



## بررسی ارتعاش ناشی از عبور جرم متحرک از روی ورق ضخیم با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد مُفسّر مرزی

علی نیکخو<sup>۱\*</sup>، المیرا ربانی<sup>۲</sup> و مطهره نیاز<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشیار، مهندسی عمران-سازه، دانشگاه علم و فرهنگ، تهران

<sup>۲</sup> کارشناسی ارشد، عمران-سازه، دانشگاه علم و فرهنگ، تهران

<sup>۳</sup> دانشجوی دکتری، عمران-سازه، دانشگاه علم و فرهنگ، تهران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۰۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۲۰

### چکیده

در این نوشتار پاسخ دینامیکی یک ورق مستطیلی ضخیم با لحاظ کردن تغییرشکل‌های برشی در طول ضخامت آن، تحت اثر یک جرم متحرک مطالعه می‌شود که بر مسیری مستقیم الخط و با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند. حل معادله حرکت در شرایط مرزی مختلف از طریق یک روش نیمه تحلیلی و با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد مُفسّر مرزی (Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials) (BCOPs)، صورت می‌پذیرد. اثرات ضخامت ورق، شرایط مرزی ورق، مقدار وزن و سرعت جرم متحرک روی پاسخ دینامیکی ورق، مورد بررسی قرار می‌گیرد. مقایسه نتایج بدست آمده با منابع موجود، نشان دهنده دقت قابل قبول روش به کار گرفته شده است؛ همچنین نتایج بدست آمده حاکی از اهمیت اینرسی بار متحرک در کنار تغییر شکل‌های برشی ورق بر رفتار دینامیکی آن است. اهمیت یافته‌های این تحقیق در سازه‌های پل با عرشه ورقی ضخیم که تحت اثر بارهای متحرک با بزرگای قابل توجه نسبت به وزن پل که با سرعت‌های بالا حرکت می‌کنند، نمود پیدا می‌کند.

**کلمات کلیدی:** تحلیل دینامیکی؛ ورق میندلین؛ ورق کیرشهف؛ جرم متحرک؛ چند جمله‌ای‌های متعامد مُفسّر مرزی.

## Dynamic Response of Thick Plates Under Excitation of Moving Mass with Utilizing BCOPs

A.Nikkhoo<sup>1,\*</sup>, E.Rabani<sup>2</sup>, M.Niaz<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Assoc. Prof., Civil. Eng., university of science and culture., Tehran, Iran.

<sup>2</sup> M. Sc, Civil. Eng., university of science and culture., Tehran, Iran.

<sup>3</sup> Ph.D. Student, Civil. Eng., university of science and culture., Tehran, Iran.

### Abstract

In this study, dynamic behavior of thick rectangular plates under a moving mass with constant velocity traversing the plate on a rectilinear path is investigated. A semi-analytical method with the aim of BCOPs (Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials) is utilized to tackle with the solution of motion equations for different boundary conditions of the plate while accounting for shear deformations. The effects of thickness and boundary conditions of plate and weight and velocity of the moving mass on the dynamic response of plate are scrutinized. The obtained results revealed the accuracy of the proposed method in comparison with the other researchers' results. The results also demonstrated the importance of the moving load inertia as well as the shear deformations of the host structures on its dynamic behavior. The importance of this study lies on the vibration of bridge-type structures with plate decks, where, the shear deformation of the base structure could be no more ignored, especially for heavy vehicles moving with high speeds.

**Keywords:** Dynamic Analysis; Mindlin Plate; Moving Mass; Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials (BCOPs)

## ۱- مقدمه

در ارتباط با چگونگی توزیع تنش برشی، دائل<sup>۳</sup> تئوری کلاسیک ورق را با فرض توزیع یکنواخت تنش برشی در راستای ضخامت ورق تصحیح و تأثیرات این فرض را اصلاح نمود [۳]. همچنین لوینسون<sup>۴</sup> یک تئوری براساس رویکرد تغییرمکان را فرمول بندی نمود که به ضریب تصحیح برشی نیاز ندارد [۴] و در ادامه یک تجدید نظر جهت اصلاح تئوری های تغییرشکل برشی نیز به وسیله قوگال و شیمی<sup>۵</sup> ارائه شده است [۵]. در پژوهشی سرنیواس<sup>۶</sup> و همکاران با بررسی یک ورق مستطیلی ضخیم، همگن، ایزوتروپیک و با شرایط تکیه گاهی ساده، راه حل دقیقی را برای ارتعاش آزاد و خمش این ورق استخراج کردند [۶ و ۷]. همچنین لوی<sup>۷</sup> برای نخستین بار یک تئوری تصحیح شده برای ورق ایزوتروپیک ضخیم، با استفاده از توابع شکل سینوسی با احتساب تأثیر تغییرشکل برشی پیشنهاد داد [۸]. اشتاین<sup>۸</sup> در پژوهش خود از توابع شکل مثلثاتی بر حسب ضخامت برای آنالیز ورق‌ها و تیرهای ورقه‌ای استفاده نمود که شرایط تنش آزاد برشی در بالا و پایین سطح در روش او برقرار نشده است [۹]. در سال ۲۰۱۳ سنجانوویچ<sup>۹</sup> و همکاران تئوری پیشرفته‌ای برای ارتعاشات ورق ضخیم ارائه دادند و در آن معادلات سه گانه ورق ضخیم که شامل سه مجهول اصلی یعنی، تغییرمکان خمشی، تغییرمکان برشی و زوایای چرخش است را به یک معادله کاهش دادند که تغییر مکان خمشی تنها مجهول اصلی می باشد [۱۰].

در بررسی مباحث مربوط به ارتعاش تیرها و ورق‌ها تحت اثر بارها یا جرم‌های متحرک به اهمیت زیاد این گونه مسائل از نقطه نظر مهندسی می‌توان پی برد؛ چرا که در این مسائل به نوعی رفتار سازه پل تحت اثر عبور وسایل نقلیه شبیه سازی می‌شود. در این خصوص، فرایب<sup>۱۱</sup> نتایج گسترده و دقیقی از ارتعاش سازه‌های مختلف تحت اثر بارهای متحرک

امروزه در علوم مختلف مهندسی، اعم از مکانیک، هوا فضا، سازه و ... از المان سازه‌ای ورق به طور گسترده استفاده می شود. یکی از انواع المان‌های ورقی، ورق‌های خمشی- برشی هستند که ممکن است از مواد ایزوتروپیک، اورتوتروپیک و یا کامپوزیت تشکیل شده باشند. در این ورق‌ها میزان تغییرمکان‌های قائم و برشی، بسیار حائز اهمیت است. دستیابی به درک صحیح از رفتار این المان‌های سازه‌ای، مستلزم توسعه تئوری‌های پالوده شده‌ای است که اثرات تغییر مکان‌های برشی و قائم را در آنالیز دینامیکی و سازه‌ای ورق‌ها به حساب آورده باشند. امروزه در بررسی ارتعاش ورق‌ها در مودهای بالا اثرات تغییر مکان برشی، نه تنها در ورق های ضخیم، بلکه در ورق‌های نازک نیز، بسیار مهم و شناخته شده است. تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول، نخستین بار توسط ریسنر<sup>۱</sup> و سپس میندلین، به عنوان تئوری‌های پیشگام در جهت در نظر گرفتن تأثیرات برش پیشنهاد شدند [۱ و ۲]. در ابتدا ریسنر پیشنهاد کرد که چرخش‌های عمود بر محور میانی صفحه در برش مسطح به عنوان متغیرهای مستقل در تئوری ورق‌ها در نظر گرفته شود [۲]. اما میندلین<sup>۲</sup> در سال ۱۹۵۱، فرض ریسنر را ساده کرد و رویکردی براساس تغییرمکان با همان تقریب مشابه را به کار گرفت [۱]. در تئوری میندلین، تنش برشی در راستای ضخامت ورق ثابت فرض شده است که در واقعیت این امر صحت ندارد و این فرض شرایط سطح آزاد تنش برشی را نقض می‌کند. در این تئوری هم تأثیرات تغییرشکل برشی و هم چرخش لحاظ شده است که هر دوی این پارامترها روی فرکانس تأثیر گذارند؛ همچنین تئوری میندلین روابط بین تنش‌های برشی و کرنش‌های برشی را به وسیله ضریب تصحیح برشی اصلاح می‌کند که مقدار این ضریب یکتا نیست و به پارامترهایی نظیر، نوع مصالح، شکل، بارگذاری و شرایط مرزی المان نیز وابسته است.

<sup>3</sup> Donnell<sup>4</sup> Levinson<sup>5</sup> Ghugal<sup>6</sup> Srinivas<sup>7</sup> Levy<sup>8</sup> Stein<sup>9</sup> Senjanovic<sup>10</sup> Fryba<sup>1</sup> Reissner<sup>2</sup> Mindlin

دادند که از اثرات قابل توجه تغییر شکل‌های ناشی از برش در این ورق‌ها نمی‌توان چشم‌پوشی کرد [۲۰]. در پژوهش پیش رو به تحلیل استاتیکی و دینامیکی یک ورق ایزوتروپیک همگن با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد مفسر مرزی (BCOPs) پرداخته شده است که در آن تأثیر تنش و کرنش برشی نیز لحاظ گردیده است. با استفاده از روش حل نیمه تحلیلی پیشنهاد شده که برای تمامی شرایط مرزی ورق قابل تعمیم است می‌توان به سادگی پاسخ دینامیکی ورق‌ها تحت اثر جرم متحرک را با لحاظ نمودن اثرات تغییر شکل‌های برشی مورد واکاوی قرار داد، در حالی که در استفاده از سایر روش‌های نیمه تحلیلی مانند حل مسئله به روش بسط توابع ویژه [۲۰] به راحتی نمی‌توان انواع شرایط مرزی را اعمال نمود. نتایج حاصله نشان می‌دهد که پاسخ دینامیکی صفحات کیرش‌هف و میندلین با تغییر ضخامت صفحه و سرعت جرم متحرک به میزان محسوسی متفاوت خواهد بود.

## ۲- معادلات حاکم

### ۲-۱- تعیین توابع شکل

تولید کردن توابع مستقل خطی با شرایط مرزی دلخواه با استفاده از BCOPs از ضرب دو تابع  $g(x,y)$  و  $f_i(x,y)$  به صورت رابطه (۱) شروع می‌شود [۲۱]:

$$F_i(x,y) = g(x,y)f_i(x,y), \quad i = 1,2,3, \dots$$

(۱)

که در آن  $g(x,y)$  مطابق رابطه زیر شرایط مرزی لازم را ارضا می‌کند:

$$g(x,y) = x^p(1-x)^q y^r(1-y)^s$$

به طوریکه شرایط مرزی لبه‌های ورق با اختصاص دادن اعداد ۰ و ۱ و ۲ به پارامترهای  $p,q,r,s$  اعمال می‌شود و  $f_i(x,y)$  از توابع خطی مستقل به شکل زیر انتخاب می‌شوند:

$$f_i(x,y) = x, y, x^2, 2xy, y^2, \dots$$

پس از محاسبه  $F_i(x,y)$  طی یک روش تحت عنوان گرم-اشمیت<sup>۱۲</sup>، توابع متعامد  $\phi_i(x,y)$  به شکل زیر تولید می‌شود:

را ارائه کرده است [۱۱]. در پژوهش‌های جداگانه‌ای، بیللو<sup>۱</sup> و همکاران، مدل آزمایشگاهی یک پل یک دهانه بارگذاری شده با جرم‌های متحرک را مورد مطالعه قرار دادند [۱۲]. اسماعیل زاده و قریشی رفتار همین تیر را تحت اثر جرم متحرک گسترده بررسی کردند [۱۳]. در تمامی این تحقیقات به اثرات غیر قابل چشم‌پوشی اینرسی بار متحرک بر پاسخ دینامیکی تیر با افزایش سرعت و بزرگای بار اشاره شده است. این موضوع در نتایج کیانی و همکاران نیز به چشم می‌خورد که در آن بر استفاده از فرمول بندی جرم متحرک به جای بار متحرک در تیرهای نازک ویسکو الاستیک تاکید شده است [۱۴]. آن‌ها همچنین در مطالعات جداگانه دیگری به تحلیل پارامتریک تیرهای کلاسیک و تیرها با تغییرشکل برشی تحت اثر جرم‌های متحرک پرداختند که در آن بر اثرات قابل توجه تغییر شکل‌های برشی در صورت کاهش لاغری تیر تاکید شده است [۱۵ و ۱۶].

در خصوص رفتار دینامیکی صفحات تحت اثر بارهای (جرم‌های) متحرک شادنام و همکاران، مطالعه‌ای روی پاسخ دینامیکی ورق نازک مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده تحت اثر جرم متحرک متمرکز با استفاده از تئوری ورق کلاسیک (تئوری کیرش‌هف) انجام دادند [۱۷]. در ادامه نیکخو و رفوئی در یک مطالعه پارامتریک، به بررسی اثرات اینرسی بار متحرک روی ورق‌های نازک مستطیلی پرداختند که موبد اثرات قابل توجه اینرسی بار با توجه به مسیر بارگذاری بوده است [۱۸].

در مطالعه دیگری نیاز و نیکخو با استفاده از توابع متعامد مفسر مرزی نسبت به تحلیل دینامیکی ورق‌های نازک مستطیلی با شرایط مرزی دلخواه تحت اثر جرم متحرک شتابدار اقدام نمودند [۱۹]. نتایج ایشان بیانگر دقت و سرعت همگرایی قابل قبول توابع مذکور در مسئله مورد مطالعه بوده است.

در بررسی رفتار دینامیکی ورق‌های میندلین مستطیل شکل، واتقی و همکاران در پژوهش خود حالت‌های مختلف بارگذاری بصورت جرم متحرک را برای شرایط مرزی محدود ورق با روش بسط توابع ویژه مورد مطالعه قرار دادند و نشان

<sup>۱</sup> Billelo

که در آن  $\rho$  چگالی است و همچنین:

$$\Delta w_b = \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \quad (۷)$$

برای محاسبه تغییر شکل کلی ورق،  $w$  از رابطه (۸) تعیین می‌شود:

$$w = w_b - \frac{D}{S} (\Delta w_b) + \frac{J}{S} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \quad (۸)$$

در صورتی که جابه‌جایی نقطه دلخواه از ورق تحت اثر بار استاتیکی متمرکز مدنظر باشد، ابتدا مولفه بردار نیرو  $f_i$  به ازای بار  $P$  که در نقطه‌ای به مختصات  $(x_0, y_0)$  اعمال می‌شود، از رابطه (۹) تعیین می‌شود:

$$f_i = P \times \phi_{tj}(x_0, y_0) \quad (۹)$$

که در آن  $\phi_{tj}(x_0, y_0)$  تابع شکل کل است.

$$\phi_t = \phi_b + \phi_s \quad (۱۰)$$

و در نهایت تغییر مکان نقطه‌ای با مختصات  $(x_d, y_d)$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta_i = k_{tij}^{-1} \times f_j \quad (۱۱)$$

$$w(x_d, y_d) = \sum \phi_{ti}(x_d, y_d) \Delta_i \quad (۱۲)$$

در رابطه بالا  $n$  تعداد توابع شکل مفروض برای حل مسئله است.

اگر جابه‌جایی نقطه دلخواهی از ورق تحت اثر بار استاتیکی گسترده مدنظر باشد. روابط لازم برای محاسبه میزان جابه‌جایی ورق تحت اثر بار استاتیکی گسترده مانند روابط ذکر شده برای بار متمرکز است، به جز رابطه نیرو که به صورت رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود:

$$f_i = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} q(x, y) \times \phi_{tj} dx dy \quad (۱۳)$$

که در آن  $(x_0, y_0): (x_1, y_1)$  محدوده اعمال بار  $q(x, y)$  است.

جهت محاسبه فرکانس‌های ارتعاش ورق ابتدا باید مولفه‌های ماتریس جرم به صورت رابطه (۱۴) تعیین شود:

$$M_{ij} = \iint \bar{m} \phi_{ti} \phi_{tj} dx dy$$

$$\bar{m} = \rho \times h \quad (۱۴)$$

$$\phi_1(x, y) = F_1(x, y)$$

$$\phi_i(x, y) = F_i(x, y) - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \phi_j(x, y)$$

$$\begin{cases} i = 2, 3, 4, \dots \\ j = 1, 2, \dots, (i-1) \end{cases} \quad (۲)$$

در آن  $\alpha_{ij}$  با استفاده از رابطه (۳) محاسبه می‌شود:

$$\alpha_{ij} = \frac{\langle F_i(x, y), \phi_j(x, y) \rangle}{\langle \phi_j(x, y), \phi_j(x, y) \rangle} \quad (۳)$$

## ۲-۲- تحلیل استاتیکی ورق

برای بررسی صحت و دقت توابع شکل تولید شده، تحلیل استاتیکی یک ورق مستطیل شکل ضخیم مد نظر قرار می‌گیرد. مولفه‌های ماتریس سختی خمشی  $Kb_{ij}$  برای ورق ایزوتروپیک به شکل رابطه (۴) است: [۲۲]

$$Kb_{ij} = \iint D \left( \frac{\partial^2 \phi_{bi}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{bj}}{\partial x^2} \right) + Dv \left( \frac{\partial^2 \phi_{bi}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{bj}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_{bi}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_{bj}}{\partial x^2} \right) + D \left( \frac{\partial^2 \phi_{bi}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_{bj}}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{3} Gh^3 \left( \frac{\partial^2 \phi_{bi}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_{bj}}{\partial x \partial y} \right) dx dy \quad (۴)$$

که در آن:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

همچنین براساس رابطه ارائه شده در منابع [۲۴ و ۱۰]، مولفه‌های ماتریس سختی برشی با استفاده از رابطه (۵) به دست می‌آید:

$$Ks_{ij} = \iint \left( k_s Gh \frac{\partial \phi_{si}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{sj}}{\partial x} + k_s Gh \frac{\partial \phi_{si}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{sj}}{\partial y} \right) dx dy \quad (۵)$$

که در آن  $h$  ضخامت ورق،  $k_s$  ضریب تصحیح برشی و  $\phi_s$  تابع شکل برشی است.

همچنین رابطه بین تغییر شکل خمشی  $w_s$  و تغییر شکل برشی نیز به صورت رابطه (۶) تعیین می‌شود:

$$w_s = -\frac{D}{S} (\Delta w_b) + \frac{J}{S} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \quad (۶)$$

در رابطه (۶)  $S$  و  $J$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = k_s Gh, \quad J = \frac{\rho h^3}{12}$$

$$\beta(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \end{bmatrix}_{2n \times 1} \quad (18)$$

و  $n$  تعداد توابع شکل است.

معادله (۱۷) به صورت رابطه (۱۹) قابل حل است [۱۱]:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Q}(t, \tau) \mathbf{X}(\tau)$$

$$\mathbf{Q}(t, \tau) \approx \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^{-1}(\tau) \quad (19)$$

که  $\mathbf{U}(t)$  یک ماتریس تبدیل بنیادی و  $\mathbf{Q}$  معرف ماتریس انتقال است که برای به دست آوردن آن می‌توان از رابطه تقریبی (۲۰) استفاده کرد:

$$\mathbf{Q}(t_{k+1}, t_k) = e^{\beta(t_k) \Delta t_k} \quad (20)$$

در رابطه بالا  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$  به عنوان گام‌های بازه زمانی فرض شده است.

به این ترتیب معادله (۱۸) به راحتی و با استفاده از یک روش گام به گام با رابطه (۲۱) قابل حل خواهد بود:

$$\mathbf{X}(t_{k+1}) = e^{\beta(t_k) \Delta t_k} \mathbf{X}(t_k) + [e^{\beta(t_k) \Delta t_k} - \mathbf{I}] \beta^{-1}(t_k) \gamma(t_k) \quad (21)$$

### ۳- مثال‌های عددی

#### ۳-۱- مثال ۱

ورق مربعی شکلی به ضلع  $a$  و ضخامت  $h$  با نسبت‌های  $h/a = 0.1, 0.2$  تحت اثر بار گسترده فرض می‌شود. اندازه تغییر مکان مرکز صفحه با استفاده از دو تئوری کیرشیف (CPT) و میندلین (FSDT) به ازای تعداد تابع شکل‌های مختلف محاسبه شده و نتایج برای صفحه با شرط مرزی چهار طرف ساده در جدول ۱ و صفحه با شرط مرزی چهار طرف گیردار در جدول ۲ ارائه شده است.

نتایج نشان داده شده در جدول‌های ۱ و ۲ نمایانگر اختلاف قابل توجه تغییر مکان مرکز صفحه در دو تئوری CPT و FSDT به خصوص در ضخامت‌های بالاتر است.

<sup>1</sup> Classical Plate Theory

<sup>2</sup> First Shear Deformation Theory

سپس با مشخص بودن ماتریس سختی از روابط (۵)، (۶) و (۱۴)، فرکانس ارتعاش آزاد  $\omega$  از رابطه (۱۵) به دست می‌آید:

$$\det(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2) = 0 \quad (15)$$

### ۲-۳- تحلیل دینامیکی ورق میندلین تحت اثر یک جرم متحرک

با استفاده از اصل هامیلتون و روش بسط توابع ویژه، معادلات حاکم بر حرکت ورق‌های میندلین تحت اثر یک جرم متحرک به وزن  $M$  که بر مسیر دلخواه  $(x(t), y(t))$  در حرکت است با رابطه (۱۶) تعیین می‌شود [۱۰ و ۲۰]:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{A}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{A}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{A}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (16)$$

که در آن:

$$K_{ij} = \iint [D \frac{\partial^2 \phi_{bi}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{bj}}{\partial x^2} + vD \frac{\partial^2 \phi_{bi}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_{bj}}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \phi_{bi}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_{bj}}{\partial y^2}] dx dy + \iint [\frac{1}{3} Gh^3 \frac{\partial^2 \phi_{bi}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_{bj}}{\partial x \partial y} + k_s Gh \frac{\partial \phi_{si}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{sj}}{\partial y} + k_s Gh \frac{\partial \phi_{si}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{sj}}{\partial x}] dx dy + M \phi_i [\dot{x}^2 \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \dot{y}^2 \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \ddot{x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \ddot{y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + 2\dot{x}\dot{y} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y}]$$

$$C_{ij} = 2M \phi_i [\dot{x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y}]$$

$$M_{ij} = \rho h \iint \phi_i \phi_j dx dy + M \phi_i \phi_j$$

$$f_j = -Mg \phi_j$$

در رابطه (۱۶) بردار دامنه‌های زمانی مجهول است که می‌بایست تعیین گردد. نمایش رابطه (۱۶) در فضای حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \beta(t) \mathbf{X}(t) + \gamma(t) \quad (17)$$

که در آن:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) \\ \dot{\mathbf{A}}(t) \end{bmatrix}_{2n \times 1}$$

۳-۲- مثال ۲

یک ورق مربعی به ابعاد  $a = 1(m)$ ,  $b = 1(m)$  و ضخامت  $h = 0.2(m)$  با مشخصات مصالح  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ،  $E = 210 \text{ Gpa}$  و  $\nu = 0.3$  تحت اثر یک جرم متحرک که بر مسیری مستقیم الخط از وسط ورق با سرعت بی بعد

در جدول ۳ فرکانس‌های ارتعاش آزاد ورق چهار طرف ساده با نسبت  $h/a = 0.2$  نشان داده شده است و مقایسه‌ای بین فرکانس‌های حاصل از این مطالعه با نتایج معتبر موجود صورت گرفته است. همان طور که از جدول مذکور مشخص است، نتایج به دست آمده نسبت به نتایج سایر محققین، از دقت قابل قبولی برخوردار است [۱۰ و ۲۳].

جدول ۱- تغییر مکان مرکز ورق مربعی چهار طرف ساده تحت بار گسترده حاصل از دو تئوری FSDT و CPT

h=۰/۲a		h=۰/۱a		تعداد توابع شکل
FSDT	CPT	FSDT	CPT	
۰/۰۰۰۳۳۹۴۴۰۲	۰/۰۰۰۲۴۸۵۴۴	۰/۰۰۲۱۷۰	۰/۰۰۱۹۸۸	۱
۰/۰۰۰۳۲۴۵۳۶۳	۰/۰۰۰۲۴۲۲۵۹	۰/۰۰۲۱۰۲۶	۰/۰۰۱۹۳۸	۴
۰/۰۰۰۳۱۲۰۲۷۸	۰/۰۰۰۲۳۶۶۱۹	۰/۰۰۲۰۴۳۸	۰/۰۰۱۸۹۲۹	۱۶
۰/۰۰۰۳۱۲۰۲۳۷	۰/۰۰۰۲۳۶۶۱۸	۰/۰۰۲۰۴۳۷۵	۰/۰۰۱۸۹۲۹	۲۵
۰/۰۰۰۳۱۱۷۸۳۱	۰/۰۰۰۲۳۶۵۷۸	۰/۰۰۲۰۴۳۰۳	۰/۰۰۱۸۹۲۶	۴۹
۰/۰۰۰۳۱۱۹۸۰	۰/۰۰۰۲۳۶۶۰۶	۰/۰۰۲۰۰۰	۰/۰۰۱۸۹۳	۶۴
۰/۰۰۰۳۱۱۹۸۰	۰/۰۰۰۲۳۶۶۰۱	۰/۰۰۲۰۴۳۶	۰/۰۰۱۸۹۲	۸۱
-	۰/۰۰۰۲۳۵۶۰۳	-	۰/۰۰۱۸۹۱	منبع [۲۶]

جدول ۲- تغییر مکان مرکز ورق مربعی چهار طرف گیردار تحت بار گسترده حاصل از دو تئوری FSDT و CPT

h=۰/۲a		h=۰/۱a		تعداد توابع شکل
FSDT	CPT	FSDT	CPT	
۰/۰۰۰۹۸۵۴۳۴	۰/۰۰۰۷۶۴۰۱۴۵	۰/۰۰۵۵۵۵	۰/۰۰۵۳۱۲	۱
۰/۰۰۰۹۵۲۴۶۵	۰/۰۰۰۷۱۱۵۵۶	۰/۰۰۵۹۷۴	۰/۰۰۵۶۹۲	۴
۰/۰۰۰۹۱۶۲۴۲	۰/۰۰۰۷۵۹۳۱۵	۰/۰۰۶۳۸۸	۰/۰۰۶۰۷۴	۱۶
۰/۰۰۰۹۱۶۶۷۹	۰/۰۰۰۷۵۹۴۶۴	۰/۰۰۶۳۹۰	۰/۰۰۶۰۷۶	۲۵
۰/۰۰۰۹۱۶۹۸	۰/۰۰۰۷۵۹۵۹۳	۰/۰۰۶۳۹۱	۰/۰۰۶۰۷۷	۴۹
۰/۰۰۰۹۱۷۰۶	۰/۰۰۰۷۵۹۶۱	۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۶۰۷۷	۶۴
۰/۰۰۰۹۱۷۰۶	۰/۰۰۰۷۵۹۶۰	۰/۰۰۶۳۹۲	۰/۰۰۶۰۷۷	۸۱
-	۰/۰۰۰۷۵۹۱۶	-	۰/۰۰۶۰۸۲	منبع [۲۶]

جدول ۳- مقایسه فرکانس بی بعد ورق مربعی چهار طرف ساده حاصله از تئوری میندلین با منابع موجود،  $h/a=0/2$ ،  $k_s = \frac{5}{6}$

(m,n) (شماره مود)	Senjanovic [۱۰]	Liew et al. [۲۲]	مطالعه حاضر	NASTRAN [۱۰]	
				سه بعدی	دو بعدی
۱,۱	۱/۸۰۳	۱/۷۶۸	۱/۷۳۷	۱/۶۸۲	۱/۶۵۱
۱,۲ یا ۲,۱	۴/۰۲۴	۳/۸۶۶	۳/۷۹۵	۳/۷۹۱	۳/۷۱۷
۲,۲	۵/۸۲۷	۵/۵۸۸	۵/۳۶۴	۵/۲۴۹	۵/۱۴۲
۱,۳ یا ۳,۱	۷/۰۷۲	۶/۶۰۱	۶/۴۶۳	۶/۴۷۸	۶/۴۳۶
۲,۳ یا ۳,۲	۸/۴۶۶	۷/۹۷۴	۷/۴۳۱	۷/۳۳۶	۷/۲۷۳
۳,۳	۵۱۹/۱۰	۹/۶۰۲	۸/۷۸۷	۸/۵۶۰	۸/۶۵۷

### ۳-۳- مثال ۳

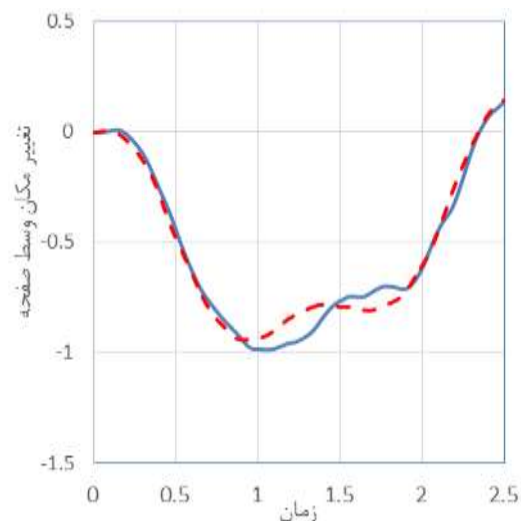
یک ورق مربعی به ابعاد  $a = 2(m), b = 2(m)$ ، ضخامت  $h$  و جرم واحد حجم  $\mu$  مد نظر است. ورق مذکور تحت اثر یک جرم متحرک با سرعت ثابت و بر مسیری مشابه با مثال ۲ حرکت می‌کند. سایر پارامترها به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3, E = 200 \text{ Gpa}, x(t) = vt$$

$$y(t) = \frac{b}{2}$$

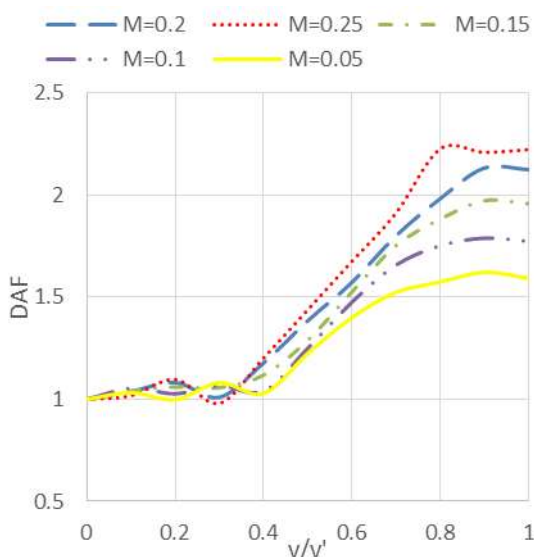
که در آن  $v$  سرعت جرم متحرک و  $b$  عرض صفحه می‌باشند. با بررسی نتایج برای شرایط مرزی ساده و گیردار می‌توان مقایسه ای بین نسبت بیشینه تغییر مکان دینامیکی به بیشینه تغییر مکان استاتیکی DAF<sup>۱</sup> نشان داده شده، در دو حالت CPT و FSDT برای یک جرم مشخص انجام داد. در شکل ۲ این مقایسه در دو حالت جرم متحرک و بار متحرک برای شرط مرزی چهار طرف ساده نشان داده شده است. همان طور که از شکل مشخص است، اختلاف قابل توجهی بین نتایج حاصل از دو تئوری به ویژه در جرم زیاد و در حالت جرم متحرک مشاهده می‌شود که این امر حاکی از اهمیت نقش تغییر شکل برشی در تغییر شکل کلی صفحه با ضخامت

$v/v_1 = 0.4$  و جرم بی بعد  $m = 0.1$  که در آن  $v_1 = a/T_1$  [۲۰] و  $m = M/\mu ab$  و  $\mu = \rho h$  است، مورد مطالعه قرار گرفته است ( $T_1$  پریود اصلی ارتعاشی صفحه است). در شکل ۱ نمودار تاریخچه زمانی پاسخ مرکز ورق ترسیم شده که برای صحت سنجی، نمودار حاصل با آن چه توسط واثقی و همکاران به دست آمده [۲۱] مقایسه گردیده است. همان طور که ملاحظه می‌گردد، نتیجه حاصله تطابق قابل قبولی را نشان می‌دهد.

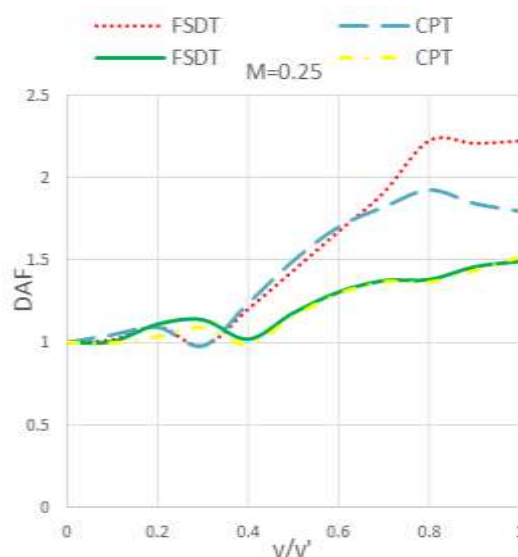


شکل ۱- مقایسه پاسخ تاریخچه زمانی ورق تحت جرم متحرک مطالعه کنونی (خط آبی) با مطالعه واثقی و همکاران [۲۱] (خط قرمز)

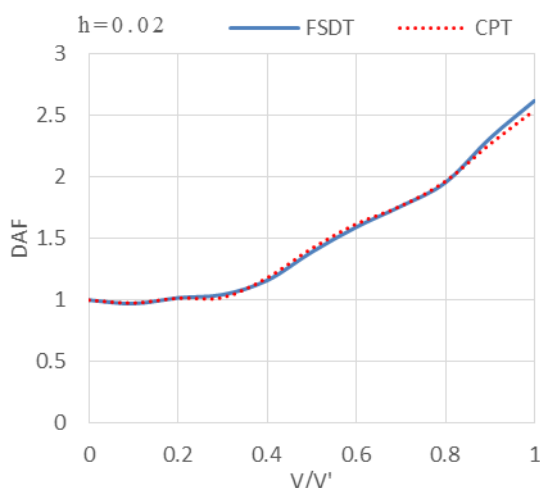
<sup>1</sup> Deformation Amplifier Factor



شکل ۳- مقایسه ی نمودار DAF نسبت به تغییرات سرعت برای مقادیر مختلف جرم در حالت جرم متحرک



شکل ۲- مقایسه نمودار DAF نسبت به تغییرات سرعت در دو حالت جرم متحرک و نیروی متحرک FSDT و CPT (خط قرمز جرم متحرک FSDT، خط آبی جرم متحرک CPT، خط سبز بار متحرک FSDT، خط زرد بار متحرک CPT)



شکل ۴- مقایسه ای بین نتایج FSDT و CPT در حالت جرم متحرک و شرایط تکیه گاهی چهارطرف ساده برای ضخامت  $h = 0.02$

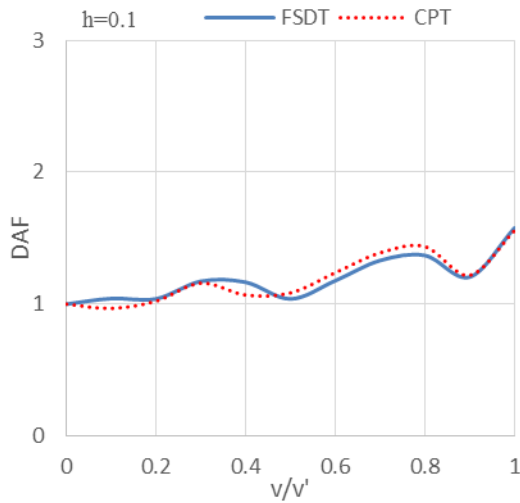
همان طور که شکل‌های ۴ و ۵ و ۶ نشان می‌دهند، با افزایش ضخامت به ویژه در سرعت‌های بالا، نتایج تئوری CPT از دقت کافی برخوردار نبوده و الزام استفاده از تئوری FSDT، جهت حصول به نتایج دقیقتر مشخص می‌شود. نتایج برای ورق با همان مشخصات برای شرایط تکیه گاهی گیردار در شکل‌های ۷ و ۸ ارائه شده است.

زیاد است؛ همچنین مشاهده می‌شود که بیشترین اختلاف بین DAFها در سرعت حدود  $0.8v'$  اتفاق می‌افتد. در واقع این سرعت، سرعت بحرانی صفحه با مشخصات مذکور است. با بررسی منحنی‌های شکل ۲ به این نکته نیز می‌توان پی برد که حذف اثرات اینرسی بار، خطای زیادی را سبب می‌شود که این امر عامل اختلاف بین نتایج حاصل از دو مدل سازی جرم متحرک و بار متحرک است. در شکل ۳ تغییرات DAF بر حسب  $v/v'$  در ورق مذکور برای جرم‌های مختلف ترسیم شده است که بیانگر افزایش DAF به ازای افزایش میزان جرم است.

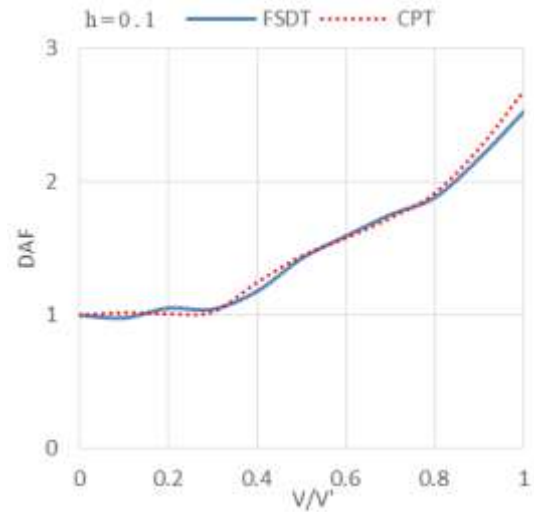
#### ۴-۳- مثال ۴

به منظور نشان دادن اهمیت استفاده از تئوری FSDT به خصوص در ورق‌های با ضخامت زیاد که تغییرشکل برشی نقش قابل توجهی در تغییرشکل کلی ورق دارد، مقدار DAF برای سه ورق با ضخامت‌های مختلف برای تحریک یک جرم متحرک مشخص، محاسبه شده و به صورت نمودار برای هر دو تئوری CPT و FSDT در شکل‌های ۴ تا ۸ نشان داده شده است.

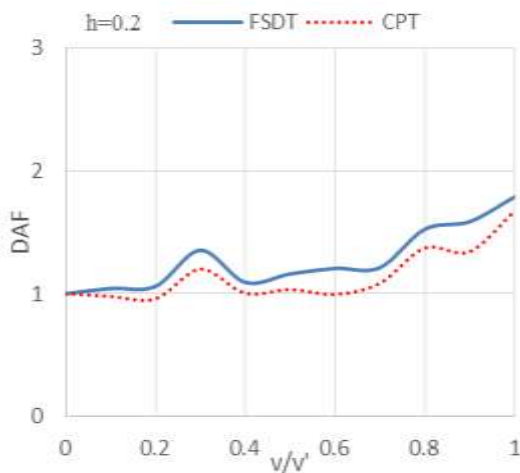




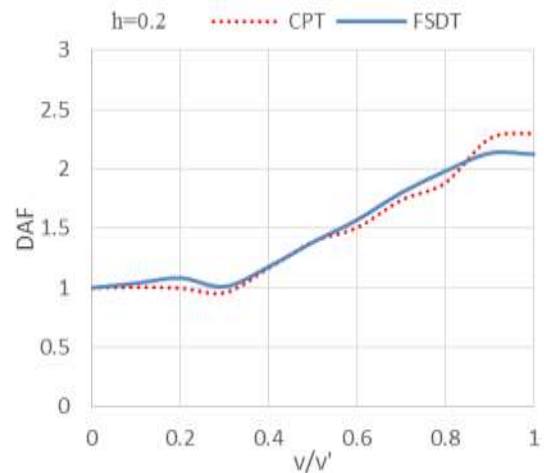
شکل ۷- مقایسه بین نتایج FSDT و CPT برای جرم متحرک و شرایط تکیه گاهی چهار طرف گیردار برای ضخامت  $h = 0.1$



شکل ۵- مقایسه‌ای بین نتایج FSDT و CPT در حالت جرم متحرک و شرایط تکیه گاهی چهار طرف ساده برای ضخامت  $h = 0.1$



شکل ۸- مقایسه بین نتایج FSDT و CPT در حالت جرم متحرک و شرایط تکیه گاهی چهار طرف گیردار در ضخامت  $h = 0.2$



شکل ۶- مقایسه‌ای بین نتایج FSDT و CPT در حالت جرم متحرک و شرایط تکیه گاهی چهار طرف ساده برای ضخامت  $h = 0.2$

همان طور که در شکل ۹ مشخص است، در سرعت  $v/\dot{v} = 1$  بیشترین DAF در  $h/a = 0.06$  اتفاق می‌افتد. هم‌چنین این شکل نشان می‌دهد که تئوری CPT برای ورق با  $h/a$  تا حدود  $0.2$  نتایج قابل قبولی را ارائه می‌دهد

همچنین در شکل ۹ مقایسه‌ای بین DAF به دست آمده از تئوری‌های CPT و FSDT برای  $h/a$  های مختلف با مشخصات زیر انجام شده است.

$$h/a = 0.01, 0.06, 0.09, 0.12$$

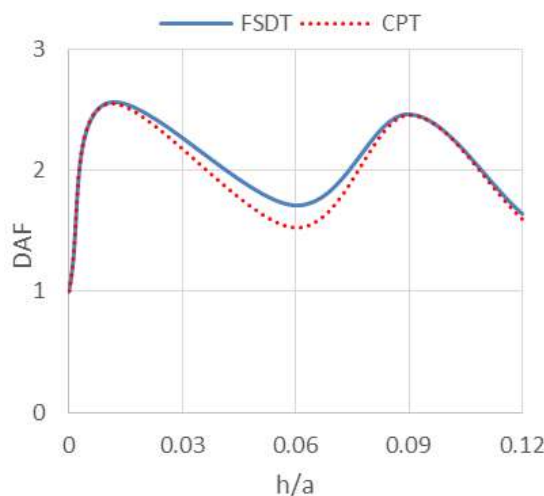
$$m = 0.2$$

$$v/\dot{v} = 1$$

شرایط مرزی صفحات مستطیلی شکل تحت نیروهای متحرک، اثرات تغییر شکل‌های برشی در پاسخ دینامیکی سازه با دقت مناسب قابل دستیابی خواهد بود.

#### ۵- منابع

- [1] Mindlin RD (1951) Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J Appl Mech* 18(1): 31-38.
- [2] Reissner E (1945) The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate. *J Appl Mech-T ASME* 12: A69-A77.
- [3] Donnell LH(1976) Beams, plates and shells. McGraw-Hill, NY.
- [4] Levinson M (1980) An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mech Res Commun* 7: 343-350.
- [5] Ghugal YM, Shimpi RP (2002) A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated plates. *J Reinf Plast Comp* 21: 775-813.
- [6] Srinivas S, Joga Rao AK, Rao CV (1969) Flexure of simply supported thick homogeneous and laminated rectangular plates. *ZAMM: Zeitschrift für Angewandte Mathematic und Mchanik* 49(8): 449-458.
- [7] Srinivas S, Joga Rao CV, Rao AK (1970) An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. *J Sound Vib* 12(2): 187-199.
- [8] Levy M (1877) Memoire sur la theorie des plaques elastique planes. *J Math Pure Appl* 30: 219-306.
- [9] Stein M, Jegly DC (1987) Effect of transverse shearing on cylindrical bending, vibration and buckling of laminated plates. *AIAA J* 25:123-129.
- [10] Senjanovic I, Vladimir N, Tomic M (2013) An advanced theory of moderately plate vibrations. *J Sound Vib* 332(7): 1868-1880.
- [11] Fryba L (1999) Vibration of solids and structures under moving loads. London: Thomas Telford.
- [12] Billelo C, Bergman LA, Kuchma D (2004) Experimental investigation of a small-scale bridge model under a moving mass. *J Struct Eng-ASCE* 130: 799-804.
- [13] Esmailzadeh E, Ghorashi M (1995) Vibration analysis of beams traversed by uniform partially distributed moving masses. *J Sound Vib* 184(1): 9-17
- [14] Kiani K, Nikkhoo A, Mehri B (2010) Assessing dynamic response of multispan viscoelastic thin beams under a moving mass via generalized moving least square method. *ACTA Mech Sinica* 26: 721-733



شکل ۹- مقایسه DAF به دست آمده از FSDT و CPT برای نسبت های مختلف h/a

#### ۴- نتیجه گیری

در این مطالعه از تئوری تغییر شکل برشی برای بررسی پاسخ دینامیکی ورق ضخیم تحت جرم متحرک به وسیله چند جمله ای های متعامد مفسر مرزی استفاده شد.

بدین منظور، تغییر مکان کلی ورق به مولفه های آن یعنی، تغییر مکان خمشی و برشی تقسیم شده و با ایجاد وابستگی بین دو تغییر مکان، مجهولات موجود به یک مجهول یعنی، تغییر مکان خمشی کاهش یافت.

به عنوان نمونه یک ورق مربعی با ضخامت های مختلف تحت اثر جرم های متفاوت با سرعت های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. اثرات شرایط مرزی ورق، تغییرات وزن و سرعت جرم متحرک روی ضریب بزرگنمایی تغییر شکل (DAF) مورد مطالعه قرار گرفت. هم چنین نتایج حاصل از این روش با نتایج حاصل از تئوری کلاسیک ورق (CPT) مقایسه شد. نتایج حاکی از آن است که با افزایش ضخامت، تئوری CPT تغییر مکان های کمتر و هم چنین فرکانس های بالاتری نسبت به FSDT ارائه می دهد و علت آن نیز، اهمیت نقش تغییر شکل برشی در ورق های ضخیم است که در تئوری FSDT لحاظ می شود؛ در حالی که در تئوری CPT این تغییر شکل ها نادیده گرفته می شود. لذا تئوری FSDT که برای ورق های نازک نیز نتایج قابل قبولی ارائه می دهد، می تواند جایگزین مناسبی برای تئوری CPT باشد. با توجه به رویکرد نیمه تحلیلی پیشنهاد شده در این مقاله، برای تمامی

- excitation by expansion method. *Thin Wall Struct* 62: 53-64.
- [21] Chakraverty S (2009) *Vibration of plates*. CRC Press, NY.
- [22] Reddy JN (2006) *An introduction to the finite element method*. Vol. 2. McGraw-Hill, NY.
- [23] Liew KM, Lam KY, Chow ST (1990) Free vibration analysis of rectangular plates using orthogonal plate function. *Comput Struct* 34(1): 79-85.
- [24] Shimpi RP, Patel HG, Arya H (2007) New first-order shear deformation plate theories. *J Appl Mech* 74: 523-533.
- [25] Hosseini Hashemi S, Arsanjani M (2005) Exact characteristic equations for some of classical boundary conditions of vibrating moderately thick rectangular plates. *Int J Solids Struct* 42(3-4).
- [26] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S (1959) *Theory of plates and shells*, Engineering societies monographs. McGraw-Hill, New York.
- [15] Kiani K, Nikkhoo A, Mehri B (2009) Parametric analyses of multispan viscoelastic shear deformable beams under excitation of a moving mass. *J Vib Acoust* 131(5).
- [16] Kiani K, Nikkhoo A, Mehri B (2009) Prediction capabilities of classical and shear deformable beam models excited by a moving mass. *J Sound Vib* 320(3):632-648
- [17] Shadnam MR, Mofid M, Akin JE (2001) On the dynamic response of rectangular plate, with moving mass. *Thin Wall Struct* 39(9): 797-806.
- [18] Nikkhoo A, Rofooei FR (2010) Parametric study of the vibration of thin rectangular plates traversed by a moving mass. *ACTA Mech Sinica* 223: 15-27.
- [19] Motahareh N, Nikkhoo A (2015) Inspection of a rectangular plate dynamics under a moving mass with varying velocity utilizing BCOPs. *Lat Am J Solids Stru* 12(2): 317-332
- [20] Vaseghi Amiri J, Nikkhoo A, Davoodi MR, Ebrahimzadeh M (2013) Vibration analysis of a Mindlin elastic plate under a moving mass