=0.1$  میلی‌متر در نظر گرفته شده است [۲۱].

همانطور که مشاهده می‌شود هنگامی که روتور تحت نیروی ناهم‌محوری موازی قرار می‌گیرد، در یک راستا با چهار فرکانس و در راستای دیگر با شش فرکانس در دستگاه



شکل ۷- پاسخ ارتعاشی روتور متقارن ۴ هم‌محور، با وجود نامیزانی جرمی در  $\Omega=239$  هرتز یا  $\Omega=1500$  رادیان بر ثانیه (a) و (c) شکل موج ارتعاشی و (b) و (d) نمودار FFT

نظر گرفته نشده زیرا با توجه به بخش قبل، روتور دچار تغییر شکل بزرگی نشود و تحت تاثیر اثرات غیرخطی قرار نگیرد تا بتوان بهتر به تاثیر نامتقارنی شافت پرداخت.

همانگونه که در معادله (۱۶) گفته شد، a و b توابع زمانی مستقل برای  $u(z, t)$  و  $v(z, t)$  هستند.

همانطور که مشاهده می‌شود، شکل ۷ پاسخ سیستم روتور ۴ و شکل ۸ پاسخ روتور ۵ را با وجود عیب نامیزانی جرمی در دستگاه مختصات دوار نشان می‌دهند.

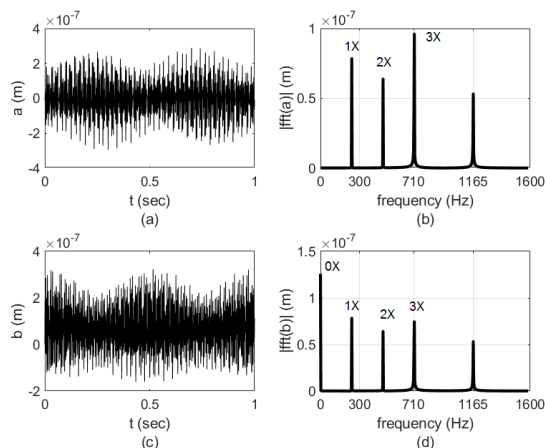
با گرفتن FFT، از پاسخ‌های این روتورها تحت شرایط مذکور مشاهده می‌شود که این پاسخ‌ها شامل سه فرکانس هستند. یکی از این فرکانس‌ها صفر می‌باشد که به دلیل اعمال نیروی ثابت نامیزانی جرمی است و دو فرکانس دیگر به دلیل فرکانس‌های بحرانی روتور در سرعت  $\Omega=1500$  رادیان بر ثانیه یا  $\Omega=239$  هرتز هستند که می‌توان مقادیر فرکانس‌های بحرانی را در شکل ۵ (b) و (a)، در این سرعت دورانی  $\Omega=239$  هرتز یافت.

در شکل ۷ که پاسخ روتور متقارن است، دو فرکانس طبیعی برابر ۷۱۰ و ۱۱۶۵ هرتز می‌باشند و در شکل ۸ که پاسخ روتور نامتقارن است، دو فرکانس طبیعی برابر ۶۱۰ و ۱۳۳۵ هرتز می‌باشند.

قابل ذکر است که دو روتور دارای جرم یکسان می‌باشند و تنها تفاوت آنها در مقدار شعاع‌های شافت آنها می‌باشد که این تفاوت باعث می‌شود روتور نامتقارن ۵، دارای سفتی غیر یکسانی حول محورهای عرضی سطح مقطع شافت باشد. نامتقارن بودن شافت باعث شده تا دو فرکانس بحرانی این روتور نسبت به فرکانس‌های بحرانی روتور متقارن، از یکدیگر

تفاوت نمودار بدست آمده در شکل ۱۱ با شکل ۱۰ تنها در وجود عیب نامیزانی جرمی می باشد که در شکل ۱۱ لحاظ شده است.

از آنجایی که در شکل ۸ دیده شد، عیب نامیزانی جرمی سبب می شود تا سیستم دوار در فرکانس صفر و فرکانس های طبیعی پاسخ دهد. حال با این دیدگاه به تفاوت بین نمودارهای بدست آمده در شکل ۱۰ و ۱۱ پرداخته می شود.

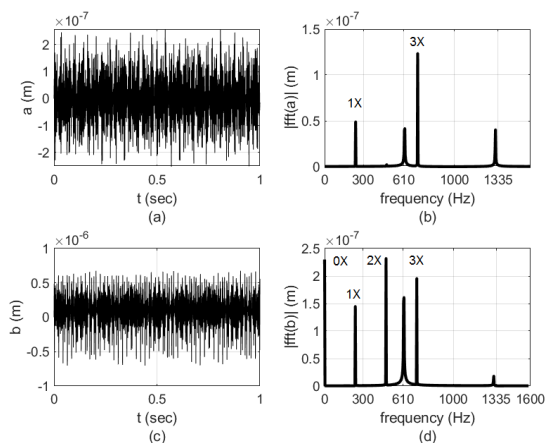


شکل ۹- پاسخ ارتعاشی روتور متقارن ۴ با لحاظ ناهم

محوری موازی و بدون وجود نامیزانی جرمی در

$\Omega = 239$  هرتز معادل  $\Omega = 1500$  رادیان بر ثانیه

(a) و (c) شکل موج ارتعاشی و (b) و (d) نمودار FFT

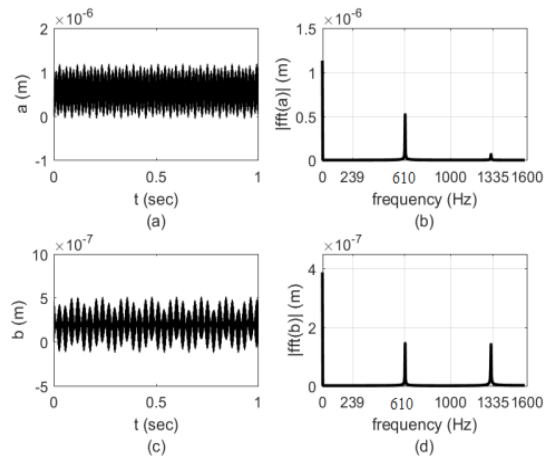


شکل ۱۰- پاسخ ارتعاشی روتور نامتقارن ۵ با لحاظ ناهم

محوری موازی و بدون وجود نامیزانی جرمی در  $\Omega = 239$

هرتز معادل  $\Omega = 1500$  رادیان بر ثانیه

(a) و (c) شکل موج ارتعاشی و (b) و (d) نمودار FFT



شکل ۸- پاسخ ارتعاشی روتور نامتقارن ۵ هم محور، با وجود

نامیزانی جرمی در  $\Omega = 239$  هرتز یا  $\Omega = 1500$  رادیان بر ثانیه

(a) و (c) شکل موج ارتعاشی و (b) و (d) نمودار FFT

مختصات دوار نوسان می کند. در شکل های ۹ و ۱۰ قسمت (a) و (b) پاسخ فرکانس صفر وجود ندارد، در حالی که در شکل ۹ و ۱۰ قسمت (c) و (d)، این پاسخ وجود دارد و این به دلیل شیوه مدل سازی نیروهای ناهم محوری در معادله (۱۴) می باشد. همانطور که مشخص شده، پاسخ نیروهای ناهم محوری موازی شامل یک فرکانس (۲۳۹ Hz) دوار و شامل فرکانس های  $0X$ ،  $1X$ ،  $2X$  و  $3X$  در راستای محور  $x$  در دستگاه مختصات محور  $y$  این دستگاه می باشد. همچنین علاوه بر این فرکانس ها، پاسخ سیستم شامل دو فرکانس دیگر که فرکانس های طبیعی سیستم در هر دور است هستند، می باشد. لازم به ذکر است که در شکل ۹ که مربوط به روتور متقارن است، فرکانس  $3X$  با فرکانس طبیعی اول سیستم (۷۱۰ Hz) برابر می باشد.

## ۸- اثر وجود دو عیب ناهم محوری و نامیزانی

### جرمی در روتورها

در صورتی که برای روتور نامتقارن ۵ با ناهم محوری موازی  $\Delta Y = 0$  و  $\Delta X = 0.1$  میلی متر، نامیزانی جرمی به اندازه  $\varepsilon = 0.04$  میلی متر در نظر گرفته شود مشاهده می شود چگونه این دو عیب بر رفتار روتور تاثیر خواهند گذاشت که در شکل ۱۱ نمودار پاسخ رسم شده است.

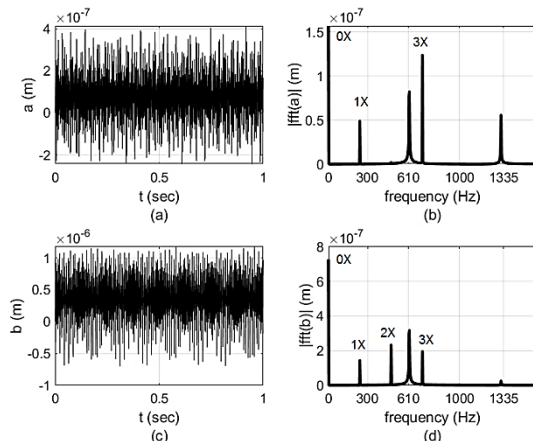
سرعت بحرانی آن بدست آمده است که مشاهده شد با سرعت بحرانی بدست آمده توسط شاد [۶]، اختلاف کمتر از ۵ درصد دارد و در نتیجه، روابط این مقاله، نتایج درستی را ارائه می‌دهند.

با رسم دیاگرام‌های کمپبل، فرکانس‌های طبیعی سیستم با بدست آمده و مشاهده شد که برای روتورهای نامتقارن، یک بازه فرکانسی وجود دارد که باعث رزونانس و ناپایداری سیستم دوار می‌شود. اثر وجود ترم‌های غیرخطی برای روتوری که تحت تحریک‌های شدید، دچار تغییر شکل‌های بزرگی شده است، بررسی شد و به‌عنوان نتیجه، دیده شد که با در نظر گرفتن این ترم‌ها، فرکانس‌های طبیعی کمتر از حالتی خواهند شد که بصورت خطی بررسی شوند و هرچه مقدار تحریک، شدیدتر و دامنه نوسان روتور، بزرگ‌تر شود، فرکانس‌های طبیعی بیشتر کاهش پیدا می‌کنند. اگرچه زمانی که تحریک شدید نیست و در نتیجه دامنه و تغییر شکل‌ها، کوچک هستند، تحلیل خطی و غیرخطی، پاسخ یکسان دارند، اما مشاهده شد که با بالا رفتن مقدار تحریک و دامنه نوسان پاسخ تحلیل خطی دقت لازم را نداشته و باید تحلیل غیرخطی انجام شود.

سپس، شکل موج‌های ارتعاشی و تبدیل فوریه سریع آنها برای دو روتور متقارن و نامتقارن که تحت نیروی نامیزانی جرمی هستند رسم گردید تا اثر نامتقارن بودن روتور دیده شود. در این حالت نیز دیده شد که چنانچه روتور دارای شافتی نامتقارن باشد، دو فرکانس طبیعی سیستم دوار، نسبت به فرکانس‌های طبیعی روتور متقارن از یکدیگر فاصله می‌گیرند.

در نهایت، پاسخ روتورها تحت نیروی ناهم‌محوری مورد مطالعه قرار گرفت تا تاثیر این عیب بر پاسخ دینامیکی سیستم دوار دیده شود. مشاهده شد که پاسخ روتورها تحت نیروهای ناهم‌محوری موازی، علاوه بر فرکانس‌های طبیعی روتورها شامل دو فرکانس  $1X$ ،  $2X$  و  $3X$  در راستای محور  $x$  و فرکانس‌های  $0X$ ،  $1X$ ،  $2X$  و  $3X$  در راستای محور  $y$  در دستگاه مختصات دوار می‌باشد.

بنابراین در این تحقیق، برای روتور تحت تاثیر عواملی مانند نامتقارنی شافت، نیروی ناهم‌محوری، نیروی نامیزانی جرمی و ترم‌های غیرخطی، فرکانس‌های پاسخ سیستم دوار و دامنه‌ها بدست آمد. حال با توجه به نتایج بیان شده، چنانچه



شکل ۱۱- پاسخ ارتعاشی روتور نامتقارن ۵ بالحاظ ناهم

محوری موازی و وجود نامیزانی جرمی در  $\Omega = 239$  هرتز

معادل  $\Omega = 1500$  رادیان بر ثانیه

(a) و (c) شکل موج ارتعاشی و (b) و (d) نمودار FFT

مشاهده می‌شود که در شکل ۱۱، مقدار دامنه‌های پاسخ روتور در فرکانس‌های  $1X$ ،  $2X$  و  $3X$  نسبت به شکل ۱۰ تغییری نکرده‌اند حال آنکه دامنه پاسخ در فرکانس  $0X$  و در فرکانس‌های طبیعی ( $610$  و  $1335$  هرتز) نسبت به شکل ۱۰ بیشتر شده‌اند.

## ۹- نتیجه‌گیری

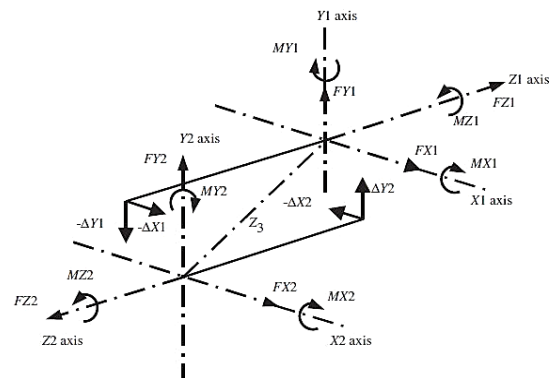
اگر چه مطالعاتی در زمینه روتورهای نامتقارن انجام شده است اما بکارگیری مدل تیر تیموشنکو همزمان با بررسی تاثیر نیروی ناهم‌محوری و نامیزانی جرمی روی رفتار دینامیکی روتور، در آن تحقیقات انجام نشده است. در صورتی که در مقاله حاضر، رفتار دینامیکی روتورهایی با شافت‌های دایروی و بیضوی که با تئوری تیر تیموشنکو مدل شده‌اند، تحت تاثیر ناهم‌محوری و نیروی نامیزانی جرمی در دستگاه مختصات دوار بررسی می‌شوند. همچنین رفتار غیرخطی این روتورها، هنگامی که تحت اثر نیروهای شدید، دچار تغییر شکل‌های بزرگ می‌شوند، بررسی شده است. در این تحقیق، معادلات گینز برای محاسبه نیروهای ناهم‌محوری به‌کار گرفته شده‌اند.

جهت صحت‌سنجی نتایجی که از روابط بدست آمده در این مقاله حاصل می‌شوند، یک روتور متقارن تحت شرایط مرزی دوسر مفصل مطابق مرجع [۶] در نظر گرفته شده و

- higher order deformations in bending. Appl Math Model 35(5): 2145-2159.
- [7] Sekhar AA, Prabhu BS (1995) Effects of coupling misalignment on vibrations of rotating machinery. J Sound Vib 185(4): 655-671.
- [8] Tondl A (1965) Some problems of rotor dynamics (Book on rotor stability self-excited vibration and nonlinear resonances). London, Chapman And Hall, LTD., 1965. 434 P. Translation.
- [9] Badlani M, Kleinhenz W, Hsiao CC (1978) The effect of rotary inertia and shear deformation on the parametric stability of unsymmetric shafts. Mech Mach Theory 13(5): 543-553.
- [10] Shahgholi M, Khadem SE (2012) Primary and parametric resonances of asymmetrical rotating shafts with stretching nonlinearity. Mech Mach Theory 51: 131-144.
- [11] Al-Hussain KM, Redmond I (2002) Dynamic response of two rotors connected by rigid mechanical coupling with parallel misalignment. J Sound Vib 249(3): 483-498.
- [12] Al-Hussain KM (2003) Dynamic stability of two rigid rotors connected by a flexible coupling with angular misalignment. J Sound Vib 266(2): 217-234.
- [13] Lees AW (2007) Misalignment in rigidly coupled rotors. J Sound Vib 305(1-2): 261-271.
- [14] Patel TH, Darpe AK (2009) Experimental investigations on vibration response of misaligned rotors. Mech Syst Signal Pr 23(7): 2236-2252.
- [15] Patel TH, Darpe AK (2009) Vibration response of misaligned rotors. J Sound Vib 325(3): 609-628.
- [16] Pennacchi P, Vania A, Chatterton S (2012) Nonlinear effects caused by coupling misalignment in rotors equipped with journal bearings. Mech Syst Signal Pr 30: 306-322.
- [17] Ma H, Wang X, Niu H, Wen B (2015) Oil-film instability simulation in an overhung rotor system with flexible coupling misalignment. Arch Appl Mech 85(7): 893-907.
- [18] Feng S, Geng HP, Qi SM, Yu L (2012) Vibration of a misaligned rotor system with asymmetric shaft stiffness. Adv Mat Res 503: 813-818
- [19] Jalan AK, Mohanty AR (2009) Model based fault diagnosis of a rotor-bearing system for misalignment and unbalance under steady-state condition. J Sound Vib 327(3-5): 604-622.
- [20] Raffa FA, Atta FV (2001) Equations of motion of an asymmetric Timoshenko shaft. Meccanica 36(2): 201-211.
- [21] Jafari AA, Jamshidi P (2019) Investigating nonlinear vibration behavior of rotors with asymmetry shaft considering misalignment. J Solid Mech 11(3): 535-549.
- [22] Wang G, Ma Y, Li T, Li J, Hong J (2013) Modelling of misaligned rotor system in aero-engines and interval method investigation. ASME 170(4): 523-533.

هر کدام از این عیوب در سیستم وجود داشته باشد، می‌توان به آن پی برد که این مقوله، بعنوان آشکارسازی عیوب در علم دینامیک روتور و صنایع وابسته بسیار حائز اهمیت است.

## ۱۰- پیوست الف\_ نیروها و ممان‌های ناهم‌محوری در حالت استاتیک



شکل الف-۱ دستگاه مختصات محل اتصال

برای ناهم‌محوری موازی:

$$\begin{aligned} MX1 &= Tq \sin \theta_1 + K_b \phi_1, & MX2 &= Tq \sin \theta_2 - K_b \phi_2 \\ MY1 &= Tq \sin \phi_1 - K_b \theta_1, & MY2 &= Tq \sin \phi_2 + K_b \theta_2 \\ FX1 &= (-MY1 - MY2) / Z_3, \\ FY1 &= (MX1 + MX2) / Z_3 \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{cases} \theta_1 = \text{Arcsin}(\Delta X1 / Z3), & \theta_2 = \text{Arcsin}(\Delta X2 / Z3) \\ \phi_1 = \text{Arcsin}(\Delta Y1 / Z3), & \phi_2 = \text{Arcsin}(\Delta Y2 / Z3) \end{cases}$$

## ۱۱- مراجع

- [1] Lalanne M, Ferraris G (1998) Rotor dynamics prediction in engineering. second edn. John Wiley & Sons.
- [2] Genta G (2005) Dynamics of rotating systems. Springer, New York
- [3] Rao JS (1996) Rotor dynamics. New Age International.
- [4] Muszynska A (2005) Rotordynamics (Broken Sound Parkway). Taylor & Francis, Routledge
- [5] Gibbons CB (1976) Coupling misalignment forces. In Proceedings of the 5th Turbomachinery Symposium. Texas A&M University Gas Turbine Laboratories.
- [6] Shad MR, Michon G, Berlioz A (2011) Modeling and analysis of nonlinear rotordynamics due to

- and experimental study. *Mech Mach Theory* 125: 207-219.
- [27] Li Z, Li J, Li M (2018) Nonlinear dynamics of unsymmetrical rotor-bearing system with fault of parallel misalignment. *Adv Mech Eng* 10(5): 1687-1708.
- [28] Gao S, Xiong X, Zhou C, Wang X (2018) Dynamic behavior of a rotor-bearing system with integral squeeze film damper and coupling misalignment. 2018 Prognostics and System Health Management Conference (PHM-Chongqing).
- [29] Wang H, Gong J (2019) Dynamic analysis of coupling misalignment and unbalance coupled faults. *J Low Freq Noise V A* 1461-1482.
- [23] Shahgholi M, Khadem SE (2012) Stability analysis of a nonlinear rotating asymmetrical shaft near the resonances. *Nonlinear Dynam* 70(2): 1311-1325.
- [24] Badlani M, Kleinhenz W, Hsiao CC (1978) The effect of rotary inertia and shear deformation on the parametric stability of unsymmetric shafts. *Mech Mach Theory* 13(5): 543-553.
- [25] Sudhakar GND, Sekhar AS (2009) Coupling misalignment in rotating machines modelling, effects and monitoring. *Noise Vib Worldw* 40(1): 17-39.
- [26] Wang N, Jiang D (2018) Vibration response characteristics of a dual-rotor with unbalance-misalignment coupling faults: theoretical analysis