



تحلیل کمانش میکرو صفحه مستطیلی تابعی مدرج در محیط حرارتی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی با بکارگیری تئوری تنش کوپل اصلاح شده

کوروش خورشیدی^{۱,۲,*}، محسن قاسمی^۲ و ابوالفضل فلاح^۳

^۱ دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک

^۲ دانشیار، مهندسی مکانیک، پژوهشکده علوم و فناوریهای نانو، دانشگاه اراک، ایران

^۳ کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۱۲، تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۵/۱۴، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۰۸

چکیده

هدف این مقاله مطالعه کمانش میکرو صفحه‌های مستطیلی تابعی مدرج توانی است. جهت به دست آوردن بار بحرانی کمانش بی‌بعد میکرو صفحه تابعی مدرج، از تئوری تنش کوپل اصلاح شده بر اساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی استفاده شده است. در تئوری تغییر شکل برشی نمایی، از توابع نمایی در راستای ضخامت، جهت در نظر گرفتن تأثیر اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی عرضی استفاده شده است. برای به دست آوردن بار بحرانی کمانش تمام شرایط مرزی، معادلات حرکت سیستم با به‌کارگیری روش ریلی ریتز بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده به دست آمده است که این تئوری شامل، یک پارامتر مقیاس طول است. دما در صفحه ورق ثابت فرض شده است و فقط در راستای ضخامت تغییر می‌کند. خواص مواد وابسته به دما فرض شده است و به طور پیوسته در راستای ضخامت بر اساس قانون پراکندگی قدرت در عبارات حجم شکست عناصر تشکیل دهنده تغییر می‌کند. در نهایت، تأثیر پارامترهای گوناگون از قبیل: اندیس توانی، نسبت طول به عرض (a/b)، نسبت طول به ضخامت (a/h) و پارامتر مقیاس طول بر بار بحرانی کمانش بی‌بعد میکرو ورق تابعی مدرج مستطیلی ارائه شده است.

کلمات کلیدی: ریلی ریتز؛ کمانش؛ میکرو صفحه تابعی مدرج؛ اندیس توانی؛ تئوری‌های تغییر شکل برشی نمایی.

Buckling Analysis of Functionally Graded Rectangular Microplate in Thermal Environment Based on Exponential Shear Deformation Theory using the Modified Couple Stress Theory

K. khorshidi^{1,2,*}, M. Ghasemi³, A. Fallah³

¹ Assoc. Prof., Mech. Eng., Arak Univ., Arak, Iran.

² Assoc. Prof., Mech. Eng., Institute of Nanosciences & Nanotechnology, Arak Univ., Arak, Iran.

³ Ms.C. Student, Mech. Eng., Arak Univ., Arak, Iran.

Abstract

The aim of this paper is to study the buckling analysis of power law functionally graded rectangular microplates. The modified couple stress theory based on the exponential shear deformation theory has been used to obtain the dimensionless critical buckling load of the functionally graded microplate. In exponential shear deformation theory, exponential functions are used in term of thickness coordinate to include the effect of transverse shear deformation and rotary inertia. To obtain the critical buckling loads for all boundary conditions, the equations of motion are obtained using Rayleigh-Ritz method based on the modified couple stress theory that the this theory contains only one material length scale parameter. The temperature is assumed to be constant in the plane of the plate and to vary in the thickness direction. Material properties are assumed to be temperature dependent and vary continuously through the thickness according to a power law distribution in term of the volume fraction of the constituents. Finally, the effect of various parameters such as n Power Law indexes, aspect ratio (a/b), length to thickness ratio and the length scale parameter on the non-dimensional critical buckling load of rectangular FG micro nano-plates are presented.

Keywords: Rayleigh-Ritz, Buckling; Functionally Graded Microplate; Power Law Indexes; Exponential Shear Deformation Plate Theory.

۱- مقدمه

حل مسائل مقدار ویژه ورق‌های ضخیم در طول سال‌های گذشته به وسیله‌ی روش‌های مختلف عددی انجام پذیرفت. چانگ و زو [۱]، به حل عددی ارتعاش ورق‌های مستطیلی ذوزنقه‌ای میندین، با در نظر گرفتن تئوری تیر تیموشینکو و با استفاده از روش ریلی- ریتز پرداختند که تابع حدس مورد استفاده، جابجایی و پیچش ناشی از خمش در ورق را برآورد می‌نماید. این توابع حدس نسبت به توابع دیگر با جملات کمتری دقت مورد نیاز جهت محاسبه فرکانس‌ها را حاصل نمودند. پارک و همکاران [۲]، ارتعاش ورق‌های مستطیلی با تحریک سیال و تکیه‌گاه‌های ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در این مقاله خواص دینامیکی المان‌های تکیه‌گاهی را بررسی کرده‌اند و برای حل از روش ریلی- ریتز با بکارگیری توابع تیر استفاده نمودند، از روش کورکوس، جهت اعمال تحریک سیال استفاده نمودند.

زیانگ و وی [۳]، حل دقیقی را برای ارتعاش و کمانش ورق‌های میندین مستطیلی پله‌ای با شرایط مرزی دو لبه موازی ساده و دو لبه دیگر آزاد بدست آوردند. در این مقاله قسمتی از حل دقیق با بکارگیری روش ریلی- ریتز انجام پذیرفت. نبوس و همکاران [۴]، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاش متقارن پیچشی یک ورق با خصوصیت الاستیک خطی را به روش ریتز، مورد بررسی قرار دادند. یونشان [۵]، ارتعاش آزاد ورق‌های مستطیلی و مثلثی میندین را به روش دی اس سی - ریتز، مورد بررسی قرار داد. زیانگ و همکاران [۶]، کمانش ورق‌های مستطیلی نسبتاً ضخیم را با بکارگیری روش انرژی ریلی- ریتز، مورد مطالعه قرار دادند. ماتسونگا [۷] با استفاده از سری‌های توانی، پایداری ورق‌های ضخیم روی بستر الاستیک را مورد مطالعه قرار داد. حسینی هاشمی و همکاران [۸]، با استفاده از تئوری مرتبه اول به بررسی کمانش ورق‌های مستطیلی با بارهای درون صفحه‌ای مختلف پرداخته‌اند. صیاد و همکاران [۹]، با استفاده از تئوری اصلاح شده نمایی ارتعاش خارج از صفحه ورق مستطیلی را با استفاده از حل ناویر بررسی کرده است. خورشیدی و فرهادی [۱۰]، به بررسی ارتعاش آزاد ورق کامپوزیت مستطیلی در تماس با سیال محدود پرداخته‌اند. در این تحقیق از تئوری‌های کلاسیک مرتبه اول تغییر شکل برشی و مرتبه سوم تغییر شکل برشی استفاده شده است.

دوزیو [۱۱] بر اساس تئوری مثلثاتی به تحلیل ارتعاش ورق‌های مستطیلی کیرشلف با استفاده از روش ریلی- ریتز پرداخت. تونسوی و همکاران [۱۲]، به تحلیل کمانش ترمو الاستیک ورق با استفاده از تئوری تغییر شکل مثلثاتی پرداختند؛ همچنین تأثیر بار حرارتی در خمش ورق‌ها را بررسی کردند در این تئوری مؤلفه‌های جابجایی با استفاده از سری‌های مثلثاتی در راستای ضخامت ورق ارائه شده است. علی نقی زاده و همکاران [۱۳]، به تحلیل خمش میکرو ورق های تابعی مدرج حلقوی بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداختند. خارودو همکاران [۱۴]، ارتعاشات ورق‌های ایزوتروپیک را با استفاده از تئوری تغییر شکل نمایی، مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی با استفاده از اصل کار مجازی بدست آورده شده و نتایج حاصله با نتایج سایر تئوری‌های تغییر شکل برشی و حل دقیق موجود در سایر مقالات مقایسه شده است؛ همچنین علی نقی زاده و شریعتی [۱۵]، تحلیل خمش ورق‌های تابعی مدرج با در نظر گرفتن تغییرات در راستای شعاعی را مورد بررسی قرار دادند. حسینی هاشمی و همکاران [۱۶]، به بررسی و تحلیل ارتعاش آزاد یک ورق مستطیلی تابعی مدرج بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند. در این مقاله اثرات وجود بستر الاستیک روی فرکانس ورق مستطیلی تابعی مدرج مورد بحث قرار گرفته است. خورشیدی و فلاح [۱۷]، به بررسی کمانش نانو ورق تابعی مدرج با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی نمایی بر اساس تئوری الاستیسیته غیر محلی پرداختند؛ همچنین خورشیدی و همکاران [۱۸]، تحلیل ارتعاش آزاد نانو ورق تابعی مدرج را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی نمایی انجام داده‌اند. علی نقی زاده و کدخدایان [۱۹]، تحلیل خمش غیر خطی ورق‌های تابعی مدرج را تحت بار ترمومکانیکی انجام دادند. یانگ [۲۰]، تأثیرات محیط حرارتی روی ارتعاش ورق تابعی مدرج را مورد بررسی قرار داد. در همین راستا لی و همکاران [۲۱]، به تحلیل ارتعاش ورق تابعی مدرج در محیط حرارتی پرداختند. آدینه و کدخدایان [۲۲]، به تحلیل سه بعدی ترمو الاستیک و پاسخ دینامیکی ورق‌های تابعی مدرج مسطح روی بستر الاستیک پرداختند. تاکنون در تحقیقات زیادی به بررسی ارتعاش نانو تیرهای تابعی مدرج، پرداختند؛ اما در زمینه ارتعاش نانو ورق‌های تابعی مدرج،

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{nm,i} \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{nm} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (4)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{i,k} \quad (5)$$

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{nm} \delta_{ij} \quad (7)$$

که u بردار جابجایی، λ و μ ثوابت لامه می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\lambda = \frac{\vartheta E}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)} \quad (8)$$

$$\mu = \frac{\vartheta}{2(1+\vartheta)} \quad (9)$$

همچنین E مدول یانگ، ϑ نسبت پواسون، l پارامتر مقیاس طول ماده، δ_{ij} دلتای کرونکر و e_{ijk} نماد جایگشت است که بصورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شود:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{برای چرخش پاد ساعت گرد } k, j, i \\ -1 & \text{برای چرخش ساعت گرد } k, j, i \\ 0 & \text{برای دو یا سه اندیس تکراری} \end{cases} \quad (10)$$

۳- روابط حاکم بر مواد تابعی مدرج

نکته حائز اهمیت برای ما در ساخت این دسته از مواد مرکب پیشرفته می‌تواند چگونگی تغییرات مدول یانگ، چگالی و نسبت پواسون در یک المان باشد. در سال ۱۹۸۳، اردوغان^۱ و دلپت^۲ [۲۴] نشان دادند که تاثیر تغییر نسبت پواسون در تغییر شکل‌ها نسبت به تاثیر مدول یانگ و چگالی از اهمیت بسیار ناچیزی برخوردار است؛ یعنی می‌توان در برخی موارد نسبت پواسون را تقریباً ثابت فرض کرد و فقط مدول یانگ را تابعی از ضخامت در نظر گرفت، یعنی به صورت رابطه (۱۱):

تحقیقات محدودی وجود دارد که از جمله می‌توان به تحقیقات نتاراجن و همکاران [۲۳] اشاره نمود که با استفاده از تئوری غیر محلی به تحلیل ارتعاشی نانو ورق تابعی مدرج پرداختند. مطالعاتی که تاکنون در راستای ارتعاش آزاد و کماتش ورق‌ها و میکرو صفحه‌های تابعی مدرج در سال‌های اخیر انجام پذیرفته است، دارای نواقصی می‌باشند. در این تحقیق برای اولین بار مطالعاتی در راستای کماتش میکرو صفحه تابعی هدفمند در محیط حرارتی بر اساس تئوری اصلاح شده تغییر شکل برشی نمایی با در نظر گرفتن تاثیر اینرسی دورانی و تنش‌های برشی عرضی در راستای ضخامت انجام پذیرفته است.

در این مقاله با استفاده از تئوری‌های مذکور و روابط الاستیسیته که به طور کامل شرح داده خواهند شد، معادله‌های حاکم بر کماتش میکرو صفحه مستطیلی تابعی مدرج با بکارگیری روش حل ریلی-ریتز بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده بدست آورده شده است. در ادامه، نتایج حاصل با نتایج موجود در مراجع معتبر اعتبار سنجی شده و سپس تأثیر انواع پارامترها بر کماتش میکرو صفحه مستطیلی تابعی مدرج به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- روابط حاکم بر مواد نانو با بکارگیری تئوری تنش کوپل اصلاح شده

برای اعمال روابط حاکم بر مواد نانو ساختار، تئوری‌های مختلفی ارائه شده است که یکی از این تئوری‌ها، تئوری تنش کوپل اصلاح شده است.

برای اولین بار یانگ [۲۰]، تئوری بهینه تنش کوپل را پیشنهاد کرد که بر اساس آن تانسور تنش کوپل متقارن بوده و تنها شامل، یک پارامتر مقیاس طول است. در این تئوری انرژی کرنش، تابعی از هر دو تانسور کرنش مربوط به تانسور تنش و انحنا مربوط به تانسور تنش کوپل است، بنابراین این انرژی کرنش U برای یک نانو ورق الاستیک خطی با حجم V طبق رابطه (۱) نوشته می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

که در رابطه بالا ε تانسور کرنش، σ_{ij} تانسور تنش، χ_{ij} تانسور متقارن انحنا و m_{ij} بخش عرضی تانسور تنش کوپل بوده و طبق روابط (۲) - (۷) محاسبه می‌شوند:

¹ Erdogan

² Delate

مبنای آن فرضیات از مدل فیزیکی سازه یک مدل ریاضی مناسب جهت تحلیل بدست آورد. برای این منظور تئوری‌های مختلفی وجود دارند که در این مقاله به معرفی کامل تئوری تغییر شکل برشی نمایی پرداخته شده است.

نانو ورق مستطیلی هدفمندی به طول a ، عرض b و ضخامت h مانند شکل ۱ در نظر گرفته شده است که دستگاه مختصات کارتزین با مؤلفه‌های x_1 و x_2 و x_3 بر لایه میانی ورق مستقر شده است و ورق تحت نیروهای محوری N_2 و N_1 قرار گرفته و از ترکیب فلز و سرامیک بین دو سطح بالا و پایین در راستای ضخامت ساخته شده است. توزیع خواص مواد در راستای ضخامت از قانون توانی پیروی می‌کنند. در حقیقت سطح بالا ($z = h/2$) از سرامیک خالص و سطح پایین ($z = -h/2$) از فلز خالص است.

در حالت کلی پروفیل جابجایی برای تئوری تغییر شکل برشی نمایی به صورت روابط (۱۵) تا (۱۷) است. [۹]

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = u_0(x_1, x_2, x_3, t) - x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + f(x_3) \varphi_1(x_1, x_2, t) \quad (15)$$

$$v(x_1, x_2, x_3, t) = v_0(x_1, x_2, x_3, t) - x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} + f(x_3) \varphi_2(x_1, x_2, t) \quad (16)$$

$$W(x_1, x_2, x_3, t) = w(x_1, x_2, t) \quad (17)$$

$$E = E(z), \rho = \rho(z), \vartheta = cte \quad (11)$$

برای بیان خواص مواد هدفمند با استفاده از تابع توانی فرض می‌کنیم، کسر حجمی یکی از مواد پایه ماده هدفمند از تابع توانی به صورت رابطه (۱۲) پیروی می‌کند:

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g \quad (12)$$

که g اندیس توانی و h ضخامت ورق است. در صورتی که کسر حجمی ماده هدفمند به صورت $V(z)$ تعریف شود، آنگاه ویژگی‌های ماده هدفمند به صورت زیر قابل بیان خواهد بود:

$$E(z) = (E_c - E_m)V(z) + E_m \quad (13)$$

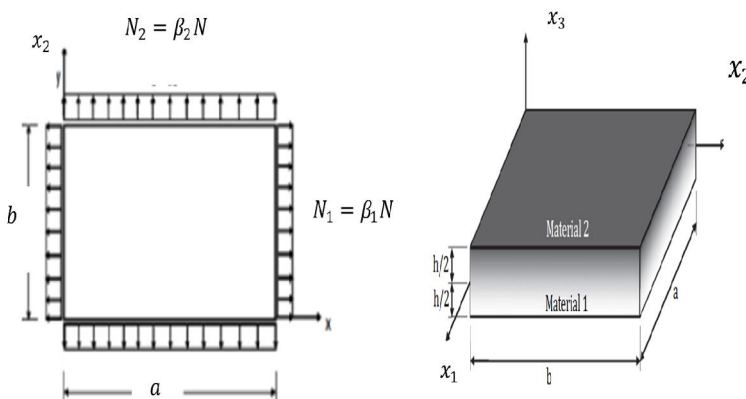
$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)V(z) + \rho_m \quad (14)$$

که E_m مدول یانگ فلز و ρ_m چگالی فلز در سطح زیرین ورق ($z = -h/2$) و E_c مدول یانگ سرامیک و ρ_c چگالی سرامیک در سطح بالایی ورق ($z = h/2$) است. همچنین در این مقاله ضریب پواسون ν برای هر دو ماده فلز و سرامیک ثابت و برابر ۰.۳۸ در نظر گرفته شده است.

۴- تئوری تغییر شکل برشی نمایی

در صورتی که یک تئوری سازه‌ای مناسب با شبیه‌سازی ریاضی کامل استفاده گردد، رفتار دینامیکی سازه با خطای بسیار کم توصیف می‌شود.

جهت تهیه مدل فیزیکی از یک سازه‌ای که هندسه آن ورق مسطح است لازم است تا فرضیاتی را در نظر گرفت و بر



شکل ۱- نمایش یک نانو ورق مستطیلی هدفمند نسبتاً ضخیم با دستگاه مختصات در نظر گرفته شده در لایه میانی

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial v_0}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + f(x_3) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \quad (20)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial u_0}{\partial x_2} + \frac{\partial v_0}{\partial x_1} - 2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + f(x_3) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right) \quad (21)$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{df(x_3)}{dx_3} \varphi_1 \quad (22)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{df(x_3)}{dx_3} \varphi_2 \quad (23)$$

با چشم پوشی از تأثیر تنش عمودی σ_{33} نسبت به تنش های σ_{11} و σ_{22} و با توجه به روابط خطی هوک بین تنش های عمودی σ_{11} و σ_{22} با کرنش های عمودی ε_{11} و ε_{22} و روابط تنش های برشی τ_{12} ، τ_{13} و τ_{23} با کرنش های برشی γ_{12} ، γ_{13} و γ_{23} را بصورت زیر توسعه می دهیم:

$$\sigma_{11} = \frac{E(x_3, T)}{1 - \vartheta(x_3, T)^2} (\varepsilon_{11} + \vartheta(x_3, T) \varepsilon_{22}) = \frac{E(x_3, T)}{1 - \vartheta(x_3, T)^2} \left[f(x_3) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \vartheta(x_3, T) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \vartheta(x_3, T) \frac{\partial v_0}{\partial x_2} \right) - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \vartheta(x_3, T) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] \quad (24)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E(x_3, T)}{1 - \vartheta(x_3, T)^2} (\varepsilon_{22} + \vartheta(x_3, T) \varepsilon_{11}) = \frac{E(x_3, T)}{1 - \vartheta(x_3, T)^2} \left[f(x_3) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \vartheta(x_3, T) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \vartheta(x_3, T) \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \vartheta(x_3, T) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right] \quad (25)$$

$$\tau_{12} = G\gamma_{12} = \frac{E(x_3, T)}{2(1 + \vartheta(x_3, T))} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_2} + \frac{\partial v_0}{\partial x_1} - 2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + f(x_3) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right) \right) \quad (26)$$

$$\tau_{13} = G\gamma_{13} = \frac{E(x_3, T)}{2(1 + \vartheta(x_3, T))} \left(\frac{df(x_3)}{dx_3} \varphi_1 \right) \quad (27)$$

$$\tau_{23} = G\gamma_{23} = \frac{E(x_3, T)}{2(1 + \vartheta(x_3, T))} \left(\frac{df(x_3)}{dx_3} \varphi_2 \right) \quad (28)$$

همچنین فرض می شود، ورق بدون تنش ابتدایی در دمای T_0 است. به ورق در ابتدا با افزایش دما تنش داده می شود. تنش های اولیه با افزایش دمای $\Delta T(z)$ به صورت رابطه (۲۹) تعریف می شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^T \\ \sigma_{yy}^T \\ \sigma_{xy}^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha(z, T) \\ \alpha(z, T) \end{bmatrix} \times \Delta T(z) \quad (29)$$

که تابع $f(x_3)$ با توجه به تئوری های تغییر شکل برشی نمایی به شکل رابطه (۱۸) در نظر گرفته می شود.

$$f(x_3) = x_3 \exp \left(-2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right) \quad (18)$$

در روابط مذکور t بیانگر زمان، φ_1 و φ_2 شیب ورق ناشی از خمش، u و v جابجایی های ورق به ترتیب در امتداد محورهای x_1 و x_2 ، و w جابجایی عرضی ورق در راستای محور x_3 است؛ همچنین u_0 و v_0 جابجایی های میان صفحه ای ورق به ترتیب در امتداد محورهای x_1 و x_2 می باشند. با فرض روابط کرنش-جابجایی خطی، چنانچه کرنش های عمودی (ε_{11} و ε_{22}) و کرنش های برشی (γ_{12})، γ_{13} و γ_{23} در نظر گرفته شوند، میدان کرنش در دستگاه مختصات کارتزین به صورت زیر خواهد بود.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u_0}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + f(x_3) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \quad (19)$$

در رابطه بالا $G = \frac{E(x_3, t)}{2(1 + \vartheta(x_3, t))}$ ، مدول برشی نامیده می شود.

۵- توزیع دمایی در راستای ضخامت

همچنین یکی از اهداف این مقاله، مطالعه کمانش ورق در محیط حرارتی است. فرض شده است که تغییرات دما تنها در راستای ضخامت وجود دارد و دما در یک راستا در صفحه ورق ثابت فرض می‌شود.

۵-۱- دمای غیر خطی

بار دمایی برای سطوح پایینی و بالایی را به صورت رابطه (۳۰) در نظر گرفته شده است:

$$(30) \quad \begin{cases} T = T_0 + T_b & x = \frac{h}{2} \\ T = T_0 + T_t & x = -\frac{h}{2} \end{cases}$$

این بارهای حرارتی برای حل حالت شار حرارتی ثابت قابل استفاده است:

$$(31) \quad -\frac{d}{dx_3} \left[k(z) \frac{dT}{dx} \right] = 0$$

پراکندگی دما در امتداد ضخامت به این صورت به دست می‌آید:

$$(32) \quad T = T_0 + T_t + (T_t - T_b) \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^z \frac{1}{k(z)} dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{k(z)} dz}$$

در مورد قانون قدرت *SFGP* حل معادله (۳۲) به صورت چند جمله‌ای‌های سری قابل بیان است [۲۰]:

$$(33) \quad T = T_0 + T_t + (T_t - T_b) \Delta T(z)$$

$$(34) \quad \Delta T(z) = \frac{1}{C} \left[\left(\frac{2z+h}{2h} \right) - \frac{k_{tb}}{(p+1)k_b} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{g+1} + \frac{k_{tb}^2}{(2p+1)k_b^2} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{2g+1} - \frac{k_{tb}^3}{(3p+1)k_b^3} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{3g+1} + \frac{k_{tb}^4}{(4p+1)k_b^4} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{4g+1} - \frac{k_{tb}^5}{(5p+1)k_b^5} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{5g+1} \right]$$

ریلی-ریتز است که برای تخمین سریع بار بحرانی کمانشی در یک سیستم پیوسته بکار گرفته می‌شود. موفقیت این روش به انتخاب توابع شکل پذیرفتنی بستگی دارد که شرایط مرزی هندسی مسئله را ارضا، می‌نماید. توابع شکل بکار گرفته شده در این روش باید قابل دیفرانسیل‌گیری باشند، یا حداقل برای مرتبه‌هایی از مشتق که در معادلات انرژی ظاهر می‌شوند مشتق پذیر باشند، ولی ناپیوستگی برای این توابع اهمیت ندارد. در این روش برای تخمین رفتار دینامیکی سیستم از سری‌ها استفاده می‌گردد. با افزایش جملات سری به یک تخمین مناسب از رفتار کمانشی سیستم دست می‌یابیم. در هر مسئله مقدار ویژه تقریبی، پروسه زمانی متوقف می‌شود که مقادیر ویژه به دقت مورد نظر رسیده باشند که این پروسه با محدود کردن تعداد جملات به جای تعداد نامتناهی درجات آزادی، سیستم به درجات آزادی محدود تبدیل می‌شود، این محدود کردن بدین معناست که ترم‌های درجه بالاتر سری نادیده گرفته شود یا به عبارتی قیدی در سیستم ایجاد گردیده است. مطابق روش ریلی-ریتز جواب تقریبی مسئله مقدار ویژه یک سیستم پیوسته می‌تواند بشکل ترکیب خطی $u(x_1) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i$ در نظر گرفته شود، که a_i ها ضرایبی هستند که باید تعیین گردند و ψ_i ها توابع

که $k_{tb} = k_t - k_b$ برای یک ماده ورقی ایزوتروپیک مثل فلز خالص یا ورق‌های سرامیکی افزایش دما در راستای ضخامت برابر است با:

$$(35) \quad T = T_0 + \frac{T_t + T_b}{2} + \frac{T_t - T_b}{h} z$$

خواص ماده تاثیر گذار P وابسته به دما هستند. یک خاصیت ماده معمول مثل مدول الاستیسیته E ، نسبت پواسون ν ، چگالی جرمی ρ ، ضریب انبساط حرارتی α و ضریب هدایت حرارتی k با تابعی از دما طبق مرجع [۲۰] به صورت رابطه (۳۶) قابل بیان است:

$$(36) \quad p = p_0 (P_{-1} T^{-1} + I + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3)$$

$p_0, p_{-1}, P_1, P_2, P_3$ ضرایب دمایی $T(k)$ هستند و برای مواد تشکیل دهنده منحصر به فرد هستند.

۶- روش ریلی-ریتز بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده

هنگامی که امکان بدست آوردن بار بحرانی کمانشی یک سیستم به‌طور دقیق وجود نداشته باشد، از روش‌های عددی و تقریبی جهت بدست آوردن پاسخ دینامیکی سیستم استفاده می‌شود، یکی از این روش‌های تحلیلی، روش انرژی

۸- انرژی پتانسیل سیستم بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده

در تئوری تنش کوپل اصلاح شده انرژی پتانسیل به صورت رابطه (۴۰) تعریف می‌شود [۲۵].

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_{\forall} (\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{12}\gamma_{12} + \sigma_{13}\gamma_{13} + \sigma_{23}\gamma_{23} + m_{11}\chi_{11} + m_{22}\chi_{22} + m_{33}\chi_{33} + 2m_{12}\chi_{12} + 2m_{13}\chi_{13} + 2m_{23}\chi_{23}) d\forall \quad (40)$$

که در رابطه (۴۰)، ϵ_{ij} تانسور کرنش، σ_{ij} تانسور تنش، χ_{ij} تانسور متقارن انحنا و m_{ij} بخش عرضی تانسور تنش کوپل بوده. براساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی و مثلثاتی توابع χ_{ij} و m_{ij} بصورت رابطه (۴۱) تعریف می‌گردند:

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (41)$$

که در رابطه بالا θ_i بردار چرخش است و بصورت رابطه (۴۲) تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_3} \right) \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \\ \theta_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

با جایگذاری رابطه (۴۲) در رابطه (۴۱) خواهیم داشت:

$$\chi_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial f(x_3)}{\partial x_3} \varphi_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \quad (43)$$

$$\chi_{22} = \frac{1}{2} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial f(x_3)}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) \quad (44)$$

$$\chi_{33} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(x_3)}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) \quad (45)$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + \frac{1}{4} \frac{\partial f(x_3)}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) \quad (46)$$

$$\chi_{13} = \frac{1}{4} \left[f(x_3) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 f(x_3)}{\partial x_3^2} \varphi_2 + \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \right) - 2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right]$$

حدس می‌باشند مجموعه توابع مجاز ψ_i بعنوان توابع تقریب شناخته می‌شوند. ضرایب a_i ها نیز چنان تعیین می‌شوند که نزدیکترین تشابه را بین تابع $u(x_1)$ و توابع شکل مود واقعی سیستم ایجاد نمایند، برای رسیدن به این هدف تابع انرژی (تابع لاگرانژین $L = U_{max} + W_{max} - T_{max}$) را تشکیل می‌دهیم (در حالتی که شکل مودها مقادیر دقیق باشند $L = 0$).

۷- انرژی جنبشی

جهت بررسی کماتش و میکرو صفحه مستطیلی نسبتاً ضمیمه به طول a ، عرض b و ضخامت یکنواخت h چنانچه u ، v و w به ترتیب جابجایی‌های ورق در راستای x_1 ، x_2 و x_3 فرض شوند، می‌توان انرژی جنبشی ورق را به شکل رابطه (۳۷) نوشت [۱۷]

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{\forall} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) d\forall \quad (37)$$

در رابطه بالا T انرژی جنبشی ورق، $d\forall = dx_1 dx_2 dx_3$ بیانگر حجم جزیی ورق و نماد (\cdot) به معنای مشتق زمانی است. با جایگذاری روابط (۱۵) تا (۱۷) در رابطه انرژی جنبشی با فرض حرکت هارمونیک و انتگرال‌گیری بر حسب x_3 در فاصله $-h/2$ تا $h/2$ داریم:

$$\begin{aligned} T_{max} &= \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^h \int_0^b \int_0^a [I_0 w^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 - 2I_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \varphi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \varphi_2 \right) + I_3 (\varphi_1 + \varphi_2) I_0 [u_0^2 + v_0^2] \\ &+ 2I_4 [\varphi_1 u_0 + \varphi_2 v_0] - 2I_5 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right) u_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right) v_0 \right]] dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (38)$$

که در رابطه (۳۸) داریم:

$$\begin{aligned} (I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (I, x_3^2, x_3 f(x_3), f^2(x_3), f(x_3), x_3) \end{aligned} \quad (39)$$

و T_{max} انرژی جنبشی ماکزیمم با فرض حرکت نوسانی آزاد است.

حاصل از مینیمم کردن تابع لاگرانژین را می‌توان به شکل ماتریس (۵۴) تشکیل داد:

$$([K] - \lambda_{mn}^2 [M])[A] = 0 \quad (54)$$

در رابط بالا $[K]$ بیانگر ماتریس سختی است که از رابطه $K = \frac{\partial U}{\partial a_i} \partial a_j$ و $[M]$ بیانگر ماتریس جرم است که از رابطه $K = \frac{\partial T}{\partial a_i} \partial a_j$ و بردار $[a]$ بیانگر ماتریس ضرایب ثابت است که به صورت رابطه (۵۵) تعریف می‌شود:

$$[a] = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] \quad (55)$$

در نهایت فرکانس طبیعی سیستم از برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس $([K] - \lambda_{mn}^2 [M])$ و بدست آوردن ریشه-های معادله مشخصه بدست خواهد آمد.

۱۰- شرایط تکیه گاهی

برای تحلیل کمانش میکرو صفحه نسبتاً ضخیم هدفمند مستطیلی با بکارگیری روش انرژی ریلی-ریتر از توابع کثیرالجهته‌ای کامل جهت تقریب توابع $u_0, v_0, w, \varphi_1, \varphi_2$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^i u_{ij} \tilde{f}(x_1^i x_2^{(i-j)}) e^{I\lambda t} \quad (56)$$

$$v_0 = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^i v_{ij} \tilde{f}(x_1^i x_2^{(i-j)}) e^{I\lambda t} \quad (57)$$

$$w = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^i w_{ij} \tilde{f}(x_1^i x_2^{(i-j)}) e^{I\lambda t} \quad (58)$$

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^i \varphi_{1ij} \tilde{f}(x_1^i x_2^{(i-j)}) e^{I\lambda t} \quad (59)$$

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^i \varphi_{2ij} \tilde{f}(x_1^i x_2^{(i-j)}) e^{I\lambda t} \quad (60)$$

در روابط (۵۶) تا (۶۰)، $I = \sqrt{-1}$ و n تعداد جملات سری است که به صورت رابطه (۶۱) تعریف می‌شود:

$$n = \frac{(i+1)(i+2)}{2} - j \quad (61)$$

و $\{u_n, v_n, w_n, \varphi_{1n}, \varphi_{2n}\}$ ضرایب خطی غیر معین و \tilde{f} تابع اساسی است که شرایط سینماتیکی در مرزها را ارضا می‌کند و به صورت رابطه (۶۲) تعریف می‌شود.

$$\tilde{f} = x_1^{G_1} x_2^{G_2} (x_1 - a)^{G_3} (x_1 - a)^{G_4} \quad (62)$$

در رابطه بالا مولفه‌های G_1, G_2, G_3, G_4 برای w به-صورت مقابل تعریف می‌گردند: $G_1 = 0, 1, 2$ وقتی تکیه‌گاه

(۴۷)

$$\chi_{23} = \frac{I}{4} \left[f(x_3) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial^2 f(x_3)}{\partial x_3^2} \varphi_1 + \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \right) \right] \quad (48)$$

$$m_{ij} = \frac{E(z)}{I + \mathcal{G}} l^2 \chi_{ij} \quad (49)$$

که در رابطه (۴۹)، l پارامتر مقیاس طول ماده است. با جایگذاری روابط (۱۹) تا (۲۸) و روابط (۴۳) تا (۴۹) در رابطه (۵۰) و انتگرال‌گیری بر حسب x_3 در فاصله $-h/2$ تا $h/2$ بیشینه انرژی پتانسیل سیستم بدست می‌آید.

$$([K] - \lambda_{mn}^2 [M])[A] = 0 \quad (50)$$

۹- کار انجام شده توسط نیروی معادل تنش صفحه‌ای اولیه اعمالی بر لبه‌های ورق

کار انجام شده به وسیله برآیند نیروهای ناشی از وجود تنش-های صفحه‌ای N_1 در امتداد محور x و N_2 در امتداد محور y عبارت است از [۱۷]:

$$W_{max} = \frac{I}{2} \iint_{0^a}^{b^b} \left[N_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + N_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] dy dx \quad (51)$$

با جایگذاری روابط (۳۸)، (۴۰) و (۵۱) در رابطه (۵۲)، تابع لاگرانژین بدست خواهد آمد.

$$L = U_{max} + W_{max} - T_{max} \quad (52)$$

حال باید تابع باقی‌مانده (لاگرانژین) را مینیمم نماییم که نحوه مینیمم کردن تابع لاگرانژین را می‌توان بصورت رابطه (۵۳) ارائه نمود:

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} \partial a_1 + \frac{\partial L}{\partial a_2} \partial a_2 + \frac{\partial L}{\partial a_3} \partial a_3 + \dots + \frac{\partial L}{\partial a_n} \partial a_n \quad (53)$$

در رابطه (۵۳)، a_n ها ضرایب مجهول و مستقل می‌باشند. بنابراین شرط برقراری رابطه (۵۲) آن است که $\frac{\partial L}{\partial a_i} \partial a_i = 0$ باشد که با اعمال این شرط به تعداد ضرایب مجهول a_n ها معادله مستقل حاصل می‌شود و با حل معادلات مذکور مقادیر فرکانسی و a_n ها بدست می‌آیند. معادلات مستقل

در جدول ۲، بار بحرانی کمانش بی‌بعد ($\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}$) حاصل از روش ریلی ریتز در این مقاله با نتایج حاصل از مرجع [۲۵] برای میکرو صفحه تابعی مدرج مربعی تحت نیروهای دو محوره ($\beta_1 = -1$ و $\beta_2 = -1$) و تک محوره ساده ($\beta_1 = -1$ و $\beta_2 = 0$) با شرایط مرزی چهارطرف تکیه‌گاه ساده (SSSS) به ازای مقادیر مختلف نسبت طول به ضخامت (a/h)، و مقادیر مختلف نسبت طول به عرض (a/b) بر اساس تئوری‌های تغییر شکل برشی نمایی نمایش داده شده است. خواص میکرو صفحه تابعی مدرج برای تحلیل کمانش به روش ریلی ریتز در این مقاله به صورت جدول زیر است:

جدول ۱- خواص میکرو صفحه تابعی مدرج

Material	E(Gpa)	θ	ρ (kg/m ³)
Metal	1.44	0.38	1.22×10^3
Ceramic	14.4	0.38	12.2×10^3

طول میکرو صفحه نیز برابر $l = 17.6 \times 10^{-6}$ است. با مقایسه نتایج حاصل از تحلیل کمانش میکرو صفحه تابعی مدرج به روش ریلی ریتز بر اساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی در این مقاله با نتایج حاصل از حل ناور بر اساس تئوری میدلین در مرجع [۲۵] مشاهده می‌شود، روش ریلی ریتز مقادیر بار بحرانی کمانش را بیشتر از مقدار بدست آمده از حل دقیق (تئوری میدلین) برآورد می‌نماید، زیرا توابع تقریب سبب ایجاد قید سیستم گردیده است که باعث افزایش سختی سیستم می‌شود. به عبارت دیگر، در روش ریلی ریتز برای تخمین رفتار دینامیکی سیستم از سری‌های نامحدود استفاده می‌گردد، با محدود کردن تعداد جملات به جای جملات نامتناهی، درجات آزادی سیستم به درجات آزادی محدود تبدیل می‌شود، این محدود کردن بدین معناست که ترم‌های درجه بالاتر سری نادیده گرفته شود یا به عبارتی قیدی در سیستم ایجاد شده است که باعث افزایش سختی سیستم می‌شود.

ورق در مختصات $x_1 = 0$ به ترتیب آزاد، ساده و گیردار باشد. مشابه همین روش برای به دست آوردن مولفه‌های G_2 ، G_3 و G_4 وقتی تکیه‌گاه ورق در مختصات $x_1 = a$ ، $x_2 = 0$ ، $x_2 = b$ آزاد، ساده و گیردار باشد بکار گرفته می‌شود. برای توابع $u_0, v_0, w_0, \varphi_1, \varphi_2$ مولفه $G_1 = 0$ وقتی تکیه‌گاه ورق در مختصات $x_1 = 0$ آزاد و $G_1 = I$ وقتی تکیه‌گاه ورق در مختصات $x_1 = 0$ ساده یا گیردار باشد. مشابه همین روش برای به دست آوردن مولفه‌های G_2 ، G_3 و G_4 وقتی تکیه‌گاه ورق در مختصات $x_1 = a$ ، $x_2 = 0$ ، $x_2 = b$ آزاد، ساده و گیردار باشد، بکار گرفته می‌شود.

پس از انتخاب توابع اساسی برای شرایط مرزی مورد نظر اکنون توابع تقریبی که برای $u_0, v_0, w_0, \varphi_1, \varphi_2$ انتخاب کرده‌ایم، در تابع لاگرانژین قرار می‌دهیم و تابع لاگرانژین را بر اساس این توابع محاسبه می‌کنیم. جهت مینیم کردن لاگرانژین باید از L نسبت به ضرایب نامعین $u_n, v_n, w_n, \varphi_1, \varphi_2$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم. در این مرحله برای تعیین نیروی کمانش، فرکانس طبیعی سیستم را برابر صفر قرار داده و ماتریس مورد نظر فقط تابعی از N (بار بحرانی کمانش) خواهد بود که با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس مورد نظر، نیروی کمانش پیدا خواهد شد.

۱۱- مقایسه نتایج حاصله با نتایج ارائه شده در

مراجع و ارائه نتایج جدید

در این قسمت ابتدا جهت اعتبار سنجی اساس این مقاله و تأیید صحت پاسخ بدست آمده از حل ریلی ریتز، نتایج عددی حاصل با نتایج ارائه شده در مراجع معتبر مقایسه گردیده است و سپس به تحلیل نتایج جدید کمانش میکرو صفحه تابعی مدرج پرداخته شده است. در این قسمت پارامترهای مختلف از قبیل شرایط مرزی، ابعاد هندسی و اندیس توانی روی کمانش، مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در این بخش میکرو صفحه تابعی مدرج هدفمند مستطیلی که تحت نیروهای محوری $N_1 = \beta_1 N_{cr}$ و $N_2 = \beta_2 N_{cr}$ در راستای محورهای x_1 و x_2 واقع شده است، مورد تحلیل قرار می‌گیرد. برای نیروی تک محوره $\beta_2 = 0$ و $\beta_1 = -1$ و برای نیروی دو محوره $\beta_1 = -1$ و $\beta_2 = -1$ در نظر گرفته شده است.

جدول ۲- بار بحرانی کمانش بی بعد ($\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}$) ورق تابعی مدرج مربعی و میکرو صفحه تابعی مدرج مربعی تحت نیروهای دو محوره و تک محوره با شرایط مرزی چهارطرف تکیه‌گاه ساده (SSSS)

$g = 10$		$g = 1$		$g = 0$		l/h	a/h
نمایی	میدلین [۲۵]	نمایی	میدلین [۲۵]	نمایی	میدلین [۲۵]		
$(\beta_1 = -1 \text{ و } \beta_2 = -1)$							
2.3761	2.9979	7.1698	6.8576	15.8045	15.3228	0	5
12.1361	11.7042	34.5366	34.4981	64.1362	63.8913	1	
3.6684	3.5853	8.5694	7.8273	18.4333	18.0746	0	10
15.8326	15.1152	43.9125	43.3274	82.2337	81.8269	1	
3.9115	3.7700	8.2485	8.1142	19.4612	18.9243	0	20
0.3011	0.3095	0.1060	0.1092	0.0553	0.0574	1	
$(\beta_1 = -1 \text{ و } \beta_2 = 0)$							
6.3120	5.9959	14.1402	13.7153	30.9980	30.6456	0	5
23.7219	23.4084	69.5163	68.9962	128.121	127.782	1	
7.9912	7.1707	16.2118	15.6547	36.5115	36.1492	0	10
30.4460	30.2304	87.3100	86.6547	163.809	163.653	1	
7.9367	7.5400	16.6301	16.2284	37.4201	37.8485	0	20
33.3317	32.7354	93.1622	92.8210	177.052	176.313	1	

جدول ۳- بار بحرانی کمانش بی بعد ($\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}$) برای ورق تابعی مدرج و میکرو صفحه تابعی مدرج (AL/AL_2O_3) تحت نیروهای دو محوره ($\beta_1 = -1 \text{ و } \beta_2 = -1$) و تک محوره ($\beta_1 = -1 \text{ و } \beta_2 = 0$) با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی نمایی ($a/h = 10$) تحت شرایط مرزی مختلف (CCCC)

$(\beta_1 = -1 \text{ و } \beta_2 = 0)$			$(\beta_1 = -1 \text{ و } \beta_2 = -1)$			l	a/b	شرایط مرزی
$g = 10$	$g = 1$	$g = 0$	$g = 10$	$g = 1$	$g = 0$			
6.6037	14.8141	34.8991	6.1827	14.4404	17.6018	0	0.2	
33.0535	92.1844	200.416	29.6313	81.6984	167.345	17.6×10^{-6}		
7.6952	17.9884	40.6385	6.1959	14.6061	20.1393	0	0.5	cccc
37.5357	104.395	198.542	30.1509	83.7615	170.2711	17.6×10^{-6}		
14.6808	35.6312	41.5015	7.9323	19.0662	38.3915	0	1	
81.2734	226.302	426.781	43.7867	122.512	232.516	17.6×10^{-6}		

مدرج تحت نیروی تک محوره قرار گرفته است و بار بحرانی کمانش با استفاده از تئوری کلاسیک بدست آمده است؛ همچنین حالت ۲، بیانگر وضعیتی است که میکرو صفحه مورد مطالعه تحت نیروی دو محوره قرار گرفته است و بار بحرانی کمانش با استفاده از تئوری کلاسیک محاسبه شده است.

حالت ۳ و ۴ نیز، بیانگر شرایطی هستند که میکرو صفحه تابعی مدرج به ترتیب تحت نیروی تک محوره و دو محوره قرار گرفته است و بار بحرانی کمانش با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده بدست آمده است.

در جداول ۴ تا ۷ و در شکل‌های ۲ تا ۴ بار بحرانی کمانش بی‌بعد ($\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}$) برای میکرو صفحه تابعی مدرج (AL/AL_2O_3) تحت شرایط مرزی (SCSC) و با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی نمایی برای پارامترهای مختلف از قبیل، نسبت طول به عرض (a/b) و نسبت طول به ضخامت (a/h) و اندیس توانی (g) به ازای پارامتر مقیاس طول ($l = 17.6 \times 10^{-6}$) و شرایط دمایی مختلف نمایش داده شده است؛ همچنین نتایج موجود در جداول ۴ تا ۶ بر اساس خواص ارائه شده در جدول ۱ است. حالت ۱ بیانگر شرایطی است که میکرو صفحه تابعی

جدول ۴- بار بحرانی کمانش بی‌بعد ($\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}$) برای میکرو صفحه تابعی مدرج با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی نمایی تحت شرایط مرزی (SCSC) در دمای $T_t = 300^\circ C$

$T_t = 300^\circ C$		a/h	a/b	l
g = 10	g = 0			
3.66541	4.32861	5		
2.08308	3.85572			
8.23197	11.503			
4.69152	6.53716			
4.99277	7.04977	10	1	
2.82509	4.07584			
23.2445	32.6072			
13.2612	18.6422			
2.55012	3.59335	5		$17.6 * 10^{-6}$
2.0767	2.83694			
5.73917	8.11933			
4.68796	6.6308			
3.46352	4.46044	10	0.5	
2.78977	4.51894			
16.9523	23.548			
13.2859	18.7804			
2.31127	3.14132	5		
2.13905	2.93995			
5.31277	7.35895			
4.75681	6.60052			
3.08206	4.01848	10	0.2	
2.79807	3.79957			
16.0507	22.377			
13.8576	19.4138			

جدول ۵- بار بحرانی کماتش بی بعد ($\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}$) برای میکرو صفحه تابعی مدرج تحت نیروهای دو محوره کلاسیک و کوپل و تک محوره کلاسیک و کوپل با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی نمایی تحت شرایط مرزی (SCSC) در دمای $T_t = 400^\circ\text{C}$

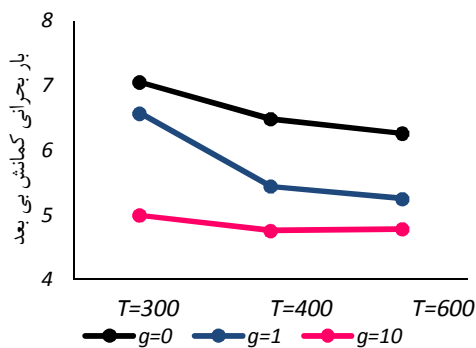
$T_t = 400^\circ\text{C}$		a/h	a/b	l
g = 10	g = 0			
3.53982	4.94355	5		1
2.00308	2.79045			
8.02373	11.0985			
4.55913	6.3219			
4.75737	6.48049	10		$17.6 * 10^{-6}$
2.72506	3.68271			
22.5895	31.5097			
12.8971	18.0694			
2.44731	3.39602	5		
2.02058	2.78016			
5.57926	7.7606			
4.55887	6.32163			
3.2686	4.47575	10	0.5	
2.71553	3.69467			
16.4716	23.0649			
12.9153	18.0607			
2.25074	3.10407	5		
2.08015	2.87015			
5.16953	7.20273			
4.62345	6.41576			
3.01184	3.94472	10	0.2	
2.72674	3.72231			
15.6426	21.7936			
13.476	18.849			

همچنین ملاحظه می‌شود، پارامتر بی بعد بار بحرانی کماتش با افزایش پارامتر نسبت طول به ضخامت (a/h) ورق (نسبت طول به عرض a/b) ثابت، افزایش می‌یابد. این نتیجه نیز دلالت بر آن دارد که بین دو ورق با طول a عرض b و شرایط مرزی یکسان، ورقی که دارای ضخامت h کمتری باشد، بار بحرانی کماتش بی بعد بیشتری دارد. بار بحرانی بی بعد کماتش در شرایطی که نسبت طول به ضخامت (a/h) و طول به عرض (a/b) ثابت باشد، با افزایش اندیس توانی کاهش می‌یابد. همچنین ملاحظه می‌شود، در شرایطی که نسبت طول به ضخامت (a/h) و طول به عرض (a/b) و اندیس توانی ثابت در نظر گرفته شود، بار بحرانی بی بعد کماتش تحت نیروهای کلاسیک تک محوره و دو محوره کمتر

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۳ و جداول ۴ تا ۶ ملاحظه می‌گردد، پارامتر بی بعد بار بحرانی کماتش با افزایش پارامتر نسبت طول به عرض (a/b) ورق (نسبت طول به ضخامت a/h) ثابت، افزایش می‌یابد. این نتیجه دلالت بر آن دارد که بین دو ورق با طول a ، ضخامت h و شرایط مرزی یکسان، ورقی که دارای عرض b کمتری باشد، بار بحرانی کماتش بی بعد بیشتری دارد؛ زیرا با کاهش عرض در طول ثابت درجه آزادی ورق کاهش می‌یابد که این امر سبب افزایش سفتی ورق و در نتیجه افزایش فرکانس ورق می‌شود. همچنین از جداول ۴ تا ۶ ملاحظه می‌شود، مقادیر بار بحرانی بی بعد کماتش برای بارگذاری دو محوره کمتر از مقادیر بار بحرانی بی بعد کماتش برای بارگذاری تک محوره است؛

جدول ۶- بار بحرانی کمانش بی‌بعد ($\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}$) برای میکرو صفحه تابعی مدرج با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی نمای تحت شرایط مرزی (SCSC) در دمای $T_t = 60^\circ\text{C}$

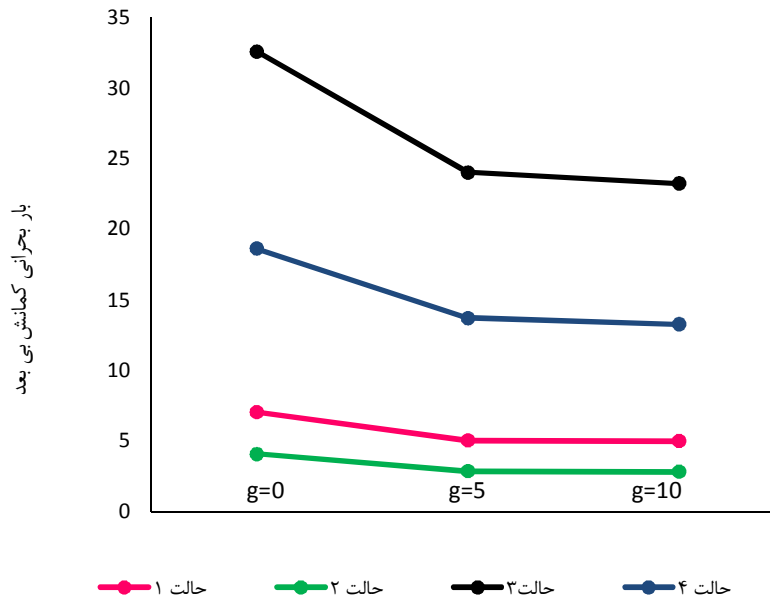
$T_t = 600^\circ\text{C}$		a/h	a/b	l
g = 10	g = 0			
3.35431	4.76293	5	1	17.6 * 10 ⁻⁶
1.89237	2.71134			
7.62401	10.7076			
4.32491	6.10835			
4.77959	6.25908	10	1	17.6 * 10 ⁻⁶
2.78143	3.51779			
21.3782	30.4666			
12.2269	17.3954			
2.34231	3.27756	5	0.5	17.6 * 10 ⁻⁶
1.92081	2.69229			
5.30062	7.49371			
4.32905	6.10417			
3.07218	4.28694	10	0.5	17.6 * 10 ⁻⁶
2.58958	3.57553			
15.6397	22.2462			
12.2464	17.4207			
2.12638	2.9899	5	0.2	17.6 * 10 ⁻⁶
1.98056	2.76842			
4.9123	6.94031			
4.38818	6.19445			
2.7763	3.86375	10	0.2	17.6 * 10 ⁻⁶
2.601	3.59242			
14.7972	21.0047			
12.7725	18.174			



شکل ۲- تغییر بار بحرانی کمانش بی‌بعد $\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}$ نسبت به دما با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی نمای تحت شرط مرزی SCSC

از حالتی است که تحت نیروهای کوپل تک محوره و دو محوره است. حال به تأثیر دما می‌پردازیم. همانطور که در شکل ۲ ملاحظه می‌شود، در شرایطی که نسبت طول به ضخامت (a/h) و طول به عرض (a/b) و اندیس توانی ثابت در نظر گرفته شود با افزایش دما بار بحرانی بی‌بعد کمانش کاهش خواهد یافت.

همانطور که در شکل ۳ و ۴ ملاحظه می‌شود، بار بحرانی کمانش سیستم با افزایش ضریب نسبت حجمی توانی g کاهش می‌یابد؛ زیرا با افزایش این ضریب، خواص ورق به خواص فلز نزدیک‌تر می‌شود و سختی کاهش می‌یابد که این امر سبب کاهش بار بحرانی سیستم می‌شود.

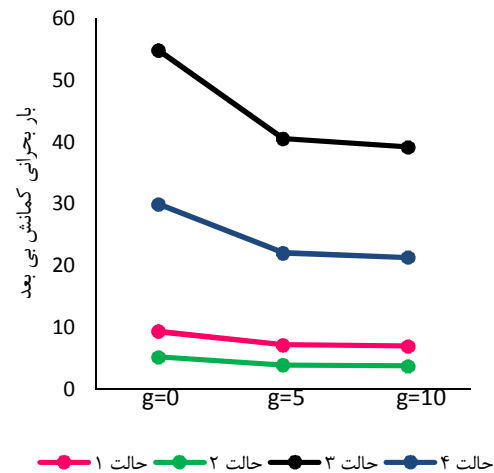


شکل ۳- تغییر بار بحرانی کمانش بی بعد $\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}$ نسبت به اندیس توانی (g) با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی نمایی تحت شرط مرزی SCSC

قید هندسی باشد. با افزایش قید هندسی (قیود هندسی روی مرزها شامل، مقید نمودن جابجایی‌های درون صفحه‌ای، جابجایی عرضی، شیب‌های لبه و شعاع‌های انحنا می‌باشد. با این توصیف شرط مرزی گیردار دارای بیشترین قید هندسی سپس شرط مرزی ساده و در نهایت شرط مرزی آزاد دارای کمترین قید هندسی می‌باشد) در لبه‌ها مقدار بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد؛ بنابراین با افزایش قید روی لبه‌ها، صلبیت خمشی ورق افزایش می‌یابد که سبب افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود.

۱۲- جمع بندی و نتیجه گیری

بر اساس تحلیل کمانش آزاد وابسته به دما و وابسته به ابعاد ورق‌های تابعی مدرج ساخته شده از فلز و سرامیک بر اساس تئوری جا به جایی تغییر شکل برشی نمایی با بکارگیری تئوری تنش کوپل اصلاح شده در این مقاله و با توجه به جداول ارائه شده در این فصل نتایج زیر قابل استنتاج است:



شکل ۴- تغییر بار بحرانی کمانش بی بعد $\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}$ نسبت به اندیس توانی (g) با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی نمایی تحت شرط مرزی CCCC

با توجه به جدول ۷، ملاحظه می‌گردد که کمترین مقدار بار بحرانی کمانش مربوط به ورقی است که دارای کمترین

جدول ۷- تأثیر شرایط مرزی مختلف و اندیس توانی متفاوت در شرایطی که نسبت طول به ضخامت (a/h)، نسبت طول به عرض (a/b) و دما ثابت است با توجه به مرجع [۲۶]

$T_c = 300, a/h = 10, a/b = 1$			شرایط مرزی
$g = 10$	$g = 5$	$g = 0$	
3.14497	3.26024	4.25347	حالت ۱
1.57251	1.63015	2.12677	حالت ۲
13.1672	13.6289	18.3617	حالت ۳
6.58373	6.81461	9.18105	حالت ۴
3.70709	3.83742	5.02587	حالت ۱
2.03338	2.10477	2.757	حالت ۲
16.088	16.648	22.4371	حالت ۳
8.91274	9.22288	12.4316	حالت ۴
4.99277	5.04999	7.04977	حالت ۱
2.82509	2.86636	4.07584	حالت ۲
23.2445	24.041	32.6072	حالت ۳
13.2612	13.7258	18.6422	حالت ۴
1.79753	1.85927	2.43852	حالت ۱
0.838601	0.869415	1.13338	حالت ۲
12.049	12.4655	16.8301	حالت ۳
5.09067	5.26825	7.10333	حالت ۴
1.59507	1.65059	2.1608	حالت ۱
0.752107	0.780334	1.01523	حالت ۲
11.9732	12.3859	16.7254	حالت ۳
4.63347	4.79474	6.46621	حالت ۴
1.81367	1.87614	2.46058	حالت ۱
0.899105	0.931337	1.21652	حالت ۲
14.2213	14.7116	19.8188	حالت ۳
5.99953	6.20752	8.37541	حالت ۴
6.96184	7.16369	9.34325	حالت ۱
3.7591	3.87157	5.21421	حالت ۲
39.1928	40.5849	54.9237	حالت ۳
21.3158	22.0458	29.9373	حالت ۴
4.6092	4.76688	6.16771	حالت ۱
2.43412	2.51764	3.25253	حالت ۲
22.4655	23.2441	31.3597	حالت ۳
11.9711	12.3855	16.7169	حالت ۴
2.28027	2.35641	3.07311	حالت ۱
1.41973	1.46804	1.8916	حالت ۲
17.0104	17.5967	23.7939	حالت ۳
10.5445	10.9076	14.7369	حالت ۴
0.757767	0.783305	0.9232	حالت ۱
0.453803	0.469137	0.694672	حالت ۲
4.8644	5.03143	6.80093	حالت ۳
2.85933	2.95756	3.99824	حالت ۴

2.67199	2.75965	3.90797	حالت ۱	<i>cfcs</i>
2.03013	2.097	2.77099	حالت ۲	
20.5239	21.2316	28.7216	حالت ۳	
15.0526	15.5709	21.0563	حالت ۴	
2.63433	2.72335	3.59052	حالت ۱	<i>cfcf</i>
-0.334476	2.03575	2.68499	حالت ۲	
18.7244	19.372	26.2036	حالت ۳	
15.7526	15.4672	20.7077	حالت ۴	
0.315653	0.327257	0.426377	حالت ۱	<i>ssff</i>
0.163294	0.169332	0.220521	حالت ۲	
2.63075	2.72194	3.68828	حالت ۳	
1.326	1.37202	1.85839	حالت ۴	
2.28516	2.36181	3.10824	حالت ۱	<i>cfsf</i>
1.35027	0.410471	-0.391468	حالت ۲	
15.0288	15.5464	21.0171	حالت ۳	
9.74246	10.0777	13.6169	حالت ۴	
0.474056	0.489993	0.643076	حالت ۱	<i>cfff</i>
0.197824	0.204573	0.26749	حالت ۲	
3.94144	4.07669	5.52678	حالت ۳	
1.25599	1.29901	1.75422	حالت ۴	
5.85194	5.98722	7.87271	حالت ۱	<i>sccc</i>
3.13353	3.21496	4.22429	حالت ۲	
29.512	30.4187	41.3982	حالت ۳	
15.857	16.4072	22.1942	حالت ۴	
2.70535	2.79405	0.130169	حالت ۱	<i>cfcc</i>
2.05172	2.05172	0.121703	حالت ۲	
20.5874	20.5874	28.8059	حالت ۳	
16.193	16.193	22.6522	حالت ۴	
2.23557	2.23557	3.0411	حالت ۱	<i>sfcs</i>
1.40877	1.40877	1.91179	حالت ۲	
15.8776	15.8776	22.2051	حالت ۳	
9.78021	9.78021	13.6682	حالت ۴	
0.722597	0.722597	0.979584	حالت ۱	<i>csff</i>
0.324039	0.324039	0.438728	حالت ۲	
4.81601	4.81601	6.73292	حالت ۳	
2.43486	2.43486	3.41014	حالت ۴	

۱- آزادی ورق کاهش می‌یابد، کاهش درجه آزادی سبب افزایش صلبیت خمشی ورق می‌گردد.

۲- روش ریلی ریتز مقادیر بار بحرانی کمانش را بیشتر از مقدار بدست آمده از حل دقیق (تئوری میدلین) برآورد می‌کند، زیرا توابع تقریب سبب ایجاد قید سیستم گردیده است که باعث افزایش سختی سیستم می‌شود. به عبارت دیگر در

۱- پارامتر بار بحرانی بی‌بعد کمانش با افزایش پارامتر نسبت طول به عرض (a/b) ورق (نسبت طول به ضخامت (a/h) ثابت)، افزایش می‌یابند. این نتیجه دلالت بر آن دارد که بین دو ورق با طول a ، ضخامت h و شرایط مرزی یکسان، ورقی که دارای عرض b کمتری باشد، بار بحرانی بی‌بعد بیشتری دارد؛ زیرا با کاهش عرض در طول ثابت درجه

- [6] Xiang Y, Wang CM, Liew KM, Kitipornchai S (1993) Mindlin plate buckling with pre buckling in-plane deformation. *J Eng Mech* 119(1): 1-18.
- [7] Matsunaga H (2000) Vibration and stability of thick plates on elastic foundations. *J Eng Mech* 126(1): 27-34.
- [8] Hosseini-Hashemia Sh, Khorshidi K, Amabilibi M (2008) Exact solution for linear buckling of rectangular Mindlin plates. *J Sound Vib* 315: 318-342.
- [9] Sayyad AS, Ghugal YM (2012) Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *Appl Comput Mech* 6: 65-82.
- [10] Khorshidi K, Farhadi S (2013) Free vibration analysis of a laminated composite rectangular plate in contact with a bounded fluid. *Compos Struct* 104: 176-186.
- [11] Dozio L (2011) On the use of the Trigonometric Ritz method for general vibration analysis of rectangular Kirchhoff plates. *Thin Wall Struct* 49(1): 129-144.
- [12] Tounsi A, Houari MSA, Benyoucef S, Bedia EAA (2013) A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerosp Sci Technol* 24(1): 209-220.
- [13] Alinaghizade F, Shariati M, Fish J (2017) Bending analysis of size-dependent functionally graded annular sector microplates based on modified couple stress theory. *Appl Math Model* 1(44): 540-556.
- [14] Kharde SB, Mahale AK, Bhosale KC, Thorat SR (2013) Flexural vibration of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *IJETAE* 3(1): 369-374.
- [15] Alinaghizade F, Shariati M (2015) Buckling analysis of variable thickness radially functionally graded annular sector plates resting on two-parameter elastic foundation by GDQ method. *Int J Appl Mech* 7(06): 1550083.
- [16] Hosseini-Hashemi Sh, Taher HRD, Akhavan H, Omid M (2010) Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Appl Math Model* 34(5): 1276-1291.
- [17] Khorshidi K, Fallah A (2016) Buckling analysis of functionally graded rectangular nano-plate based on nonlocal exponential shear deformation theory. *Int J Mech Sci* 113: 94-104.
- [18] Khorshidi K, Asgari T, Fallah A (2016) Free vibrations analysis of functionally graded rectangular na-noplates based on nonlocal exponential shear deformation theory. *Mech Adv Compos Struct* 2: 79-93.

روش ریلی ریتز برای تخمین رفتار دینامیکی سیستم از سری‌های نامحدود استفاده می‌شود، با محدود کردن تعداد جملات به جای جملات نامتناهی، درجات آزادی سیستم به درجات آزادی نامحدود تبدیل می‌شود، این محدود کردن بدین معناست که ترم‌های درجه بالاتر سری نادیده گرفته شود یا به عبارتی، قیدی در سیستم ایجاد شده است که باعث افزایش سختی سیستم می‌شود.

۳- بار بحرانی کمانش بی‌بعد دو محوره کلاسیک و کوپل کمتر از بار بحرانی کمانش بی‌بعد تک محوره کلاسیک و کوپل برآورد می‌شود؛ زیرا انرژی لازم جهت ایجاد کمانش در ورق تحت نیروی محوری از دو راستا کمتر از انرژی لازم مورد نیاز جهت ایجاد کمانش در ورق تحت نیروی محوری از یک راستا است.

۴- با توجه به جنس فلز و سرامیک تشکیل دهنده ورق تابعی مدرج مورد تحلیل، با افزایش ضریب نسبت حجمی توانی (g) بار بحرانی کمانش سیستم ممکن است افزایش یا کاهش یابد که این امر به مقادیر مدول یانگ (E) و چگالی (ρ) فلز و سرامیک تشکیل دهنده ورق تابعی مدرج بستگی دارد. در این مقاله با توجه به جنس ماده انتخابی، بار بحرانی کمانش سیستم با افزایش ضریب نسبت حجمی توانی g کاهش می‌یابد؛ زیرا با افزایش این ضریب، خواص ورق به خواص فلز نزدیک‌تر می‌شود و سختی کاهش می‌یابد که این امر سبب کاهش بار بحرانی سیستم می‌شود.

۱۳- مراجع

- [1] Cheung YK, Zhou D (2003) Vibration of tapered Mindlin plates in terms of static Timoshenko beam functions. *J Sound Vib* 260(4): 693-709.
- [2] Junhong P, Siegmund T, Mongeau L (2003) Analysis of the flow-induced vibrations of viscoelastically supported rectangular plates. *J Sound Vib* 261(2): 225-245.
- [3] Xiang Y, Wei GW (2004) Exact solutions for buckling and vibration of stepped rectangular Mindlin plates. *Int J Solids Struct* 41(1): 279-294.
- [4] Nieves FJ, Gascón F, Bayón A (2004) Natural frequencies and mode shapes of flexural vibration of plates: Laser-interferometry detection and solutions by Ritz's method. *J Sound Vib* 278(3): 637-655.
- [5] Yunshan GWW, Xiang Y (2005) DSC-Ritz method for the free vibration analysis of Mindlin plates. *Int J Numer Meth Eng* 62(2): 262-288.

- [23] Natarajan S, Chakraborty Thangavel M, Bordas S, Rabczuk T (2012) Size dependent free flexural vibration behavior of functionally graded nanoplates. *Comp Mater Sci* 65: 74-80.
- [24] Erdogan F, Delate F (1983) The crack problem in a specially orthotropic shell with double curvature. *Eng Fract Mech* 18: 529-544.
- [25] Thai HT, Choi DH (2013) Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory. *Compos struct* 95: 142-153
- [26] Khorshidi K, Fallah A (2017) Free vibration analysis of size-dependent, functionally graded, rectangular nano/micro-plates based on modified nonlinear couple stress deformation plate theories. *Mech Adv Compos Struct* 4: 127-137.
- [19] Alinaghizade F, Kadkhodayan M (2013) Investigation of nonlinear bending analysis of moderately thick functionally graded material sector plates subjected to thermomechanical loads by the GDQ method. *J Eng Mech* 140(5): 04014012.
- [20] Kim YW (2005) Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates. *J Sound Vib* 284(3): 531-549.
- [21] Li Q, Iu VP, Kou KP (2009) Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material in thermal environment. *J Sound Vib* 324(3): 733-750.
- [22] Adineh M, Kadkhodayan M (2017) Three dimensional thermo-elastic analysis and dynamic response of a multi-directional functionally graded skew plate on elastic foundation. *Composite Part B: Engineering* 125: 227-240.