



تحلیل ارتعاشات عرضی آزاد تیرهای ناهمگن محوری نمایی با شرایط مرزی مختلف

علی ابراهیمی ممقانی^{۱*}، روح اله حسینی^۱، مجید شاهقلی^۲ و هدی سرپرست^۱

^۱ باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران

^۲ استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۸/۰۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۱/۱۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۸/۱۱

چکیده

در کار حاضر به تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای ناهمگن محوری پرداخته شده است. برای تیرهای مدرج تابعی نمایی، به ازای تمامی شرایط مرزی، معادلات مشخصه فرکانسی سیستم به صورت دقیق ارائه شده‌اند. همچنین تغییرات شکل مودهای مختلف سازه برحسب تغییرات پارامتر گرادینان مشخص شده‌اند و در نهایت نیز با مواد ایزوتروپیک مقایسه شده‌اند. به منظور صحت‌سنجی، نتایج استخراج شده در این پژوهش با مراجع موجود دیگر مقایسه شدند. نتایج نشان دادند که فرکانس طبیعی تیر و شکل مودهای سیستم به شرایط مرزی و نرخ گرادینان وابستگی شدیدی دارند. برای تیرهای مدرج تابعی به ازای هر پارامتر گرادینان، می‌توان یک فرکانس بحرانی یافت، به نحوی که منجر به پرش در طیف فرکانسی سیستم شود و در فرکانس‌های کمتر از حد بحرانی یا شبه فرکانس، امواج محوشونده رخ خواهند داد که این یک تفاوت بارز برای تیرهای همگن و ناهمگن است. نتایج پژوهش حاضر می‌تواند برای مهندسان و طراحان سازه‌های غیریکنواخت نیز مفید باشند.

کلمات کلیدی: تیر ناهمگن محوری؛ مواد مدرج تابعی نمایی؛ معادله مشخصه؛ فرکانس طبیعی پایه؛ پدیده پرش.

Free Lateral Vibration Analysis of Inhomogeneous Beams Under Various Boundary Conditions

A. Ebrahimi Mamaghani^{1,*}, R. Hosseini¹, M. Shahgholi¹, H. Sarparast¹

¹ Young Researchers and Elite Club, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

² Assis. Prof., Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.

Abstract

In this paper, free lateral vibration of exponentially functionally graded beams is studied. For these inhomogeneous axial beams, characteristic equations in closed form are derived under various boundary conditions. The frequency and characteristic equations convert to analytical classical Euler-Bernoulli beams equations with ignoring gradient index. In addition, variation of mode shapes of the structure in terms of gradient parameter is demonstrated and compared with isotropic materials. In order to comparison and validation, the obtained results were compared with other available references. The results show that the natural frequency of the beams and mode shapes of the systems are strongly dependent to end conditions and gradient index. Furthermore, for functionally graded beams, there exists a critical frequency which leads to jump phenomenon in frequency spectrum so that harmonic vibration occurs in frequencies higher than the critical value and in frequencies lower than the critical value or pseudo-frequency, non-propagating fields occur. This feature does not exist in homogeneous beams. The presented results can be used for beams with exponentially decaying width and constant thickness. Moreover, the minimum frequency of the considered systems is helpful for engineers to design optimum non-uniform structures.

Keywords: Axial Inhomogeneous Beams; Exponential Functionally Graded Materials; Characteristic Equation; Fundamental Natural Frequency; Jump Phenomenon.

۱- مقدمه

تیرهای مدرج تابعی موضوع شمار زیادی از تحقیقات علمی بوده است [۱-۴]. در ساخت این مواد، سرامیک در یک سطح و فلز در سطح دیگر در نظر گرفته شده است و نسبت حجمی مواد سازنده بین این دو سطح به صورت تدریجی تغییر می‌کند؛ بنابراین، خواص مکانیکی مؤثر آن‌ها نیز، از یک سطح به سطح دیگر به صورت پیوسته تغییر می‌کند. این پیوستگی ساختار مواد، منجر به بهبود کیفیت چسبندگی، کاهش ناهماهنگی در خواص ترمودینامیکی و کاهش تنش بین لایه‌ای می‌شود و می‌توان از آن‌ها به‌عنوان ماده سپر حرارتی در صنایع هوافضا، راکتورهای هسته‌ای و... بهره برد. در سال‌های اخیر پیشرفت‌های چشمگیری در زمینه مواد مدرج تابعی با نرخ متغیر در راستای ضخامت صورت گرفته است. به طور مثال سانکار [۵]، به تحلیل استاتیکی تیرهای مدرج تابعی با نرخ نمایی در راستای ضخامت با فرض مدل تیر اویلر-برنولی با شرایط مرزی دوسرمفصل و الاستیسیته دوبعدی پرداخت. ژونگ و یو [۶] به ارائه حل تحلیلی برای تیرهای یکسرگیردار^۱ مدرج تابعی ساکن یکسرگیردار با فرض یکسان بودن تغییرات مدول الاستیسیته مواد در راستای ضخامت تیر پرداختند. تحلیل رفتار استاتیکی برای مواد مدرج تابعی غیرایزوتروپیک، توسط دینگ و همکاران [۷] انجام شد. لو و همکاران [۸] با استفاده از روش مربعات گسسته^۲ و تئوری الاستیسیته دوبعدی، روش نیمه تحلیلی برای مسائل استاتیکی تیرهای مدرج تابعی دوجهته با نرخ توزیع تغییرات نمایی ارائه دادند. در ادبیات فنی، تحلیل دینامیکی تیرهای مدرج تابعی، مورد توجه بیشتری قرار گرفته است [۹]. آیدوگدو و تاسکین [۱۰]، ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی دوسرمفصل^۳ را مورد بررسی قرار دادند که مدول یانگ آن‌ها در راستای ضخامت به صورت توانی و نمایی تغییر می‌کنند. با فرض ناچیز بودن نیروی محوری و کشیدگی طولی، لی [۱۱] راه حل جدید برای تحلیل خمش عرضی و رفتار دینامیکی تیرهای مدرج تابعی با در نظر گرفتن ممان اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی پیشنهاد

داد. سینا و همکاران [۱۲] با استفاده از اصل همیلتون، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیرهای مدرج تابعی را استخراج کردند. شیمشک [۱۳] تئوری‌های مرتبه بالاتر^۴ متفاوتی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی به کار برد؛ همچنین بر مبنای یک روش سه‌بعدی کانگ و لیسا [۱۴] نیز رفتار ارتعاشاتی میله‌ها و تیرهای نازک مخروطی با سطح مقطع دایروی را بررسی کردند. ژایو و همکاران [۱۵] نیز به بررسی و تحلیل ارتعاشات تیرهای مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر به کمک روش چبیشف^۵ پرداختند. الیشاکوف و همکاران [۱۶]، تحقیقات گسترده‌ای به منظور پیدا کردن راه‌حل‌های صریح برای فرکانس‌های طبیعی تیرها با شرایط مرزی مختلف به وسیله روش شبه معکوس انجام دادند. روش آن‌ها فقط برای سختی‌های خمشی و چگالی جرمی خاص مانند، چندجمله‌ای‌ها کاربرد دارد و برای مشخص کردن فرکانس‌های طبیعی بالاتر نامناسب است. هوانگ و لی [۱۷]، ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج محوری با هر نرخ تغییرات را به وسیله روش انتگرال معادله‌ای^۶ مطالعه کردند که یک روش پیشنهادی تقریبی و غیرصریح است. جعفری و فتح‌آبادی [۱۸]، ارتعاشات اجباری تیرهای تیموشنکو تحت بار متحرک و ساخته شده از مواد مدرج تابعی را مطالعه کردند. موسوی و سعیدی [۱۹]، ارتعاشات آزاد ورق ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی همسانگرد و ناهمسانگرد عرضی را مورد مطالعه قرار دادند. بازکیایی و همکاران [۲۰]، ارتعاشات آزاد ورق نازک مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک وینکلر^۷ را به کمک روش مربعات گسسته بررسی کردند. رحمانی و غلامی [۲۱] کنترل ارتعاشات عرضی تیر یکسرگیردار ساخته شده از مواد مدرج تابعی دارای ترک عرضی و تحت تأثیر بار حرارتی را مورد بررسی قرار دادند. شاهبا و همکاران [۲۲] از طریق روش اجزاء محدود^۸ به تحلیل پایداری ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی محوری مخروطی تیموشنکو با شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک پرداختند؛ همچنین لی و همکاران [۲۳]، به بهینه‌سازی تیرهای مدرج تابعی در

⁴ Higher-Order Beam Theory

⁵ Chebyshev Polynomials Theory

⁶ Integral Equation Method

⁷ Winkler Foundation

⁸ Finite Element Method (FEM)

¹ Cantilever

² Discrete Quadrature Method

³ Pinned-Pinned

$$EI = G_0 e^{2\lambda x/L}, \quad \rho A = m_0 e^{2\lambda x/L} \quad (1)$$

در رابطه (۱) پارامتر گرادیان بدون بعد یا شاخص نرخ تغییرات^۳ است که میزان تغییرات خواص تیر در راستای طولی تیر را نشان می‌دهد. EI سختی خمشی و G_0 مقدار مرجع سختی خمشی در مبدأ، ρA جرم توزیع شده در واحد طول و m_0 مقدار مرجع جرم توزیعی در ابتدای تیر است. در اینجا I ممان اینرسی دوم سطح مقطع، A سطح مقطع تیر، E مدول یانگ و ρ چگالی جرمی تیر است. لازم به ذکر است که با افزایش x زمانی که $\lambda > 0$ باشد، سختی خمشی و جرم توزیع شده افزایش می‌یابند و زمانی که $\lambda < 0$ باشد، این دو پارامتر نیز کاهش می‌یابند. برای یک تیر با سطح مقطع متغیر (یعنی ضخامت آن ثابت باشد اما عرض آن رابطه نمایی با طول تیر داشته باشد)، رابطه (۱) نشان می‌دهد که خواص مواد در راستای طولی به صورت نمایی تغییر می‌کنند. معادله دیفرانسیلی حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر، مطابق رابطه (۲) است [۲۵، ۱۷]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[G_0 e^{2\lambda x/L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + m_0 e^{2\lambda x/L} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L \quad (2)$$

زمانی که تیر ارتعاشات عرضی را تجربه می‌کند، می‌توان w (جابجای عرضی) را طبق رابطه (۳) در نظر گرفت:

$$w(x, t) = W(x) \cdot \sin \omega t \quad (3)$$

که $W(x)$ دامنه ارتعاشات (مربوط به قسمت مکانی) و ω فرکانس ارتعاشات (مربوط به قسمت زمانی) است. با اعمال رابطه بالا در معادلات دینامیکی سیستم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[G_0 e^{2\lambda x/L} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] - m_0 \omega^2 L^4 e^{2\lambda x/L} W = 0 \quad (4)$$

در تحقیق حاضر تأکید روی تأثیر شاخص نرخ تغییرات یعنی λ روی فرکانس طبیعی ارتعاشات عرضی تیر است. برای بیان ساده‌تر تحلیل‌ها، پارامترهای بدون بعد معرفی می‌شوند (رابطه (۵)). همچنین از این پس برای جلوگیری از ابهام، از نماد $d() / dx$ به جای نماد $\partial() / \partial x$ استفاده می‌شود.

$$\xi = x / L, \quad \Omega = \omega L^2 \sqrt{m_0 / G_0} \quad (5)$$

مقابل کمانش پرداختند. چاکرابتی و همکاران [۲۴]، دامنه بزرگ ارتعاشات آزاد تیرهای چرخان غیرهمگن با فنر غیرخطی و جرم متمرکز را در نظر گرفتند. وانگ و همکاران [۲۵] نیز رفتار ارتعاشاتی یک تیر یکسرگردار با ضخامت ثابت و عرض کاهشده نمایی با جرم متمرکز را بررسی کردند.

مسئله برای تحلیل دقیق و طراحی، راه‌حل‌های تحلیلی فرم بسته، نسبت به راه‌حل‌های عددی و تقریبی مزایای بیشتری دارند. بعلاوه، این روش‌ها می‌توانند به منظور صحنه‌سازی کارایی روش‌های مختلف استفاده شوند. از سوی دیگر، اکثر مطالعات صورت گرفته روی تیرهای مدرج تابعی تا به امروز، براساس قانون توانی^۲ بوده‌اند و برای تیرهای مدرج تابعی متشکل از مواد با خصوصیات محوری نمایی متغیر، تحقیقات محدودتری صورت پذیرفته است. از همین رو در این مقاله یک روش تحلیلی برای ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی محوری با نرخ نمایی ارائه می‌شود و معادلات مشخصه و فرکانسی تیرها با شرایط مرزی مختلف را به فرم بسته، صریح و دقیق ارائه خواهد شد. شکل موده‌های سیستم به ازای پارامترگردان مختلف بررسی می‌شوند. برای تیرهای ناهمگن نسبت به تیرهای همگن، یک تفاوت بارز یافت می‌شود که منجر به پدیده پرش در طیف فرکانسی سیستم خواهد شد؛ همچنین نشان داده خواهد شد که برای تیرهای معین با نرخ تغییرات نمایی، ارتعاشات تیرها برای فرکانس کمتر از مقدار بحرانی رخ نخواهد داد و تنها برای فرکانس‌های فراتر از مقدار بحرانی، ارتعاشات هارمونیک رخ خواهد داد.

۲- استخراج معادلات سیستم

یک تیر با که جنس آن از مواد مدرج تابعی است در نظر بگیرید. همانند شکل (۱) طول تیر با L و راستای طولی با x نشان داده می‌شود. سختی خمشی و جرم توزیع شده وابسته به مختصات طولی، با رابطه (۱) نشان داده می‌شوند [۲۵]:

^۱ Closed-Form

^۲ Power-Law

^۳ Dimensionless Gradient Parameter

با توجه به روابط (۱۴) تا (۱۶) برای حالتی که فرکانس طبیعی کوچک باشد (یعنی $\Omega \leq \lambda^2$)، ریشه‌های به دست آمده حقیقی هستند؛ بنابراین شکل مودهای استخراجی نیز هارمونیک نیستند. به عبارت دیگر معادلات (۱۵) و (۱۶)، نشان‌دهنده امواج منتشر شونده^۱ نیستند؛ اما خواص امواج محو شونده^۲ را دارند و این مقادیر نیز مفهوم فیزیکی ندارند. کمترین مقدار λ^2 فرکانس بحرانی بدون بعد در نظر گرفته می‌شود (یعنی $\Omega_{cr} = \lambda^2$) و هنگامی که مقدار فرکانس از حد بحرانی فراتر رود، امواج منتشر شونده تحریک خواهند شد و ارتعاشات هارمونیک در سیستم مشاهده می‌شود. از سوی دیگر نیز، اگر فرکانس مورد نظر از مقدار بحرانی کمتر شود، رخداد موج‌های انتشاری یا ارتعاشات هارمونیک برای تیر غیرممکن است، چرا که در حالت اول، بردار معادله مشخصه شامل توابع مثلثاتی است و در یک یا چند نقطه مشخص از تیر امکان محو شدن آن‌ها وجود دارد، اما در مورد دوم، بردار معادله مشخصه در هیچ نقطه‌ای از تیر صفر نمی‌شود، چرا که متشکل از یک تابع نمایی است و میدان‌های انتشاری هرگز رخ نخواهند داد، هرچند ممکن است، ترکیب آن‌ها در نقاط مشخص از تیرها مانند انتهای آن‌ها محو شود. زمانی که فرکانس از مقدار بحرانی فراتر می‌رود، ارتعاشات هارمونیک در سیستم مشاهده خواهد شد که این یک تفاوت بارز بین امواج منتشر شونده و امواج غیرمنتشر شونده است. گرچه می‌توان مقادیر مشخصه Ω کمتر از مقدار بحرانی λ^2 را محاسبه کرد، اما به دلیل ذکر شده این مقادیر را شبه فرکانس^۳ می‌نامند. لازم به ذکر است که تحلیل تئوری مودهای نمایی ارتعاشات تیرها در مرجع [۲۶]، به طور کامل بررسی شده است. با این حال، در این پژوهش موردی که فرکانس بالاتر از حد بحرانی است، مورد توجه قرار می‌گیرد و این نکته بدان معنا است مقادیر ویژه سیستم از رابطه (۱۱) استخراج می‌شوند، یا به عبارت دیگر، ارتعاشات هارمونیک در سیستم تحریک شده‌اند. چند نمونه از ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی نمایی بررسی می‌شوند و دامنه W ، چرخش $\partial W / \partial \xi$ ، گشتاور خمشی M و نیروی برشی Q برحسب متغیرهای

رابطه (۴) را می‌توان به صورت رابطه (۶) بازنویسی کرد:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[e^{2\lambda\xi} \frac{d^2 W}{d\xi^2} \right] - \Omega^2 e^{2\lambda\xi} W = 0 \quad (6)$$

همچنین ممان خمشی (M) و نیروی برشی (Q) در هر سطح مقطع از تیر با متغیرهای بدون بعد معرفی می‌شوند (روابط (۷) و (۸)):

$$M = -\frac{G_0 e^{2\lambda\xi}}{L^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \quad (7)$$

$$Q = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{G_0 e^{2\lambda\xi}}{L^3} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) \quad (8)$$

۳- تحلیل ارتعاشات آزاد

به منظور استخراج جواب غیربدهی از رابطه (۶) لازم است که W طبق رابطه (۹) فرض شود.

$$W(\xi) = C e^{\mu\xi} \quad (9)$$

که C و μ دو ثابت مجهول هستند. با قرار دادن رابطه (۹) در رابطه (۶)، معادله مشخصه استخراج می‌شود (رابطه (۱۰)):

$$\left[\mu^2 (\mu + 2\lambda)^2 - \Omega^2 \right] C = 0 \quad (10)$$

معادله مشخصه (۱۰) چهار ریشه خواهد داشت (روابط (۱۱) و (۱۲)):

$$\mu_{1,3} = -\lambda \pm i\sqrt{\Omega - \lambda^2}, \quad \Omega > \lambda^2$$

$$\mu_{2,4} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + \Omega} \quad (11)$$

$$\mu_{1,3} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \Omega}, \quad \Omega \leq \lambda^2$$

$$\mu_{2,4} = -\lambda \sqrt{\lambda^2 + \Omega} \quad (12)$$

در روابط (۱۱) و (۱۲) خواهیم داشت:

$$\Delta_1 = \begin{cases} \sqrt{\Omega - \lambda^2} & \rightarrow \Omega > \lambda^2 \\ 0 & \rightarrow \Omega = \lambda^2 \\ \sqrt{\lambda^2 - \Omega} & \rightarrow \Omega < \lambda^2 \end{cases} \quad (13)$$

همچنین شکل مود برای هرکدام از موارد ذکر شده به دست خواهد آمد (روابط (۱۴) تا (۱۶)) [۲۵]:

$$W(\xi) = e^{-\lambda\xi} [C_1 \cos(\Delta_1 \xi) + C_2 \sin(\Delta_1 \xi) + C_3 \cosh(\Delta_2 \xi) + C_4 \sinh(\Delta_2 \xi)] \rightarrow \Omega > \lambda^2 \quad (14)$$

$$W(\xi) = e^{-\lambda\xi} [C_1 + C_2 \xi + C_3 \cosh(\Delta_3 \xi) + C_4 \sinh(\Delta_3 \xi)] \rightarrow \Omega = \lambda^2 \quad (15)$$

$$W(\xi) = e^{-\lambda\xi} [C_1 \cosh(\Delta_1 \xi) + C_2 \sinh(\Delta_1 \xi) + C_3 \cosh(\Delta_2 \xi) + C_4 \sinh(\Delta_2 \xi)] \rightarrow \Omega < \lambda^2 \quad (16)$$

¹ Propagating Waves

² Evanescent Components

³ Pseudo-Frequency

مدرج تابعی نمایی به چهار رابطه مستقل جبری نیاز است که این معادلات برای شرایط مرزی مختلف استخراج می‌شوند.

۴- معادلات مشخصه شرایط مرزی متفاوت

در این بخش شرایط مرزی مختلف متداول را برای یک تیر مدرج تابعی در نظر گرفته و معادلات فرکانسی آن استخراج خواهند شد؛ همچنین فرکانس‌های طبیعی مورد ارزیابی قرار گرفته و شکل مودهای مربوطه به دست خواهند آمد.

۴-۱- شرط مرزی یکسرگیرداریکسرآزاد غیرهمگن محوری

تیرهای یکسرگیرداریکسرآزاد^۲ مدرج تابعی نمایی با معادلات شرایط مرزی بررسی خواهند شد (روابط (۲۲) و (۲۳)):

$$W(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (22)$$

$$M(1) = 0, \quad Q(1) = 0 \quad (23)$$

با این شرایط مرزی ذکر شده و با استفاده از روابط (۱۷) الی (۲۰)، دستگاه معادلات به دست خواهند آمد (روابط (۲۴) تا (۲۷)):

$$A_1 + A_3 = 0 \quad (24)$$

$$\Delta_1 A_2 - \lambda A_1 + \Delta_2 A_2 - \lambda A_3 = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & [-2\lambda\Delta_1 A_2 + \lambda^2 \Delta_1^2 A_1, \\ & 2\lambda\Delta_1 A_1 + (\lambda^2 - \Delta_1^2) A_2, \\ & -2\lambda\Delta_2 A_2 + (\lambda^2 + \Delta_2^2) A_3, \\ & -2\lambda\Delta_2 A_3 + (\lambda^2 + \Delta_2^2) A_4] V(1) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & [\lambda A_1 - \Delta_1 A_2, \Delta_1 A_1 + \lambda A_2, \\ & \Delta_2 A_4 - \lambda A_3, \Delta_2 A_3 - \lambda A_4] V(1) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

لذا بر اساس معادلات (۴۱) تا (۴۴)، مجموعه‌ای از معادلات خطی برحسب ضرایب $A_j (j=1,2,3,4)$ به دست می‌آیند که برای داشتن جواب غیربدهی، می‌بایست دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه ضرایب صفر شود که در نهایت با ساده‌سازی به رابطه (۲۸) منتهی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \Delta_1 \Delta_2 + \Delta_2 (\Delta_1 \cos \Delta_1 - 2\lambda \sin \Delta_1) \cosh \delta_2 \\ & - \lambda (2\Delta_1 \cos \Delta_1 - 3\lambda \sin \Delta_1) \sinh \Delta_2 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

رابطه استخراج شده معادله مشخصه فرکانسی دقیق برای تیرهای یکسرگیرداریکسرآزاد مدرج تابعی با جرم و سختی

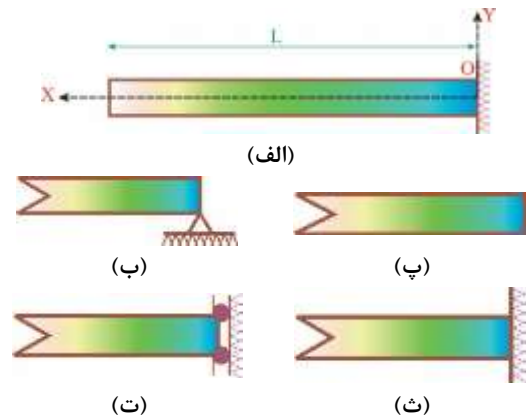
بدون بعد (در حالت امواج منتشرشونده یعنی رابطه (۱۴))، محاسبه می‌شوند (روابط (۱۷) تا (۲۰)):

$$W = e^{-\lambda \xi} [A_1, A_2, A_3, A_4] V \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi} = e^{-\lambda \xi} & [\Delta_1 A_2 - \lambda A_1, -(\Delta_1 A_1 + \lambda A_2) \\ & , \Delta_2 A_4 - \lambda A_3, \Delta_2 A_3 - \lambda A_4] V \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} M = G_0 e^{\lambda \xi} & [(\Delta_1^2 - \lambda^2) A_1 + 2\lambda \Delta_1 A_2, 2\lambda (\Delta_1^2 - \lambda^2) A_1 A_2 \Delta_1, \\ & 2\lambda \Delta_2 A_4, (\lambda^2 + \Delta_2^2) A_4 - (\lambda^2 + \Delta_2^2) A_3] V + 2\lambda \Delta_2 A_3 / L^2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Q = -\frac{\Omega^2 G_0 e^{\lambda \xi}}{L^3} & [\lambda A_1 - \Delta_1 A_2, \Delta_1 A_1 + \lambda A_2, \\ & \Delta_2 A_4 - \lambda A_3, \Delta_2 A_3 - \lambda A_4] V \end{aligned} \quad (20)$$



شکل ۱- الف) تیر مدرج تابعی نمایی محوری با شرایط مرزی: (ب) مفصل-P، (پ) آزاد-F، (ت) غلتکی-G و (ث) گیردار-C

که در این روابط A_i چهار ثابت غیرناپدیدشدنی^۱ یا همان ضرایب شکل مودهای تیر در حالت امواج منتشرشونده هستند و با توجه به شرایط مرزی سیستم استخراج می‌شوند؛ همچنین بردار ویژه هم که ترکیبی از دراپه‌های شکل مودهای مسئله (یا همان پاسخ رابطه (۶)) است، به صورت رابطه (۲۱) بیان می‌شود:

$$V = [\cos \Delta_1 \xi, \sin \Delta_1 \xi, \cosh \Delta_2 \xi, \sinh \Delta_2 \xi]^T \quad (21)$$

در رابطه (۲۱) نیز بالانویس T بیانگر ترانهاده بردار یا ماتریس است. برای مشخص کردن فرکانس‌های تیرهای

² Clamped-Free

⁴ Non-Vanishing Constants

مودهای نمایی و یا به طور معادل توابع هذلولوی به جای توابع مثلثاتی می‌شوند که با ارتعاشات هارمونیک ناشی از امواج منتشر شونده نیز همخوانی ندارند؛ در نتیجه می‌توان گفت که فرکانس‌های طبیعی تعیین شده می‌بایست از مقدار بحرانی بزرگ‌تر باشند. شکل ۲ الی ۸ تأثیرات تغییرات پارامتر گرادیان روی مجذور فرکانس طبیعی را به ازای شرایط مرزی مختلف نشان می‌دهد (براساس نتایج ارائه شده در جدول (۱)). در شکل (۲) شش فرکانس طبیعی برای تیر یکسرگیردار یکسرآزاد رسم شده است. همچنان که مشخص است، منحنی‌های فرکانسی گسسته هستند. به طور مثال فرکانس پایه‌ای ($\sqrt{\Omega_1}$) که با ستاره سبز نشان داده شده است، با افزایش λ کاهش یافته تا به مقدار بحرانی مینیمم، یعنی $\sqrt{\Omega_1} = 1.2$ می‌رسد، سپس فرکانس محاسبه شده بعدی از این منحنی حذف می‌شود و به منحنی بالا و کناری این منحنی پرش می‌کند. این رخداد به دلیل این واقعیت است که $\Omega_1^2 < \lambda$ و به همین دلیل فرکانس طبیعی دوم، به فرکانس پایه‌ای تبدیل می‌شود. به طور مشابه نیز با ادامه روند افزایشی λ پارامتر فرکانس ($\sqrt{\Omega_1}$) تا حدی کاهش می‌یابد تا به مرز ناحیه هاشور خورده ($\Omega_1^2 < \lambda$) برسد و مقدار λ به عدد ۳.۲ برسد و دوباره رفتار پرشی از خود نشان می‌دهد. مطابق شکل (۲) همان‌طور که فرکانس پایه دارای رفتار پرشی است، در مودهای دیگر نیز پارامتر فرکانس همین ویژگی را دارد. به عبارت دیگر، با عبور از مقادیر مشخص λ فرکانس طبیعی n -ام به فرکانس $(n-1)$ -ام تبدیل می‌شود. این پدیده را می‌توان چنین توضیح داد: به‌عنوان مثال برای $\lambda = 5$ ، چون پارامتر Δ_1 در V (رابطه (۲۱)) مقداری حقیقی ندارد و برای $\sqrt{\Omega} > 5$ مقداری موهومی دارد، لذا فرکانس پایه را باید در $\sqrt{\Omega} > 5$ جستجو کرد و به همین دلیل در شکل ۲ منحنی پارامتر فرکانس، ناپیوسته و یا دارای پدیده پرش است. برای مقادیر $\sqrt{\Omega} < 5$ ، تیر برای ارتعاشات هارمونیک تحریک نمی‌شود و فقط برای مقادیر $\sqrt{\Omega} > 5$ امواج منتشر شونده مشاهده خواهند شد. این پدیده مشابه طیف دوم فرکانس تیرهای تیموشنکو است که رفتار ارتعاشی هارمونیک آن‌ها فقط در فرکانس‌های بزرگ‌تر از فرکانس بحرانی رخ می‌دهد و در فرکانس‌های کمتر از مقدار بحرانی، میدان‌های غیرانتشاری در آن‌ها تجربه می‌شود [۳۲]. در هر صورت طیف اول فرکانس تیرهای تیموشنکو و طیف انحصاری فرکانس

متغیر نمایی منطبق بر رابطه (۱) است؛ همچنین اگر در رابطه (۲۸)، برای پارامتر بدون بعد تغییرات مقدار صفر در نظر گرفته شود ($\lambda=0$)، رابطه (۲۹) به دست خواهد آمد:

$$1 + \cos \sqrt{\Omega} \cosh \sqrt{\Omega} = 0 \quad (29)$$

رابطه (۲۹) همان معادله فرکانسی شناخته شده برای تیرهای با سطح مقطع ثابت و مواد همگن با شرایط مرزی یکسرگیردار یکسرآزاد است [۲۷].

برای شرایط مرزی دیگر در جدول ۱، نتایج نهایی ارائه شده‌اند. معادلات مشخصه فرکانسی برای تیرهای اویلر - برنولی غیریکنواخت با سختی خمشی و چگالی جرمی نمایی (یا به طور معادل تیرهای با ضخامت ثابت و عرض کاهشی نمایی) برای تیرهای دوسرمفصل، دوسرگیردار و یکسرگیردار یکسرآزاد در مراجع [۲۸-۳۱] آمده است. لازم به ذکر است، از آنجایی که شرایط انتهایی تیر آزاد در نظر گرفته شده، رابطه (۴۰) در این پژوهش با پژوهش‌های قبلی [۳۰، ۳۱] متفاوت است، معادله مشخصه فرکانسی استخراج شده نیز متفاوت است و معادلات فرکانسی حالات دیگر تا به حال گزارش نشده‌اند. بر طبق جدول (۱)، معادلات مشخصه فرکانسی سه جفت از شرایط مرزی موجود یعنی تیر دوسرگیردار در مقابل دوسرآزاد، تیر یکسرگیردار یکسرغلتکی^۱ در مقابل یکسرآزاد یکسرغلتکی و تیر یکسرگیردار یکسرمفصل در مقابل یکسرمفصل یکسرآزاد یکسان هستند. با فرض $\lambda=0$ ، معادلات مشخصه ارائه شده در جدول (۱)، تبدیل به معادلات مشخصه فرکانسی مرسوم برای تیرهای یکنواخت متشکل از مواد همگن [۲۷] می‌شوند.

۵- بحث و نتایج

در جدول ۱، معادلات مشخصه فرکانسی تیر مدرج تابعی برای شرایط گوناگون مرزی به طور صریح ارائه شده‌اند، لذا استخراج فرکانس‌های طبیعی از معادلات مذکور به وسیله روش‌های عددی، موضوع ساده‌ای است. با این حال خاطر نشان می‌شود که به ازای پارامترهای گرادیان نمایی معینی (λ)، فرکانس طبیعی بدون بعد محاسبه شده ممکن است که از مقدار بحرانی کمتر باشد که منجر به تشکیل شکل

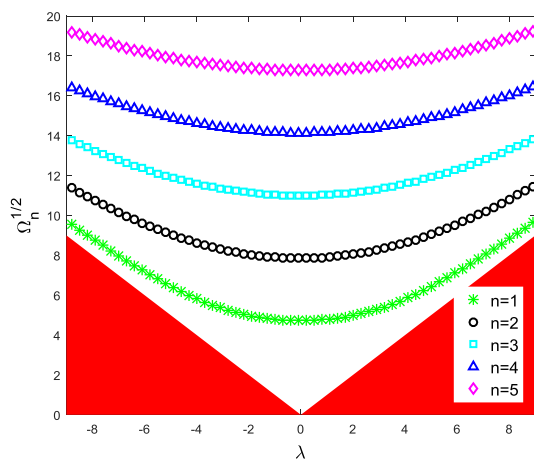
^۱ Clamped-Guided

دوسرمفصل منحنی فرکانس گسسته است و دارای پرش در نمودار است. در تمامی نمودارها منحنی‌های فرکانسی نیز با رفتار افزایشی ظاهر می‌شوند. تنها تفاوت موجود در طیف فرکانسی تیرها با شرایط مرزی مختلف این است که برای شرایط مرزی دوسرمفصل، یکسرغلتکی یکسرمفصل و یکسرگرداریکسرآزاد، در دو موقعیت امکان پرش فرکانس وجود دارد؛ اما برای تیرهای یکسرگردار یکسرمفصل، یکسرآزاد یکسرمفصل، یکسرگردار یکسرغلتکی، یکسرغلتکی

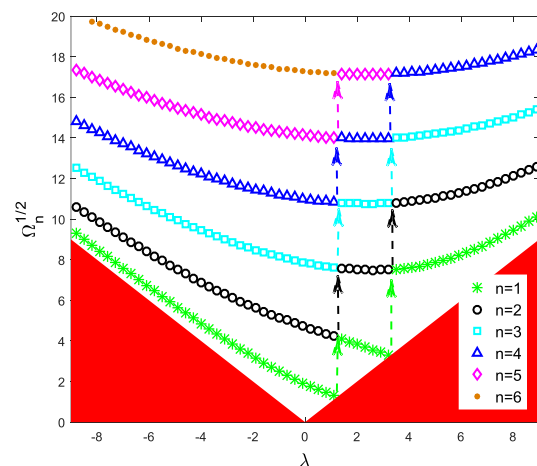
تیرهای اوپلر-برنولی همیشه با رفتار ارتعاشی هارمونیک هماهنگی دارند. براساس شکل ۲ الی ۸ برای تیرهای مدرج تابعی نمایی با شرایط مرزی دلخواه، می‌توان پارامتر گردایان بهینه‌ای پیدا کرد که به ازای آن، فرکانس‌های پایه به مقدار مینیمم خود برسند. در شکل‌های بعدی مانند تیر دوسرگردار منحنی فرکانسی می‌تواند متقارن باشد، چرا که شرایط مرزی دو سمت تیر یکسان هستند. برای تیر دوسرگردار نمودار فرکانس پیوسته است اما برای تیر

جدول ۱- معادلات مشخصه برای تمامی شرایط مرزی مختلف سیستم

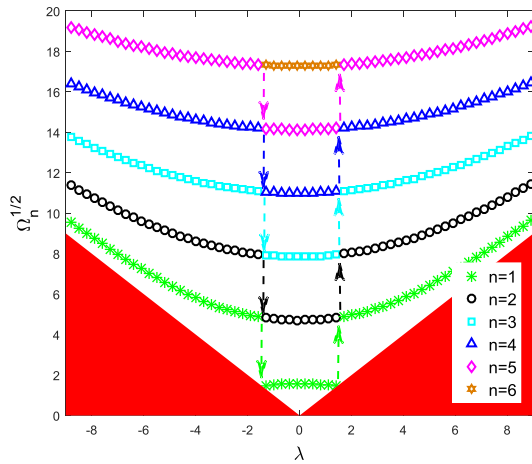
شرایط مرزی	معادله مشخصه
دوسرگردار-دوسرآزاد	$\Delta_1 \Delta_2 (1 - \cosh \Delta_2 \cos \Delta_1) + \lambda^2 \sinh \Delta_2 \sin \Delta_1 = 0$
دوسرمفصل	$2\lambda^2 \Delta_1 \Delta_2 (1 - \cosh \Delta_2 \cos \Delta_1) + (2\lambda^4 - \Omega^2) \sinh \Delta_2 \sin \Delta_1 = 0$
دوسرغلتکی	$\sin \Delta_1 = 0$
یکسرگردار یکسرآزاد	$\Delta_1 \Delta_2 (1 + \cosh \Delta_2 \cos \Delta_1) + 3\lambda^2 \sinh \Delta_2 \sin \Delta_1 - 2\lambda (\Delta_1 \sinh \Delta_2 \cos \Delta_1 + \Delta_2 \cosh \Delta_2 \sin \Delta_1) = 0$
یکسرگردار یکسرغلتکی یکسرآزاد یکسرغلتکی	$\Delta_1 \sinh \Delta_2 \cos \Delta_1 + \Delta_2 \cosh \Delta_2 \sin \Delta_1 - 2\lambda \sinh \Delta_2 \sin \Delta_1 = 0$
یکسرآزاد یکسرمفصل یکسرگردار یکسرمفصل	$2\lambda \Delta_1 \Delta_2 (1 - \cosh \Delta_2 \cos \Delta_1) + 2\lambda^3 \sinh \Delta_2 \sin \Delta_1 + \Omega (\Delta_1 \sinh \Delta_2 \cos \Delta_1 - \Delta_2 \cosh \Delta_2 \sin \Delta_1) = 0$
یکسرمفصل یکسرغلتکی	$\Delta_1 \Delta_2 \cosh \Delta_2 \cos \Delta_1 - \lambda^2 \sinh \Delta_2 \sin \Delta_1 = 0$



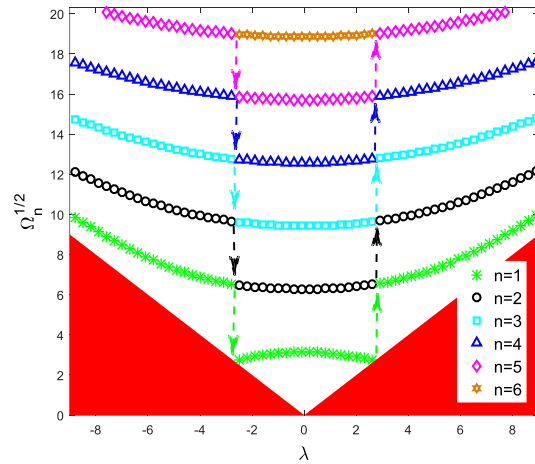
شکل ۲- طیف فرکانسی تیر دوسرگردار - دوسرآزاد مدرج تابعی به ازای پارامتر گردایان



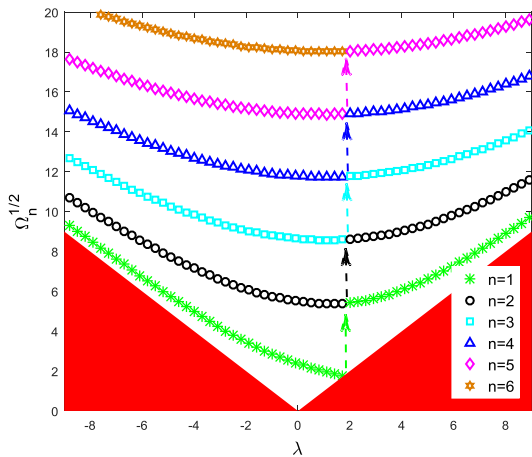
شکل ۱- طیف فرکانسی تیر یکسرگردار یکسرآزاد مدرج تابعی به ازای پارامتر گردایان



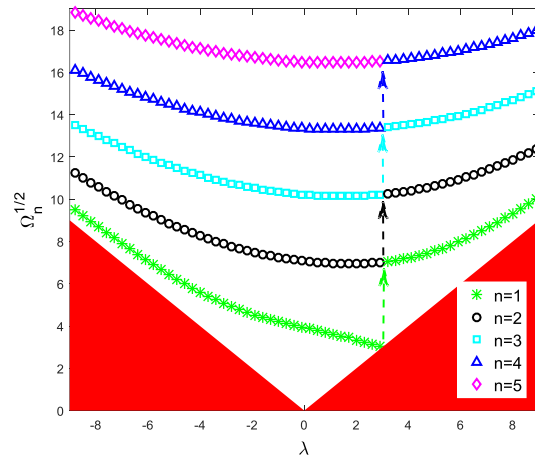
شکل ۵- طیف فرکانسی تیر یکسرغلتکی یکسر مفصل مدرج تابعی به ازای پارامتر گرادیان



شکل ۳- طیف فرکانسی تیر دوسر مفصل مدرج تابعی به ازای پارامتر گرادیان



شکل ۶- طیف فرکانسی تیر یکسر گیردار یکسر غلتکی - یکسر آزاد یکسر مفصل مدرج تابعی به ازای پارامتر گرادیان



شکل ۴- طیف فرکانسی تیر یکسر گیردار یکسر مفصل - کسر آزاد یکسر مفصل مدرج تابعی به ازای پارامتر گرادیان

فرکانس طبیعی به دست آمده، برای تیرهایی با مواد همگن است و با افزایش و یا کاهش پارامتر گرادیان، بسته به شیب نمودار می‌تواند فرکانس تیر کاهش یا افزایش یابد [۳۳-۳۵].

برای تیرهای دوسرگیردار یا دوسرآزاد شکل ۳ و تیرهای دوسرغلتکی (شکل ۷)، به دلیل این که به ازای $\lambda=0$ ، مینیمم نمودار طیف فرکانسی رخ داده است، لذا با هر تغییر برای پارامتر گرادیان، چه افزایش و چه کاهش آن، فرکانس افزایش می‌یابد و فرکانس تیر مدرج تابعی نسبت به تیر ایزوتروپیک بیشتر خواهد شد؛ اما در تیرهای یکسرگیردار یکسرآزاد

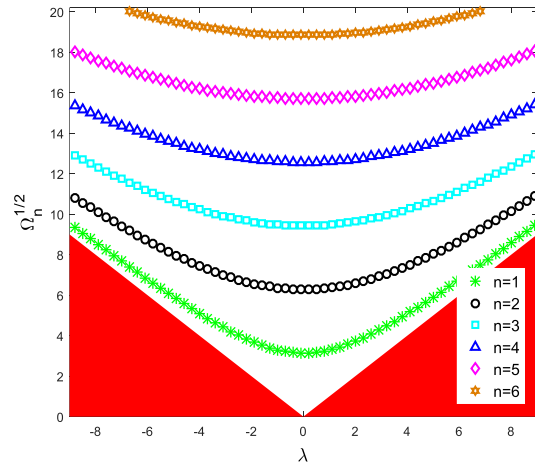
یکسرآزاد، یکسرگیردار یکسر مفصل، یکسرآزاد یکسر مفصل در یک موقعیت امکان پرش وجود دارد و برای تیرهای دوسرگیردار، دوسرآزاد و دوسرغلتکی پرش وجود ندارد. فرکانس پایه برای همه شرایط مرزی بررسی شده در شکل ۸ آورده شده است. اگر در معادله مشخصه فرکانسی استخراج شده برای شرایط مرزی مختلف، پارامتر گرادیان صفر در نظر گرفته شود ($\lambda=0$)، معادله فرکانسی شناخته شده برای تیرهای مختلف با سطح مقطع ثابت و مواد همگن (ایزوتروپیک) به دست خواهد آمد. این نکته بیانگر این موضوع است که اگر در تمامی شکل‌های ۲ الی ۸ در مقطع

بدون بعد استخراجی از تیرهای مدرج تابعی (با سختی خمشی و جرم گسترده نمایی) را با نتایج مطالعات دیگر (تیرهای ضخامت ثابت و عرض کاهنده نمایی) مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشخص است، نتایج تحقیق حاضر با مراجع موجود در ادبیات انطباق خوبی دارند [۳۷-۳۵].

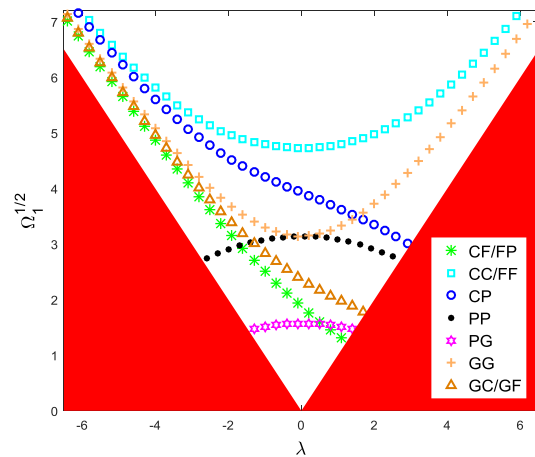
جدول ۲- مقایسه نتایج مقاله حاضر با فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر یکسرگیردار با عرض کاهنده نمایی

ر.ا	پژوهش حاضر	[۲۵]	[۳۰]	[۳۱]	[۳۲]
	۴/۷۳۴۲	۴/۷۳۴	۴/۷۲۲۹	۴/۷۲۳	۴/۷۳۴۷
	۲۴/۲۰۱	۲۴/۲۰۱	۲۴/۲۰۱	۲۴/۲۰۱	۲۴/۲۰۵
۰/۱۵	۶۳/۸۶۴	۶۳/۸۶۵	۶۳/۸۶۴	۶۳/۸۶۴	۶۳/۸۶۰
	۱۲۳/۰۹۸	۱۲۳/۱۰	۱۲۳/۰۹	۱۲۳/۰۹	۱۲۳/۰۹
	۲۰۲/۰۶۹	۲۰۲/۰۷	۲۰۲/۰۶		
	۶/۲۶۲۴	۶/۲۶۲۶	۶/۲۵۸۸		
	۲۶/۵۸۳۴	۲۶/۵۸۴	۲۶/۵۸۴		
۱	۶۶/۳۷۴۸	۶۶/۳۷۵	۶۶/۳۷۴		
	۱۲۵/۶۸۶	۱۲۵/۶۹	۱۲۵/۶۸		
	۲۰۳/۶۹۵	۲۰۴/۷۰	۲۰۴/۷۰		

در شکل ۹ و ۱۰ به ترتیب چهار مود اول تیرهای مدرج تابعی نمایی دوسرهمفصل و یکسرگیردار طبق رابطه (۱۷) رسم شده‌اند (براساس معادله (۱۷)). برای سادگی، شکل مودها در $e^{\lambda x/L}$ ضرب و نمایش داده شده‌اند؛ همچنین لازم به ذکر است که شکل مودهای مورد نظر نرمالیزه نشده‌اند و بردار ویژه مشخصه آن‌ها $(A=[A_1, A_2, A_3, A_4])$ نرمالیزه شده است $(\|A\|=I)$. همان‌طور که از نمودارهای شکل مودها مشخص است، نرخ تغییرات مواد، تأثیر زیادی بر اولین شکل مود تیرها دارد که این اثر در مودهای بالاتر کمتر می‌شود. این ویژگی به این معنا است که اجزای غیرانتشاری در امواج خمشی مربوط به توابع هایپربولیک (رابطه (۱۷))، در دامنه



شکل ۷- طیف فرکانسی تیر دوسرهمفصلی مدرج تابعی به ازای پارامتر گرادیان

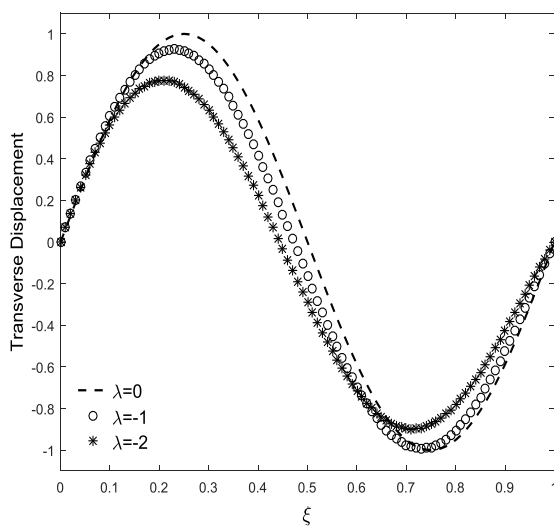


شکل ۸- فرکانس پایه برای تمامی شرایط مرزی

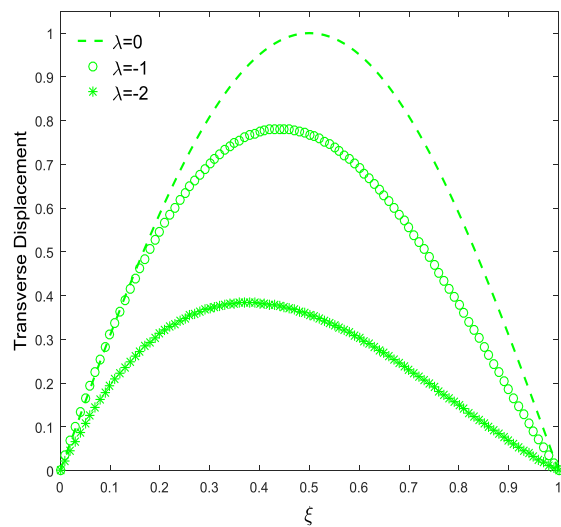
(شکل ۲) و تیرهای یکسرگیردار یکسرمفصل یا یکسرآزاد یکسرمفصل (شکل ۴) و تیرهای یکسرگیردار یکسرهمفصلی یا یکسرهمفصلی یکسرآزاد (شکل ۶)، به دلیل نزولی بودن نمودار، با افزایش پارامتر گرادیان، فرکانس تیر تابعی مدرج نسبت به تیر ایزوتروپیک کاهش می‌یابد؛ اما بالعکس با کاهش پارامتر گرادیان، فرکانس تیر تابعی تیر مدرج تابعی نسبت به تیر ایزوتروپیک افزایش می‌یابد. برای تیرهای دوسرهمفصل (شکل ۴) و یکسرهمفصلی یکسرمفصل (شکل ۵)، به جز مود اول که در $\lambda=0$ فرکانس طبیعی بیشینه است، در باقی مودها کمینه فرکانسی رخ داده و با هر تغییری فرکانس افزایش می‌یابد. در جدول ۲ به منظور صحت‌سازی نتایج، فرکانس‌های

تغییر پیدا می‌کند و به دلیل تقویت ترم‌های غیرهارمونیک نمایی از حالت شناخته شده هارمونیک خود فاصله پیدا می‌کند که این تغییر شکل در مودهای ابتدایی کاملاً محسوس‌تر است. این تغییرات در مودهای بالاتر به حدی کاهش می‌یابد که تفاوت ناچیزی بین تیرهای تابعی مدرج و تیرهای ایزوتروپیک دیده می‌شود. همچنین همان‌طور که انتظار می‌رود، با افزایش پارامتر گرادیان نیز این تغییرات نمایان‌تر هستند.

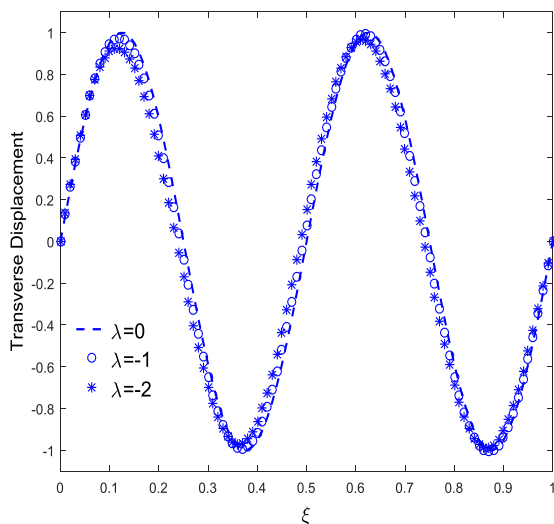
ارتعاشات تیر، نقش مهم‌تری ایفا می‌کنند و با افزایش شماره مود، این تأثیر به آرامی کمتر می‌شود. در کل با افزایش λ و یا با کاهش شماره مود، اثر اجزای غیرانتشاری به تدریج افزایش می‌یابد. فرکانس استخراج شده باید از مقدار بحرانی کمتر باشد تا مود مربوطه شامل امواج انتشاری باشد، در غیر این صورت پدیده پش در فرکانس‌ها و مودهای ارتعاشاتی رخ خواهد داد. به بیان ساده دیگر، وقتی جنس مواد تشکیل دهنده تیر از حالت ایزوتروپیک به حالت تابعی مدرج تغییر می‌کند، شکل مود



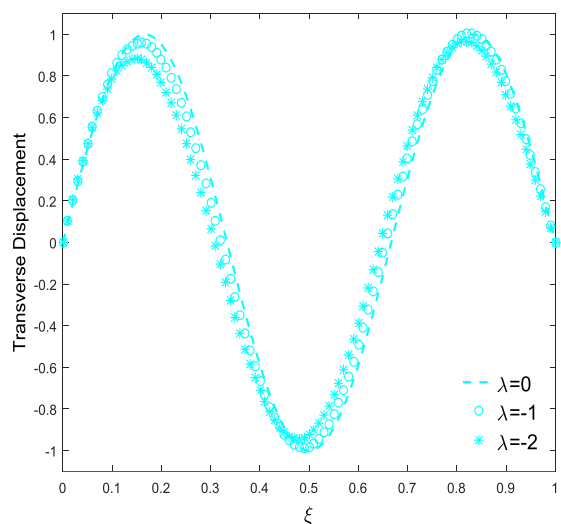
(ب)



(الف)

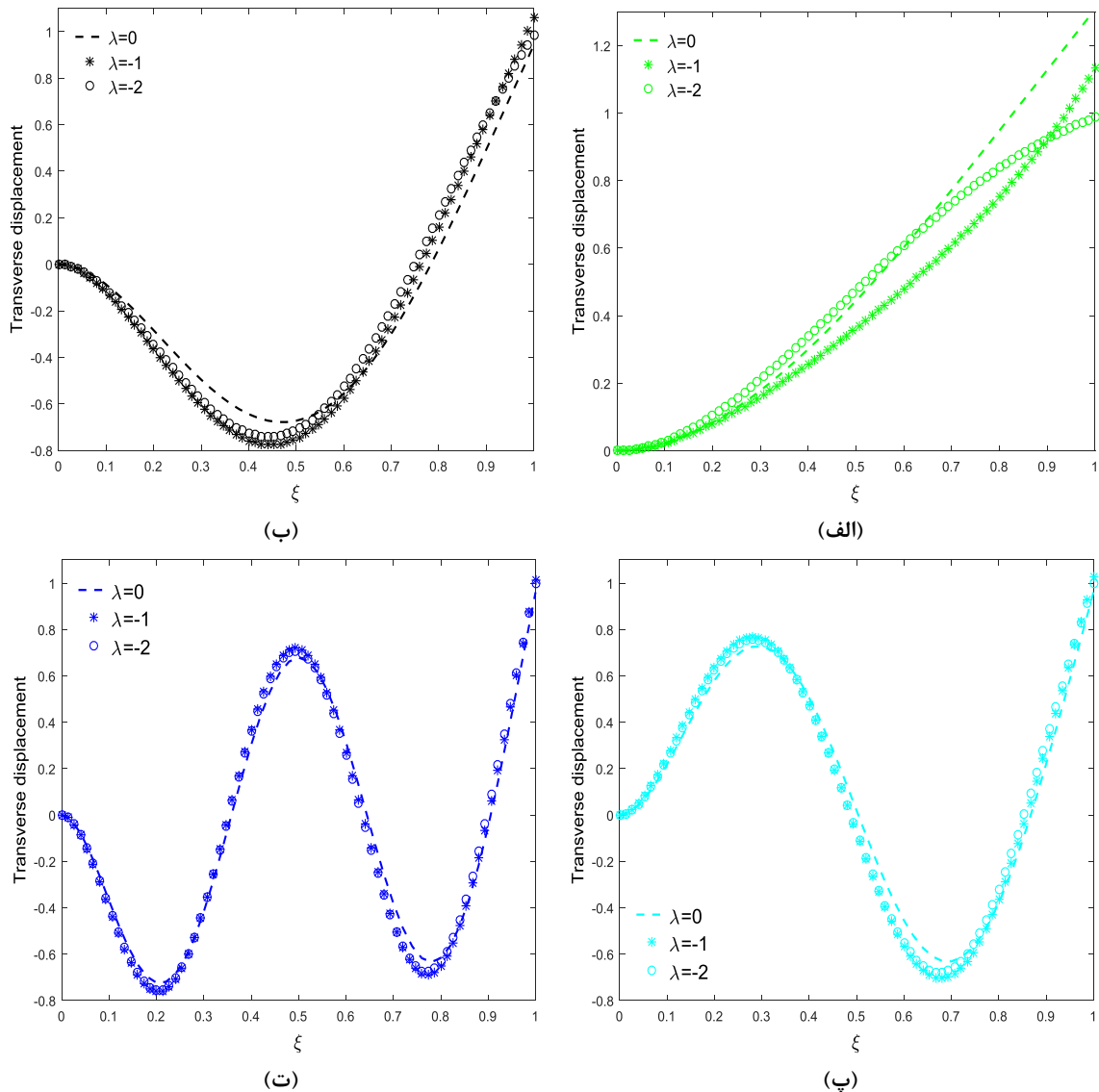


(ت)



(پ)

شکل ۹- (الف، ب، پ، ت) به ترتیب چهار مود اول تیر دوسر مفصل مدرج تابعی با پارامترهای گرادیان مختلف



شکل ۱۰- (الف، ب، پ، ت) به ترتیب چهار مود اول تیر یکسرگیردار مدرج تابعی با پارامترهای گرادیان مختلف

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله به تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی نمایی محوری پرداخته شده است. فرکانس‌های طبیعی و پایه‌ای سیستم به صورت صحیح ارائه شده‌اند و معادلات مشخصه فرکانسی، برحسب شرایط مرزی مختلف به صورت فرم بسته و صریح استخراج شده‌اند. در این معادلات اگر پارامتر گرادیان نادیده گرفته شود، به معادلات مشخصه تیرهای اوپلر-برنولی شناخته شده تبدیل می‌شوند. در ادامه فرکانس‌های طبیعی سیستم و شکل مودهای ارتعاشی به

ازای تغییرات پارامتر گرادیان رسم شدند و با تیرهایی از جنس مواد ایزوتروپیک و تیرهایی با عرض کاهنده نمایی مقایسه شدند. به طور خاص، برای تیرهای مدرج، فرکانس طبیعی سیستم با عبور از فرکانس بحرانی مورد نظر، پدیده پرش را تجربه خواهد کرد. نتایج نشان دادند که برای فرکانس‌های بیشتر از مقدار بحرانی، ارتعاشات منتشرشونده هارمونیک رخ خواهد داد و برای مقادیر کمتر از آن امواج محو شونده مشاهده خواهند شد؛ همچنین در مودهای بالاتر پارامتر گرادیان تأثیر کمتری بر پاسخ سیستم خواهند

- with circular cross-section. *Int J Mech Sci* 46(6): 929-944.
- [15] Zhao Y, Huang Y, Guo M (2017) A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory. *Compos Struct* 168: 277-284.
- [16] Elishakoff I (2004) *Eigenvalues of inhomogeneous structures: unusual closed-form solutions*. CRC Press.
- [17] Huang Y, Li X-F (2010) A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section. *J Sound Vib* 329(11): 2291-2303.
- [18] Jafari A, Fathabadi, M (2013) Forced vibration of FGM Timoshenko beam with piezoelectric layers carrying moving load. *Aerospace Mechanics Journal* 9(2): 69-77. (In Persian)
- [19] Mousavi Z, Saidi A (2016) Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Rectangular Plates Based on The Higher-Order Shear and Normal Deformable. *Aerospace Mechanics Journal* 12(1): 1-12. (In Persian)
- [20] Bazkiaei A, Tarzajani H, Mohammadi N (2017) Free Vibration Analysis Of Thin Functionally Graded Materials Plates On Winkler Elastic Foundation By Differential Quadrature Element Method. *Journal of Modeling in Engineering* 15(4): 89-99. (In Persian)
- [21] Rahmani B, Gholami F (2015) Robust vibration control of a functionally graded cracked beam. *J Sci Technol Compos* 2(6): 41-52.
- [22] Shahba A, Attarnejad R, Marvi MT, Hajilar S (2011) Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Compos Part B-Eng* 42 (4): 801-808.
- [23] Li X-F, Xi L-Y, Huang Y (2011) Stability analysis of composite columns and parameter optimization against buckling. *Compos Part B-Eng* 42(6): 1337-1345.
- [24] Chakrabarti A, Ray P, Bera RK (2010) Large amplitude free vibration of a rotating nonhomogeneous beam with nonlinear spring and mass system. *J Vib Acoust* 110(3): 229-247.
- [25] Wang C, Wang C (2012) Exact vibration solution for exponentially tapered cantilever with tip mass. *J Vib Acoust* 134 (4): 12-41.
- [26] Gilat R, Calio I, Elishakoff I (2010) Inhomogeneous beams possessing an exponential mode shape. *Mech Res Commun* 37(4): 417-426.
- [26] Karnovsky I, Lebed O (2000) *Formulas for structural dynamics: tables, graphs and solutions*. McGraw Hill Professional.
- داشت. ضمناً با توجه به شرایط مرزی سیستم می‌توان فرکانس پایه‌ای سازه را به ازای تغییرات پارامتر گرادبان، کاهش یا افزایش داد.

۵- مراجع

- [1] Reddy J (2000) Analysis of functionally graded plates. *Int J Numer Meth Eng* 47(1-3): 663-684.
- [2] Kim N-I, Lee J (2017) Coupled vibration characteristics of shear flexible thin-walled functionally graded sandwich I-beams. *Compos Part B-Eng* 110(6): 229-247.
- [3] Shen HS (2016) *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*. CRC press, New York.
- [4] Chi S, Chung Y (2006) Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part I: Analysis. *Int J Solids Struct* 43(13): 3657-3674.
- [5] Sankar B (2001) An elasticity solution for functionally graded beams. *Compos Sci Technol* 61(5):689-696.
- [6] Zhong Z, Yu T (2007) Analytical solution of a cantilever functionally graded beam. *Compos Sci Technol* 67(3):481-488.
- [7] Ding H, Huang D, Chen W (2007) Elasticity solutions for plane anisotropic functionally graded beams. *Int J Solids Struct* 44(1):176-196.
- [8] Lü C, Chen W, Xu R, Lim CW (2008) Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams. *Int J Solids Struct* 45(1):258-275.
- [9] Chen W, Chang H (2017) Closed-Form Solutions for Free Vibration Frequencies of Functionally Graded Euler-Bernoulli Beams. *Mech Compos Mater* 53(1):79-98.
- [10] Aydogdu M, Taskin V (2007) Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. *Mater Design* 28(5):1651-1656.
- [11] Li X-F (2008) A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams. *J Sound Vib* 318(4):1210-1229.
- [12] Sina S, Navazi H, Haddadpour H (2009) An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. *Mater Design* 110:229-247.
- [13] Şimşek M (2010) Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nucl Eng Des* 240(4): 697-705.
- [14] Kang J-H, Leissa AW (2004) Three-dimensional vibration analysis of thick, tapered rods and beams

- reduction effect on the efficiency of piezopolymer vibration energy harvester. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 7(3): 41-51. (In Persian)
- [34] Hosseini R, Hamed M, Ebrahimi Mamaghani A, Kim HC, Kim J, Dayou J (2017b) Parameter identification of partially covered piezoelectric cantilever power scavenger based on the coupled distributed parameter solution. *Int J Smart Nano Mater* 8(2-3): 110-124.
- [35] Mamaghani AE, Khadem S, Bab S (2016) Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynam* 86(3): 1761-1795.
- [36] Mamaghani AE, Khadem SE, Bab S, Pourkiaee SM (2018) Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment. *Int J Mech Sci* 138(1): 427-447.
- [37] Mamaghani AE, Zohoor H, Firoozbakhsh K, Hosseini R (2013) Dynamics of a running below-knee prosthesis compared to those of a normal subject. *Journal of Solid Mechanics* 5(2): 152-160.
- [27] Suppiger EW, Taleb NJ (1956) Free lateral vibration of beams of variable cross section. *Z Angew Math Phys (ZAMP)* 7(6): 501-520.
- [28] Cranch E, Adler AA (1956) Bending vibrations of variable section beams. *J Appl Mech* 23(1): 103-108.
- [29] Ece MC, Aydogdu M, Taskin V (2007) Vibration of a variable cross-section beam. *Mech Res Commun* 34(1): 78-84.
- [30] Ait Atmane H, Tounsi A, Meftah SA, Belhadj HA (2011) Free vibration behavior of exponential functionally graded beams with varying cross-section. *J Vib Control* 17(2): 311-318.
- [31] Stephen N (2006) The second spectrum of Timoshenko beam theory—Further assessment. *J Sound Vib* 292(1): 372-389.
- [32] Tong X, Tabarrok B, Yeh K (1995) Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section. *J Sound Vib* 186(5): 821-835.
- [33] Hosseini R, Ebrahimi mamaghani A, Nouri M (2017) An experimental investigation into width