



بررسی پایداری یاتاقان‌های ژورنال غیرمدور لب‌دار روانکاری شده با فرّوسیال

رضا رشیدی میبیدی^{۱*}، نیما فرهی‌فر^۲، اصغر دشتی رحمت‌آبادی^۳ و مهدی زارع مهرجردی^۴

^۱ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

^۳ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

^۴ استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اردکان، اردکان

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۲/۰۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۱۲/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۳/۲۷

چکیده

امروزه تقاضا برای به‌کارگیری یاتاقان‌های ژورنال در دوره‌های بالا و اهمیت پایداری آن‌ها در کاربردهای عملی سبب شده، از یاتاقان‌های غیرمدور لب‌دار به‌جای یاتاقان مدور استفاده شود؛ همچنین تأثیرات فوق‌العاده‌ی نوع روانکار بر عملکرد یاتاقان‌ها، روزبه‌روز اهمیت خود را آشکارتر می‌کنند. در این راستا انتخاب روانکار مناسب، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. فرّوسیال‌ها به‌دلیل داشتن خواص منحصربه‌فرد می‌توانند به‌عنوان یکی از گزینه‌ها، مورد بررسی واقع شوند. هدف از انجام پژوهش حاضر، بررسی پایداری یاتاقان‌های ژورنال غیرمدور دو، سه و چهارلب روانکاری‌شده با روانکار فرّوسیال با در نظر گرفتن پارامترهایی نظیر، نسبت خروج از مرکزیت، ابعاد و ضریب نیروی مغناطیسی است. در این مطالعه با در نظر گرفتن اغتشاش کوچک محور حول نقطه تعادل استاتیکی آن و استفاده از روش عددی اجزاء محدود جهت حل معادلات، فرکانس چرخش و محدوده پایداری سیستم تعیین می‌شود. نتایج حاکی از آن است که با افزایش نسبت خروج از مرکزی و ابعاد و کاهش ضریب نیروی مغناطیسی، پایداری سیستم افزایش می‌یابد؛ همچنین با افزایش تعداد لب‌ها در یاتاقان‌های غیرمدور فرّوسیال، می‌توان به محدوده پایداری دست‌یافت.

کلیمات کلیدی: یاتاقان غیرمدور؛ روانکار فرّوسیال؛ ضریب نیروی مغناطیسی؛ پایداری.

Investigation of Stability of Noncircular Lobed Journal Bearings Lubricated by Ferrofluid

R. Rashidi Meybodi^{1,*}, N. Farehyfar², A. Dashti Rahmatabadi³, M. Zare Mehrjardi⁴

¹ Assis. Prof., Mech. Eng., Payame Noor Univ., Tehran, Iran.

² M. Sc. Student, Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.

³ Assoc. Prof., Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.

⁴ Assis. Prof., Mech. Eng., Ardakan Univ., Ardakan, Iran.

Abstract

Nowadays, the demand for journal bearings operating at high speeds and also the importance of their stability in practical usage has caused a need for noncircular lobed bearings instead of circular bearings. This makes the extreme effects of lubrication kind in bearing performance more important. For this reason, choosing appropriate lubricant is of great significance. Ferrofluids as a result of having unique features can be considered as one of the choices. The aim of this paper is to study the stability of two, three and four lobe noncircular journal bearings lubricated with ferrofluids considering parameters such as eccentricity ratio, the ratio of length to diameter and also the magnetic force coefficient. In this work, by considering small perturbation of journal about its static equilibrium position and using the numerical method of finite elements to solve the equations, whirling frequency and stability domain are obtained. The results show that by increasing the eccentricity ratio and the length to diameter ratio and also by decreasing the magnetic force coefficient, bearing stability increases. As well as, by increasing the number of lobes in noncircular lobed bearings, it is possible to get more stability range.

Keywords: Noncircular Bearing; Magnetic Force Coefficient; Ferrofluid Lubricant; Stability.

۱- مقدمه

فرّوسیال^۱ به محلولی اطلاق می‌شود که در حضور میدان مغناطیسی به شدت از خود خاصیت مغناطیسی نشان می‌دهد. این ماده برای اولین بار توسط ناسا به عنوان سوختی معرفی گردید که قابلیت هدایت به قسمت‌های مختلف موشک در حالت بی‌وزنی دارد. به‌طور کلی فرّوسیال‌ها، از سه قسمت سیال پایه، ذرات فرّومغناطیسی و یک پوشش روی هر ذره تشکیل شده‌اند. بسیاری از خواص فرّوسیال، شبیه به سیال پایه است. از آنجاکه غلظت ذرات مغناطیسی کم است (۳ تا ۱۰ درصد)، در نتیجه تأثیری بر چگالی، فشار بخار و خواص شیمیایی مایع ندارند، اما باعث افزایش گرانشی فرّوسیال در مقایسه با گرانشی سیال پایه می‌شوند.

فرّوسیال‌ها به دلیل قرار گرفتن در زیرمجموعه علم نانو و دارا بودن ویژگی‌های منحصر به فرد می‌توانند در زمینه‌های مختلف، مخصوصاً علم مکانیک و به عنوان روانکار نقش بسزایی را ایفا کنند. کاربرد فرّوسیال‌ها، معمولاً بر اساس توانایی کنترل آن‌ها به وسیله یک نیروی مغناطیسی خارجی پایه‌گذاری می‌شود. محلول‌های مغناطیسی هنگامی که در معرض میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرند، گرانشی آن‌ها افزایش و در نتیجه ظرفیت تحمل بار آن‌ها بهبود می‌یابد. این عوامل باعث کاربرد مهم چنین سیالاتی از جمله، در مهندسی روانکاری، به‌ویژه در یاتاقان ژورنال، یاتاقان محوری و یاتاقان‌های کوتاه می‌شود. نتایج آزمایش‌ها بر فرّوسیال‌ها تحت میدان‌های مغناطیسی مختلف نشان داده است که عملکرد خوبی در کاهش اصطکاک داشته، طول عمر یاتاقان را نیز می‌توانند تا حدود زیادی بهبود بخشند.

اولین تحقیقات در رابطه با روانکاری فرّوسیال، توسط تاراپوو^۲ [۱] در سال ۱۹۷۲ گزارش شده است. وی با بررسی روانکاری یک یاتاقان ژورنال صفحه‌ای با فرّوسیال و با ارائه دو مدل سیم حامل جریان با شار محوری و جریان در سیم با توزیع محوری و جانبی گزارش نموده است که ظرفیت تحمل بار با افزایش شدت میدان مغناطیسی، افزایش می‌یابد. در سال ۱۹۸۶، آگروال^۳ [۲] عملکرد یاتاقان لغزشی صفحه‌ای

شیب‌دار با طول بی‌نهایت را با روانکار سیال مغناطیسی و با نادیده گرفتن کلیه اثرات لغزشی روی سطح فیلم بررسی نموده است. کومار^۴ و همکاران [۳]، در همین سال با بررسی یاتاقان‌های مخروطی و کروی با فیلم فشرده دریافتند که در یاتاقان‌های فیلم فشرده با افزایش شدت میدان مغناطیسی، ضریب اصطکاک کاهش و ظرفیت تحمل بار افزایش می‌یابد.

چانگ^۵ و همکاران [۴]، عملکرد روانکار فرّوسیال را برای یاتاقان چهار حوضچه‌ای، مورد بررسی قرار داده‌اند. نتایج مطالعه آن‌ها حاکی از آن است که با طراحی دقیق و انتخاب میدان مغناطیسی مناسب می‌توان نشت کناری را به صفر رساند و اصطکاک را به‌طور چشمگیری کاهش داد. در ادامه، چی^۶ و همکارانش [۵]، موضوع را برای یاتاقان سه‌شیاری با یک شیار الاستیک بسط داده، به نتایج مشابهی دست یافتند. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که شیار الاستیک به مراتب تأثیر بیشتری در بهبود عملکرد سیستم نسبت به شیارهای ثابت دارد. اولین تحقیق با فرض رفتار غیرنیوتنی فرّوسیال، توسط عثمان^۷ [۶] در سال ۱۹۹۹ انجام گرفته است. وی در مطالعات خود، تنها به نتایج به‌دست‌آمده از میدان مغناطیسی محوری حاصل از مدل میدان مغناطیسی با توزیع سهمی توجه کرده است. در سال ۲۰۰۱ عثمان و همکارانش [۷]، به معرفی سه مدل مغناطیسی سیم طویل نامتناهی حاوی جریان جابجا شده، سیم متناهی حامل جریان متحدالمرکز و سیم متناهی حامل جریان جابجا شده پرداخته‌اند که مناسب‌ترین مدل توسط منتظری^۸ [۸] معرفی شد.

عثمان و همکارانش [۹]، همچنین تحقیقاتی را در زمینه عملکرد دینامیکی و استاتیکی یاتاقان‌های ژورنال هیدرودینامیکی مغناطیسی مدور ارائه کرده‌اند. خصوصیات عملکردی یاتاقان از قبیل، ظرفیت تحمل بار، زاویه مشخصه، نیروی اصطکاک و جریان نشت انتهایی نیز، از جمله مواردی است که به آن پرداخته شده است. آن‌ها با روش اغتشاش محدود، ضرایب سفتی و میرایی یاتاقان‌های مذکور را تعیین نموده، ضرایب دینامیکی را به‌عنوان داده‌های ورودی برای

⁴ Kumar

⁵ Chang

⁶ Chi

⁷ Osman

⁸ Montazeri

¹ Ferrofluid

² Tarapov

³ Agrawal

با انواع مختلف فرّوسیال که جدیدترین آن با بررسی تأثیرات گرانیروی بر عملکرد استاتیکی این نوع یاتاقان‌ها توسط لقره‌بی^۱ و همکاران [۳۰] صورت گرفته است، اما در مورد یاتاقان‌های فرّوسیال غیرمدور، تنها پژوهش صورت گرفته، بررسی عملکرد استاتیکی است [۲۹] و هیچ‌گونه مطالعه‌ای از عملکرد دینامیکی یاتاقان‌های فرّوسیال غیرمدور تاکنون گزارش نشده است. از این رو در کار حاضر با استفاده از روش اجزاء محدود، عملکرد دینامیکی یاتاقان‌های فرّوسیال غیرمدور ل‌دار، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. المان‌های در نظر گرفته شده، از نوع المان چهارگره‌ای خطی ایزوپارامتریک^۲ می‌باشند. فرضیات در نظر گرفته شده عبارت‌اند از اینکه محور، پوسته و تکیه‌گاه‌های یاتاقان صلب می‌باشند. محور طولی یاتاقان، همواره با محور چرخان در حین چرخش به‌صورت موازی قرار می‌گیرند. از تأثیرات افزایش دمای روانکار بر عملکرد یاتاقان صرف‌نظر می‌شود و همچنین ضمن فرض مدل خطی فرّوسیال، جریان سیال روانکار، دائم، تراکم-ناپذیر و آرام در نظر گرفته می‌شود.

۲- معادلات حاکم بر مسأله

در شکل ۱ هندسه یاتاقان‌های غیرمدور دولب، س‌لب و چهارلب نشان داده شده است. در یاتاقان‌های غیرمدور ل‌دار، اساساً هر یک از لب‌ها مانند یک یاتاقان جزئی مستقل عمل می‌کنند. برای آنالیز عملکرد یاتاقان، بایستی خصوصیات عملکردی هر لب به‌صورت جداگانه محاسبه شود، به‌طوری‌که وقتی این خصوصیات برای همه لب‌ها باهم جمع می‌شوند، خصوصیات عملکردی یاتاقان به‌دست آید.

X, Y محورهای مختصات دکارتی ثابت می‌باشند که مبدأ آن، O ، از هندسه یاتاقان می‌گذرد و در صفحه میانی یاتاقان قرار می‌گیرند. O_{j0} اشاره به موقعیت مرکز محور در حالت استاتیکی دارد و O_j موقعیت محور را در اثر اغتشاش صورت گرفته روی آن نسبت به موقعیت استاتیکی مشخص می‌کند. در این شکل هر یک از لب‌ها با زوایای شروع و پایانی مشخص می‌شوند، به‌گونه‌ای که θ_1^i و θ_2^i بیانگر، زاویه‌های ابتدا و انتهای لب i ام می‌باشند.

بررسی ویژگی‌های پایداری سیستم روتور یاتاقان مورد استفاده قرار دادند.

شاه^۱ و بهات^۲ [۱۰-۱۱]، تأثیر ضریب ثابت ماده فرّوسیال فرّوسیال و میدان را در یاتاقان‌های متخلخل شیب‌دار کشویی و در فیلم فشرده بین دو صفحه موازی بررسی نمودند. آن‌ها در ادامه تحقیقات خود به‌صورت تئوری، میزان تحمل بار یاتاقان‌های فرّوسیال لغزشی صفحه موازی را محاسبه کردند [۱۲]. رفتار فرّوسیال‌ها تحت دماهای مختلف و تأثیر آن بر پدیده کاویتاسیون، در دو پژوهش مجزا توسط توروک^۳ و همکارانش [۱۳] و چیان^۴ [۱۴]، مورد بررسی قرار گرفته است. در بررسی استاتیکی، عملکرد یاتاقان فرّوسیال غیرنیوتنی گزارش شده است که فرّوسیال‌های با سیال پایه غیرنیوتنی، عملکرد بهتری نسبت به فرّوسیال‌های نیوتنی دارند و با افزایش ضریب غیرنیوتنی بودن سیال، اصطکاک کاهش و ظرفیت تحمل بار افزایش می‌یابد [۱۵-۱۶]. تحقیقات به‌منظور بررسی عملکرد یاتاقان‌های مدور روانکاری شده با فرّوسیال با انتخاب مدل سه‌بعدی صورت‌گرفته شده است [۱۷-۱۸]. در ادامه بین سال‌های ۲۰۱۲ تا ۲۰۱۶ نیز، مقالات متعددی در رابطه با فیلم فشرده فرّوسیال بین دو صفحه موازی و متخلخل با شرایط مختلف ارائه شده است [۱۹-۲۴].

مطالعات انجام شده روی یاتاقان‌های غیرمدور، حاکی از آن است که پارامترهای تأثیرگذار روی هندسه نظیر، اثر ابعاد (نسبت طول به قطر)، پیش‌بار، اثر زوایای انحراف و نصب همراه با انتخاب نوع روانکار می‌تواند تأثیر روی عملکرد و مشخصه‌های استاتیکی و دینامیکی یاتاقان مذکور داشته باشد [۲۵-۲۸]. در سال ۲۰۱۲، عملکرد استاتیکی یاتاقان-های فرّوسیال غیرمدور توسط قیومی^۵ [۲۹]، مورد بررسی قرار گرفته است و تأثیر روانکار فرّوسیال بر کاهش جریان نشت انتهایی و افزایش ظرفیت تحمل بار با افزایش ضریب نیروی مغناطیسی در یاتاقان‌های دو لب گزارش شده است؛ درحالی‌که یاتاقان‌های مدور با فرّوسیال در شرایط گوناگون و

¹ Shah

² Bhat

³ Torok

⁴ Chyuan

⁵ Ghayoumi

⁶ Laghrabli

⁷ Isoparametric

جهت دستیابی به مشخصه‌های دینامیکی و تحلیل پایداری یاتاقان، ابتدا با فرض در نظر گرفتن راستای بار در جهت منفی محور Y ، موقعیت محور در حالت استاتیکی با حل معادله رینولدز در آن حالت و به‌کارگیری یک روش تکرار جهت رسیدن به مقدار صفر مؤلفه بار در راستای محور افقی تعیین می‌شود.

برای رسیدن به معادله رینولدز در حالت دینامیکی، نخست با استفاده از معادلات ناویر-استوکس و با در نظر گرفتن نیروی مغناطیسی به‌عنوان یک نیروی خارجی و انتگرال‌گیری از معادلات، پروفیل سرعت در جهت‌های جانبی و محوری به‌دست می‌آیند.

$$u = u_b + \frac{\partial p}{2\eta \partial x} (y^2 - hy) \quad (1)$$

$$w = w_b + \frac{\partial p}{2\eta \partial z} (y^2 - hy) - \frac{f_{mz}}{2\eta} (y^2 - hy) \quad (2)$$

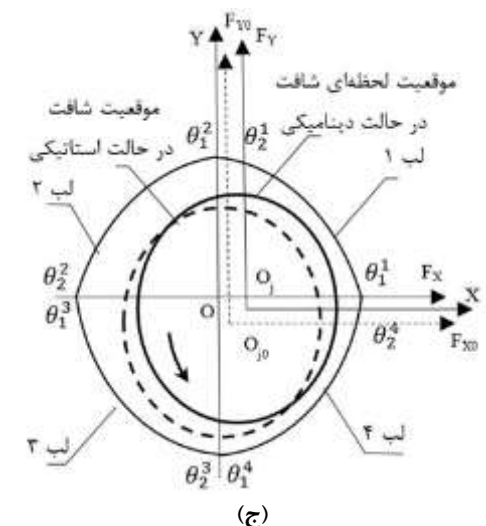
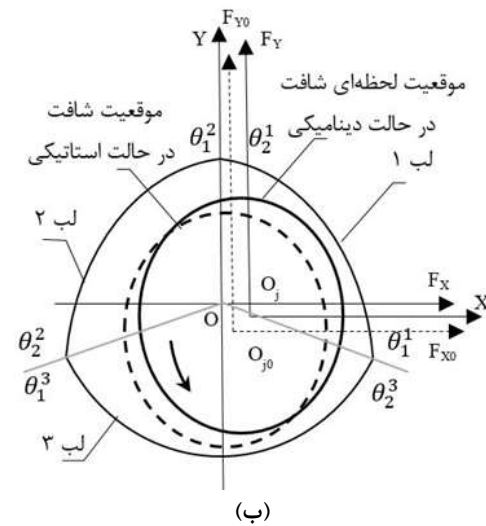
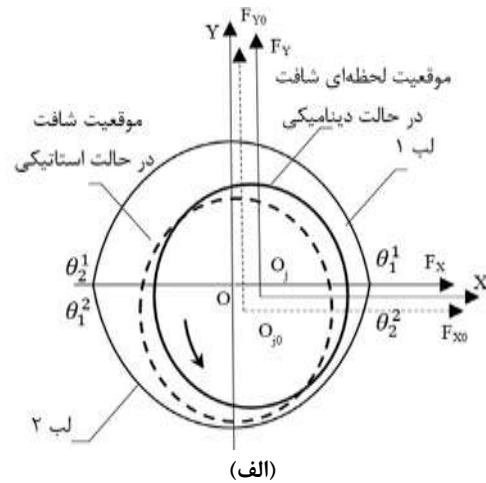
که a و b به‌ترتیب، به نقاط روی یاتاقان و محور اشاره دارند و حد فاصل بین این دو نقطه با پارامتر h مشخص می‌گردد. f_{mx} و f_{mz} نیز، معرف مؤلفه‌های نیروی مغناطیسی می‌باشند که وابسته به نوع میدان مغناطیسی انتخاب شده [۹] و شدت میدان مغناطیسی می‌باشند. با قرار دادن این روابط در معادله پیوستگی، معادله (۳) منتج می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\eta\omega R \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (h^3 f_{mx}) + \frac{\partial}{\partial z} (h^3 f_{mz}) + 12\eta \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3)$$

با جایگذاری مؤلفه‌های نیروی مغناطیسی و با تعریف پارامترهای بعدسازی معادله رینولدز در حالت بدون بعد برای روانکار فروسیال به صورت رابطه (۴) به‌دست می‌آید [۹].

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial Z} \right) = 6 \frac{\partial H}{\partial \theta} + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 H_m \frac{\partial H_m}{\partial \theta} \right) + \alpha \frac{\partial}{\partial Z} \left(H^3 H_m \frac{\partial H_m}{\partial Z} \right) + 12 \frac{\partial h}{\partial \tau} \quad (4)$$

در این معادله، ضریب α بیانگر شدت میدان مغناطیسی و پارامتر H_m نسبت میدان مغناطیسی در نقطه مورد نظر به



شکل ۱- هندسه یاتاقان‌های غیرمدور (الف) دلب، (ب) سه لب و (ج) چهار لب

$$\begin{cases} \dot{X} = \text{Re}(\dot{X} e^{jvt}) \\ \dot{Y} = \text{Re}(\dot{Y} e^{jvt}) \end{cases} \quad (11)$$

که $j = \sqrt{-1}$ است، بیان کرد [۲۹]. فشار در حالت کلی به صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شود

$$P = P_0 + P_d \quad (12)$$

که در آن مؤلفه‌های فشار P_0 و P_d به ترتیب، اشاره به مقادیر فشار در حالت‌های دینامیکی و استاتیکی دارند [۲۶].

به منظور ساده‌سازی فرض می‌شود که سیستم یاتاقان حت یک اغتشاش کوچک، خطی باشد؛ بنابراین برای یک سیستم خطی شده، مؤلفه‌ی فشار دینامیکی، P_d را می‌توان با رابطه‌ی (۱۲) به صورت توابع خطی از مختصات اغتشاش (\dot{X}, \dot{Y}) و سرعت‌های اغتشاش یافته‌ی (\dot{X}, \dot{Y}) در نظر گرفت.

$$P_d = P_x \dot{X} + P_y \dot{Y} \quad (13)$$

با به‌کارگیری رابطه (۱۱) فشار دینامیکی با رابطه زیر بیان می‌شود.

$$P_d = \dot{P}_x \dot{X} + \dot{P}_y \dot{Y} \quad (14)$$

که

$$\begin{cases} \dot{P}_x = P_x + j\gamma P_x \\ \dot{P}_y = P_y + j\gamma P_y \end{cases} \quad (15)$$

مؤلفه‌های فشار دینامیکی مختلط هستند.

معادلات حاکم بر \dot{P}_x و \dot{P}_y با مشتق‌گیری از رابطه (۴) نسبت به \dot{X} و \dot{Y} و قراردادن $\dot{X} = \dot{Y} = 0$ به صورت

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 \frac{\partial \dot{P}_z}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(H^3 \frac{\partial \dot{P}_z}{\partial Z} \right) \\ & = -6f(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(3H^2 f(\theta) \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial Z} \left(3 \left(\frac{L}{R} \right)^2 H^2 f(\theta) \frac{\partial P}{\partial Z} - 3\alpha H^2 H_m f(\theta) \frac{\partial H_m}{\partial Z} \right) \\ & - 12j\gamma f(\theta) \end{aligned} \quad (16)$$

به‌دست می‌آیند که \dot{P}_z اشاره به \dot{P}_x و \dot{P}_y دارد و با رابطه زیر

$$\dot{P}_z = P_z + j\gamma P_z \quad (17)$$

بیان می‌شود. همچنین

$$f(\theta) = \begin{cases} \cos\theta, & \text{for } \dot{P}_x \\ \sin\theta, & \text{for } \dot{P}_y \end{cases} \quad (18)$$

می‌باشد.

با در نظر گرفتن مقادیر تقریبی برای مؤلفه‌های دینامیکی $\dot{P}_z^e(Z = X, Y)$ به صورت رابطه (۱۹) است

$$\dot{P}_z^e = \sum_{m=1}^{n_e} N_m^e \dot{P}_{zm} \quad (19)$$

میدان متوسط القایی ایجاد شده توسط سیم حامل بار در طول شافت است که بنا به مدل میدان مغناطیسی انتخاب شده می‌تواند متغیر باشد [۷]. لازم به ذکر است که میدان مغناطیسی ایجاد شده در این نوع یاتاقان‌ها، برخلاف یاتاقان‌های مغناطیسی [۳۱] که به صورت مستقیم از سیم‌پیچ تغذیه می‌شوند، به صورت القایی و غیرمستقیم توسط سیم حامل بار ایجاد می‌گردد و میدان تنها در جهت طولی شافت و به صورت سهموی تغییر می‌کند [۹].

اکنون با در نظر گرفتن شرایط مرزی

$$p(\theta, \pm v) = 0 \quad (5)$$

$$p(\theta_1^i, Z) = p(\theta_2^i, Z) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dp}{dZ}(\theta, 0) = 0 \quad (7)$$

و شرایط کاویتاسیون

$$p(\theta_{cav}^i, Z) = \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta_{cav}^i, Z) = 0 \quad (8)$$

می‌توان مقادیر فشار را در فیلم سیال به دست آورد.

ضخامت فیلم سیال در فضای لقی بین محور و هریک از لب‌های یاتاقان را می‌توان با فرض اینکه راستای محور و یاتاقان به صورت موازی قرار بگیرند با رابطه (۹) بیان کرد

$$H_k = H_{0k} - \dot{X} \cos\theta - \dot{Y} \sin\theta \quad (9)$$

در رابطه فوق

$$\begin{aligned} H_{0k} = & \frac{1}{\delta} - X_{j0} \cos\theta - Y_{j0} \sin\theta \\ & + \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) \cos(\theta - \theta_0^i) \end{aligned} \quad (10)$$

ضخامت فیلم سیال در فضای لقی یاتاقان در حالت استاتیکی می‌باشد [۲۶].

در رابطه‌ی (۹)، δ بیانگر میزان غیرمدوری یاتاقان است که در محدوده صفر تا یک متغیر است و به عنوان پریلود شناخته می‌شود. مقدار صفر این پارامتر بیانگر، تماس بین محور و یاتاقان وقتی که محور و یاتاقان هم‌مرکز باشند و مقدار یک آن بیانگر، تبدیل یاتاقان غیرمدور به مدور است.

به منظور شرح حالت دینامیکی، ابتدا فرض می‌شود، مدار چرخش گذرای محور در آستانه ناپایداری تحت چرخه‌ای قرار می‌گیرد که محدود به نسبت فرکانس چرخشی گردابی، γ ، (نسبت سرعت زاویه‌ای حرکت چرخشی اغتشاشی مرکز به سرعت زاویه‌ای چرخش محور) است؛ بنابراین مختصات اغتشاش مرکز محور (\dot{X}, \dot{Y}) را می‌توان به صورت

۳- مشخصه‌های دینامیکی

۳-۱- ضرایب دینامیکی

در حالت دینامیکی، بردار نیروی فیلم سیال به صورت مجموع بردارهای نیرو در حالت‌های استاتیکی و غیرتعادلی در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x0} \\ F_{y0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \end{Bmatrix} \quad (28)$$

(F_{x0}, F_{y0}) مؤلفه‌های نیرو در حالت استاتیکی می‌باشند که می‌توان با انتگرال‌گیری از فشار به دست آمده از معادله رینولدز در حالت استاتیکی روی سطح به دست آورد [۹]. $(\Delta F_x, \Delta F_y)$ نیز، مؤلفه‌های نیروی نامتعادل کننده فیلم سیال روی محور می‌باشند.

برای سیستم خطی شده، مؤلفه‌های نامتعادل کننده فیلم سیال به صورت توابع خطی از مختصات اغتشاش و سرعت‌های اغتشاش یافته در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

که S_{mn} و B_{mn} ($m, n = x, y$) به ترتیب، ضرایب سفتی و میرایی فیلم سیال می‌باشند. مطابق با شکل ۲، اندیس‌های ضرایب به ترتیب، جهت اعمال نیرو و جابه‌جایی یا سرعت در راستای جابه‌جایی را نشان می‌دهند.

با به‌کارگیری رابطه‌ی (۱۱)، رابطه (۲۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲۶]:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

که

$$Z_{xy} = S_{xy} + j\gamma B_{xy} \quad (31)$$

ضرایب دینامیکی مختلط می‌باشند.

با در نظر گرفتن رابطه (۱۶)، ضرایب دینامیکی مختلط نیز به صورت رابطه (۳۲) بیان می‌شوند

$$\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix}^T = \sum_{i=1}^L \int_{-\lambda}^{\lambda} \int_{\theta_1^i}^{\theta_2^i} \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \end{bmatrix} [\cos\theta \quad \sin\theta] d\theta d\xi \quad (32)$$

و با به‌کارگیری روش گالرکین روی معادله (۴) برای هر المان، معادلات اجزاء محدود به دست می‌آید.

$$\iint_{A_e} \left[\frac{\partial N_k^e}{\partial \theta} H^3 \frac{\partial N_m^e}{\partial \theta} P'_{zm} - 12j\gamma f(\theta) + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial N_k^e}{\partial Z} H^3 \frac{\partial N_m^e}{\partial Z} P'_{zm} - \frac{\partial N_k^e}{\partial \theta} 3H^2 \frac{\partial P}{\partial \theta} - \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial N_k^e}{\partial Z} 3H^2 \frac{\partial P}{\partial Z} - 6f(\theta) + 12\left(\frac{L}{R}\right)^2 \alpha \frac{\partial N_k^e}{\partial \theta} H^2 f(\theta) H_m \frac{\partial H_m}{\partial \theta} + 3\alpha \frac{\partial N_k^e}{\partial Z} H^2 f(\theta) H_m \frac{\partial H_m}{\partial Z} \right] d\theta dZ \quad (20)$$

در این رابطه A^e سطح المان و N_k تابع درونیایی است. توابع درونیاب برای هر گره با N و همراه با اندیسی مشخص می‌شوند که نشانه آن گره است. معادلات اجزاء محدود به شکل ماتریسی برای هر المان به صورت رابطه (۲۱) است

$$[F_z^e]_{n_e \times n_e} \{ \dot{P}_z^e \}_{n_e \times 1} = \{ Q_z^e \}_{n_e \times 1} + \{ H_z^e \}_{n_e \times 1} \quad (21)$$

که هر کدام از ماتریس‌های F_z^e ، H_z^e و Q_z^e مختلط بوده، مؤلفه‌های آن به صورت روابط (۲۲-۲۵) است.

$$F_{e,km}^r = - \iint_{A_e} H^3 \left[\frac{\partial N_m^e}{\partial \theta} \frac{\partial N_k^e}{\partial \theta} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial N_m^e}{\partial Z} \frac{\partial N_k^e}{\partial Z} \right] d\theta dZ \quad (22)$$

$$F_{ze,km}^j = 0 \quad (23)$$

$$H_{e,km}^r =$$

$$- \iint_{A_e} [3H^2 f(\theta) \left(\frac{\partial P_0}{\partial \theta} \frac{\partial N_k^e}{\partial \theta} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial P_0}{\partial Z} \frac{\partial N_k^e}{\partial Z} - \alpha H_m \frac{\partial H_m}{\partial Z} \frac{\partial N_k^e}{\partial Z} \right) - 6f(\theta) \frac{\partial N_k^e}{\partial \theta}] d\theta dZ \quad (24)$$

$$H_{ze,k}^j = - \iint_{A_e} [12j\gamma f(\theta) N_k^e] d\theta dZ \quad (25)$$

بالانویس‌های r و j به ترتیب، اشاره به قسمت‌های حقیقی و موهومی روابط داشته و به شکل روابط (۲۶-۲۷) قابل بیان است.

$$[F_z^e] = [F_{ze}^r] + j[F_{ze}^j] \quad (26)$$

$$[H_z^e] = [H_{ze}^r] + j[H_{ze}^j] \quad (27)$$

¹ Galarkin Method

برای $M < CM$ پاسخ دینامیکی سیستم خطی شده، پایدار است. درحالی که برای $M > CM$ پاسخ دینامیکی سیستم خطی شده به هر اغتشاشی ناپایدار است؛ بنابراین $M = CM$ آستانه ناپایداری سیستم تعریف می‌شود.

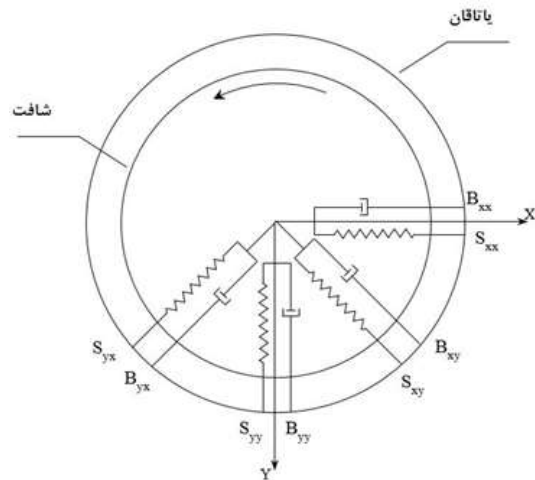
۴- بررسی نتایج

در این مقاله پس از حل معادلات حاکم و تعیین ضرایب سفتی و میرایی، نسبت فرکانس چرخش گردابی و جرم بحرانی سیستم که از مشخصه‌های پایداری آن می‌باشند، به‌دست‌آمده و در ادامه با بررسی آن‌ها روی یاتاقان‌های دولب، سه‌لب و چهارلب روانکاری شده با فرّوسیال، بهترین حالت برای افزایش محدوده پایداری یاتاقان‌های مذکور گزارش می‌شود.

جهت اعتبارسنجی نتایج حاصله، ابتدا یاتاقان‌های غیرمدور فرّوسیال را تحت شرایط خاص، $\delta = 1$ ، مدور در نظر گرفته و مقادیر سرعت بحرانی به‌دست‌آمده و ارائه شده در جدول ۱ با نتایج مرجع [۹] تحت شرایطی که ضریب نیروی مغناطیسی $\alpha = 0.05$ در نظر گرفته شده، مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. در خصوص یاتاقان‌های غیرمدور نیز با فرض سیال نیوتنی، $\alpha = 0$ ، ضرایب سفتی و میرایی تحت شرایط $\delta = 0.5$ با نتایج مرجع [۲۷] مورد مقایسه قرار گرفته و به ترتیب در جداول ۲ و ۳ ارائه شده‌اند. برنامه با تعداد المان‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. با تعداد المان کم، خطا به حداکثر مقدار خود رسیده، از سوی دیگر با افزایش تعداد المان‌ها از حد معین، شاهد زمان زیاد در اجرای برنامه و اختلاف نتایج بسیار ناچیز بوده (کمتر از ۰/۰۵٪) که تعداد بهینه المان ۶۴۰۰ عدد در نظر گرفته شده است.

جدول ۱- اعتبارسنجی نتایج سرعت بحرانی یاتاقان مدور فرّوسیال $\alpha = 0.05$ کار حاضر با نتایج مرجع [۹]

درصد اختلاف	ω مرجع [۹]	ω کار حاضر	ϵ
۰/۹۴٪	۰/۴۹۵	۰/۴۹۹۷	۰/۱۹۸
۴/۶٪	۱/۲۷۴	۱/۲۱۱۵	۰/۳۹۵
۰/۱۸٪	۱/۷۵۲	۱/۷۶۵	۰/۵
۰/۳٪	۲/۶۰۰۱	۲/۶۰۵۲	۰/۵۸۷
۰/۱۳٪	۴/۰۴۷۷	۴/۰۴۴۸	۰/۷



شکل ۲- مدل دینامیکی فیلم روانکار

۳-۲- مرز پایداری

معادله حرکت محور به صورت رابطه (۳۳) نوشته می‌شود:

$$M \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

از طریق جایگذاری معادله (۱۱) در معادلات (۳۳)،

به‌آسانی معادله مشخصه سیستم به‌دست می‌آید [۲۶].

$$(-M\gamma^2 + S_{xx} + j\gamma B_{xx})(-M\gamma^2 + S_{yy} + j\gamma B_{yy}) - (S_{xy} + j\gamma B_{xy})(S_{yx} + j\gamma B_{yx}) = 0 \quad (34)$$

با جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی معادله مشخصه به صورت زیر

$$M\gamma^2 = (S_{xx}B_{yy} + B_{xx}S_{yy} - S_{xy}B_{yx} - S_{yx}B_{xy}) / (B_{xx} + B_{yy}) \quad (35)$$

$$\gamma^2 = [(S_{xx} - M\gamma^2)(S_{yy} - M\gamma^2) - S_{yx}S_{xy}] / (B_{xx}B_{yy} - B_{xy}B_{yx}) \quad (36)$$

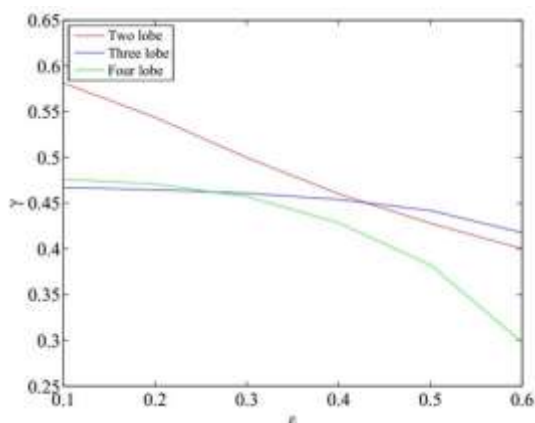
می‌توان معیارهایی جهت تعیین نسبت فرکانس چرخشی و مرزهای پایداری سیستم یاتاقان‌های فرّوسیال تعیین کرد. مطابق با مقدار نسبت فرکانس چرخشی ناشی از چرخش خود الحاقی فیلم سیال، جرم بحرانی سیستم را که با آن محدوده‌ی پایداری سیستم تعیین می‌شود، با رابطه (۳۷) به دست می‌آید.

$$CM = (S_{xx}B_{yy} + B_{xx}S_{yy} - S_{xy}B_{yx} - S_{yx}B_{xy}) / [(B_{xx} + B_{yy})\gamma^2] \quad (37)$$

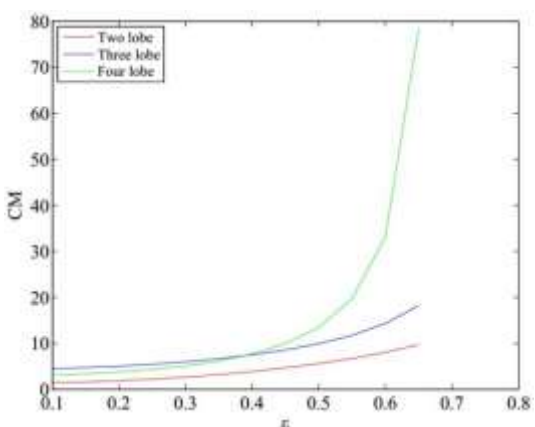
صورت گیرد؛ زیرا با افزایش نسبت خروج از مرکزی، فضای گوه‌ای شکل تقویت شده و با ایجاد پروفیل فشار قوی‌تر، باعث افزایش پایداری یاتاقان می‌گردد که شکل ۴ این موضوع را تأیید می‌نماید. تأثیر این پارامتر روی یاتاقان چهارلب در مقایسه با دو نوع دیگر به دلیل نزدیک شدن به شکل هندسی یاتاقان مدور، بیشتر مشهود است.

۲-۴- بررسی اثر ابعاد

در بررسی اثر ابعاد، مقدار پریلود و نسبت خارج از مرکزی یاتاقان برابر با ۰/۵ و ضریب نیروی مغناطیسی برابر با ۰/۱ در نظر گرفته شده‌اند. شکل‌های ۵ و ۶ به ترتیب، اثر ابعاد را روی پارامترهای نسبت فرکانس چرخش گردابی و جرم



شکل ۳- تأثیر نسبت خارج از مرکزی بر فرکانس چرخش گردابی در یاتاقان‌های دو، سه و چهارلب روانکاری شده با فرّوسیال



شکل ۴- تأثیر نسبت خارج از مرکزی بر جرم بحرانی در یاتاقان‌های دو، سه و چهارلب روانکاری شده با فرّوسیال

جدول ۲- اعتبارسنجی نتایج S_{xx} یاتاقان غیرمدور سه لب روانکاری شده با سیال نیوتنی کار حاضر با نتایج مرجع [۲۷]

درصد اختلاف	S_{xx} مرجع [۳۰]	S_{xx} کار حاضر	ε
۴/۳٪	۹۲/۰۱	۸۸/۰۵	۰/۰۴
۷/۱٪	۳۷/۰۳	۳۴/۳۷	۰/۱
۵/۵٪	۱۶/۶۹	۱۵/۷۷	۰/۲۰۶
۳/۸٪	۷/۶	۷/۳۱	۰/۴۰۶
۵/۱٪	۵/۰۴	۴/۷۸	۰/۵۷

جدول ۳- اعتبارسنجی نتایج B_{yy} یاتاقان غیرمدور سه لب روانکاری شده با سیال نیوتنی کار حاضر با نتایج مرجع [۲۷]

درصد اختلاف	B_{yy} مرجع [۳۰]	B_{yy} کار حاضر	ε
۰/۳٪	۲۹/۶۸	۲۸/۶۸	۰/۰۴
۰/۳٪	۱۲/۷۷	۱۲/۸۱	۰/۱
۰/۴٪	۷/۲۷	۷/۳	۰/۲۰۶
۰/۷٪	۵/۲۹	۵/۲۵	۰/۴۰۶
۵/۲۲٪	۵/۳۳	۵/۲۲	۰/۵۷

اختلاف ناچیز نتایج پژوهش حاضر با نتایج مراجع [۹] و [۲۷]، ارائه شده در جداول ۱، ۲ و ۳، تأییدی بر صحت کدنویسی و تعداد المان در نظر گرفته شده است. در ادامه اثر پارامترهای نسبت خارج از مرکزی، ابعاد و ضریب نیروی مغناطیسی بر میزان پایداری سیستم یاتاقان‌های غیرمدور فرّوسیال مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۱-۴- بررسی اثر نسبت خارج از مرکزی

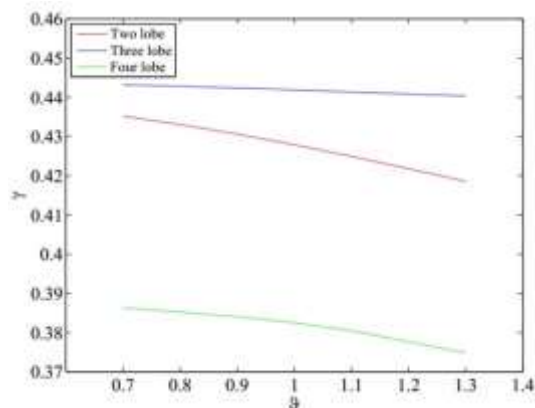
اثر نسبت خارج از مرکزی بر مشخصه‌ی پایداری یاتاقان‌های غیرمدور دو، سه و چهارلب روانکاری شده با فرّوسیال در شکل‌های ۳ و ۴ نشان داده شده است.

در بررسی تأثیر خروج از مرکزیت، مقدار پریلود برابر با ۰/۵، نسبت طول به قطر یاتاقان برابر با ۱ و ضریب نیروی مغناطیسی برابر با ۰/۱ در نظر گرفته شده‌اند. مطابق با شکل ۳ با افزایش نسبت خروج از مرکزی، کاهش نسبت فرکانس چرخش گردابی مشاهده می‌شود. انتظار آن می‌رود با افزایش نسبت خروج از مرکزی، افزایش پایداری در سیستم

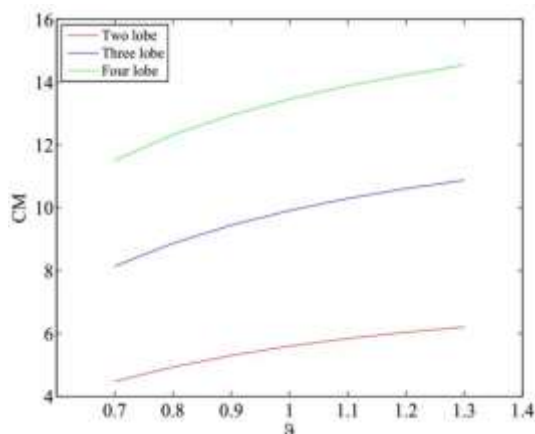
نظیر، نسبت خارج از مرکزیت، ابعاد و ضریب نیروی مغناطیسی روی محدوده‌ی پایداری به شرح ذیل به دست آمد:
 ۱- افزایش در مقدار نسبت خارج از مرکزیت و ابعاد، نسبت طول به قطر، باعث کاهش نسبت فرکانس چرخش گردابی و به ترتیب افزایش ۵/۴۷، ۶/۵۶، ۷/۴۷ و ۳ درصدی پایداری سیستم در یاتاقان‌های دولب، سه لب و چهارلب می‌شود.

۲- افزایش ضریب نیروی مغناطیسی، باعث افزایش نسبت فرکانس چرخش گردابی و به تبع آن کاهش ۷۰، ۷۴ و ۷۷ درصدی محدوده‌ی پایداری سیستم در یاتاقان‌های دولب، سه لب و چهارلب می‌شود.

۳- با افزایش تعداد لب‌های یاتاقان غیرمدور فرّوسیال، محدوده‌ی پایداری سیستم ۳/۴۵ درصد افزایش می‌یابد.



شکل ۵- تأثیر نسبت طول به قطر بر فرکانس چرخش گردابی در یاتاقان‌های دو، سه و چهارلب روانکاری شده با فرّوسیال



شکل ۶- تأثیر نسبت طول به قطر بر جرم بحرانی در یاتاقان‌های دو، سه و چهارلب روانکاری شده با فرّوسیال

بحرانی سیستم نشان می‌دهند. با افزایش اثر ابعاد، فضای لقی بیشتری تحت تاثیر روانکار قرار گرفته که منجر به تقویت خواص سفتی و میرایی روانکار می‌شود. شکل‌های مذکور حاکی از آن است، با افزایش اثر ابعاد، کاهش نسبت فرکانس چرخش گردابی و به تبع آن افزایش مرز پایداری سیستم صورت می‌گیرد. در ضمن تحت شرایط یکسان با افزایش تعداد لب‌ها، پایداری یاتاقان افزایش می‌یابد.

۴-۳- بررسی اثر ضریب نیروی مغناطیسی

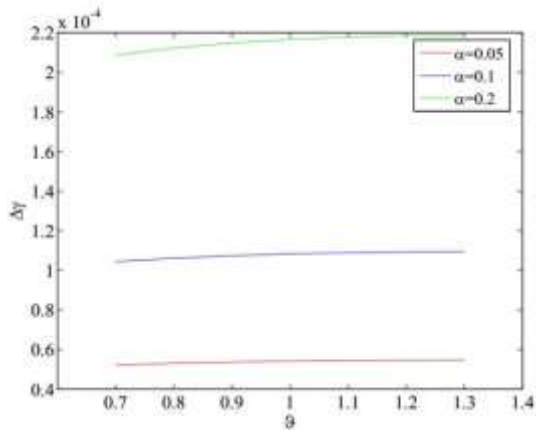
اثر روانکار فرّوسیال با به‌کارگیری ضریب نیروی مغناطیسی در شکل‌های ۷ الی ۱۰ روی یاتاقان‌های غیرمدور دولب، سه لب و چهارلب نشان داده شده است. در بررسی اثر این پارامتر، نتایج به ازای مقادیر ضریب نیروی مغناطیسی ۰/۰۵، ۰/۱ و ۰/۲ ارائه شده‌اند.

برای درک بهتر تأثیر ضرایب نیروی مغناطیسی، نمودارهای اختلاف‌سنج ترسیم شده‌اند؛ به این صورت که محور عمودی در نمودارها بیانگر، میزان اختلاف نتایج نمودارهای به‌دست‌آمده از فرّوسیال‌های با خواص متفاوت نسبت به سیال نیوتنی می‌باشد. برای ترسیم این نمودارها، نتایج حاصل از روانکار نیوتنی را مبنا قرار داده (محور $X = 0$) و دیگر نتایج نسبت به این مقادیر سنجیده می‌شوند. هرچه نمودار در سطح بالاتر یا پایین‌تری از محور افقی قرار گیرد، بیانگر اختلاف بیشتر نتایج به‌دست‌آمده از روانکار فرّوسیال با روانکار نیوتنی است.

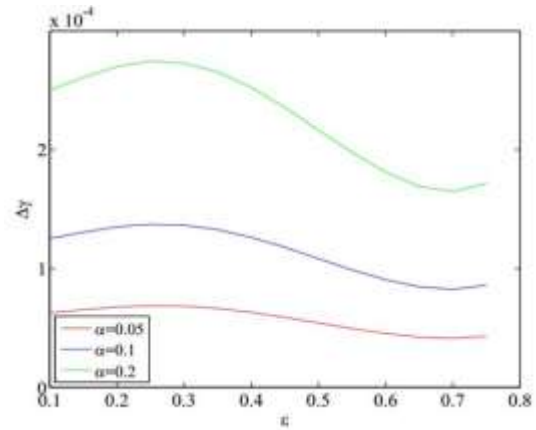
شکل‌های ۷ و ۸ به ترتیب، تأثیر ضریب نیروی مغناطیسی بر نسبت فرکانس چرخش گردابی یاتاقان‌های غیرمدور فرّوسیال را در خارج از مرکزیت‌ها و ابعاد مختلف نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود با افزایش ضریب نیروی مغناطیسی، افزایش در مقدار فرکانس چرخش گردابی صورت می‌گیرد. انتظار آن می‌رود که با افزایش ضریب نیروی مغناطیسی کاهش در محدوده‌ی پایداری سیستم صورت گیرد که شکل‌های ۹ و ۱۰ آن را تأیید می‌نمایند.

۵- جمع‌بندی نتایج

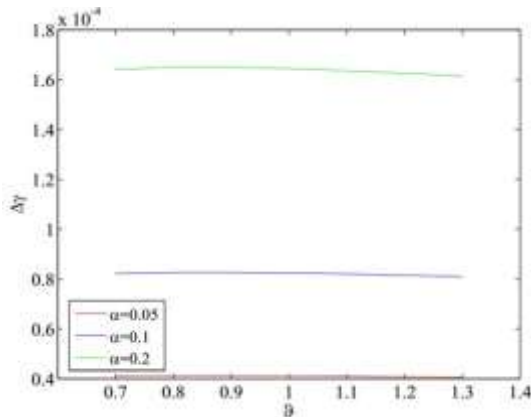
در پژوهش حاضر، پایداری یاتاقان‌های غیرمدور فرّوسیال با استفاده از سیستم خطی شده و حل معادلات حاکم با روش عددی اجزاء محدود مورد مطالعه قرار گرفت و تأثیر پارامترهایی



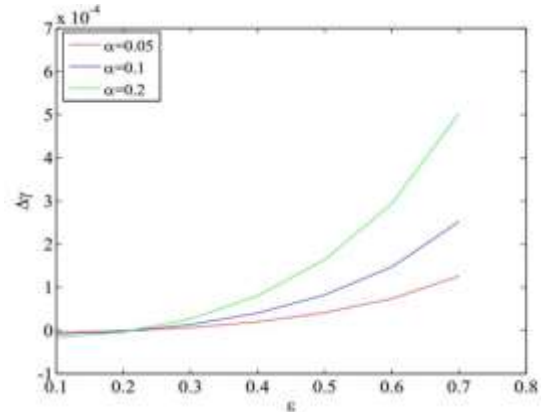
(الف)



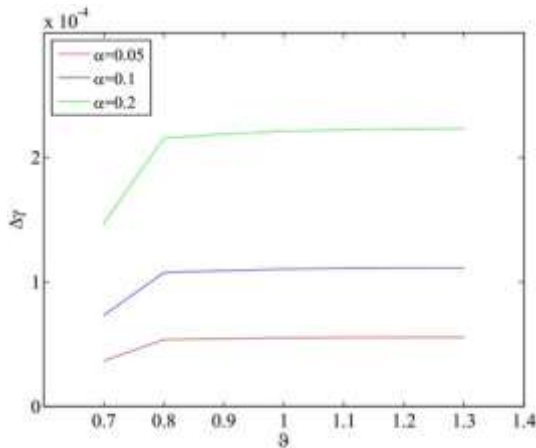
(الف)



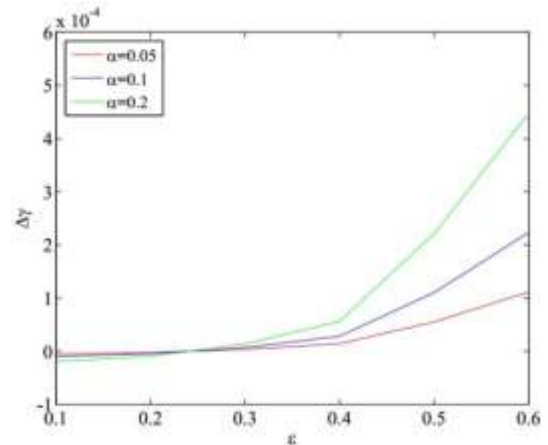
(ب)



(ب)



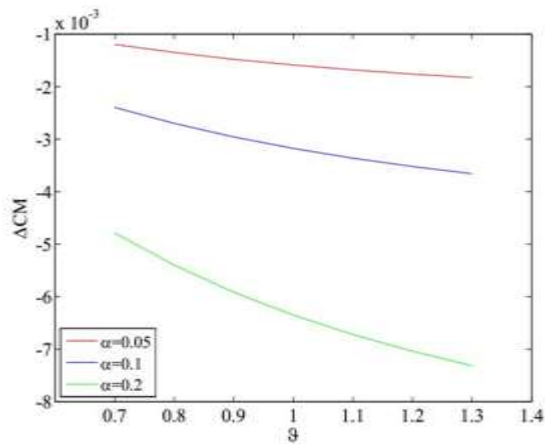
(ج)



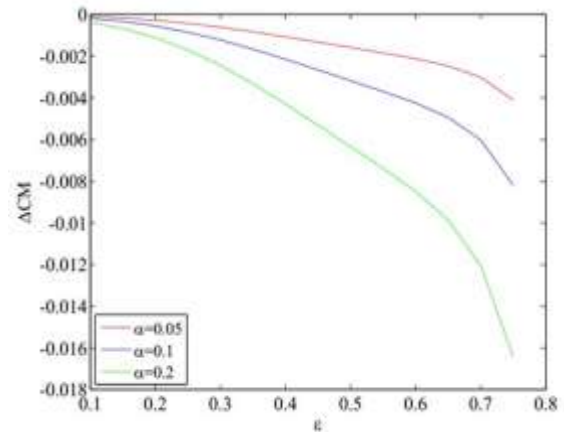
(ج)

شکل ۸- تأثیر ضریب نیروی مغناطیسی بر فرکانس چرخش گردابی به‌ازای نسبت ابعاد مختلف در یاتاقان‌های غیرمدور روانکاری شده با فرّوسیال. الف) دولب، ب) سه لب و ج) چهارلب

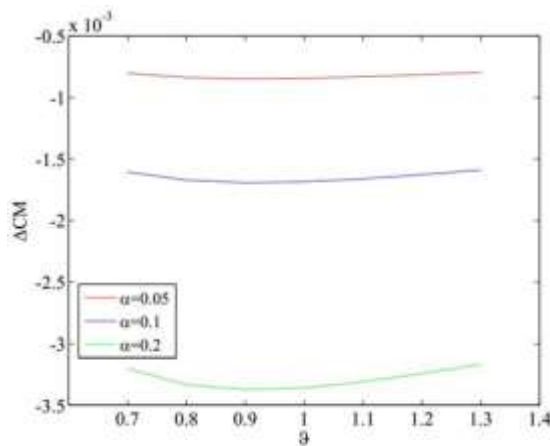
شکل ۷- تأثیر ضریب نیروی مغناطیسی بر فرکانس چرخش گردابی به‌ازای خارج از مرکزی‌های مختلف در یاتاقان‌های غیرمدور روانکاری شده با فرّوسیال. الف) دولب، ب) سه لب و ج) چهارلب



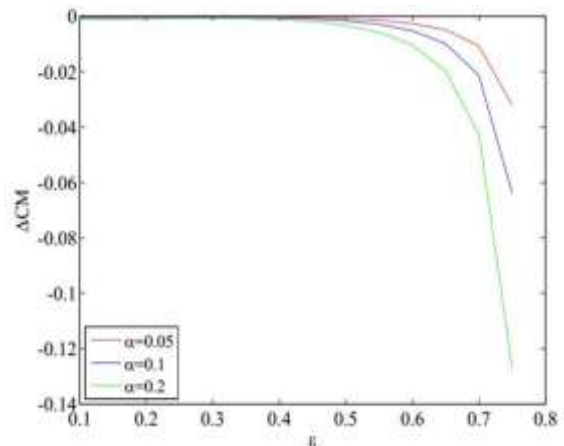
(الف)



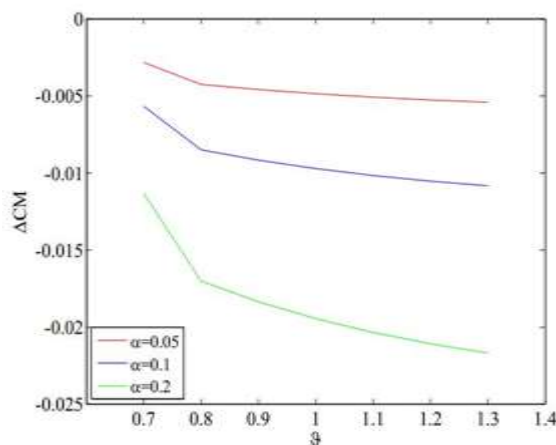
(ب)



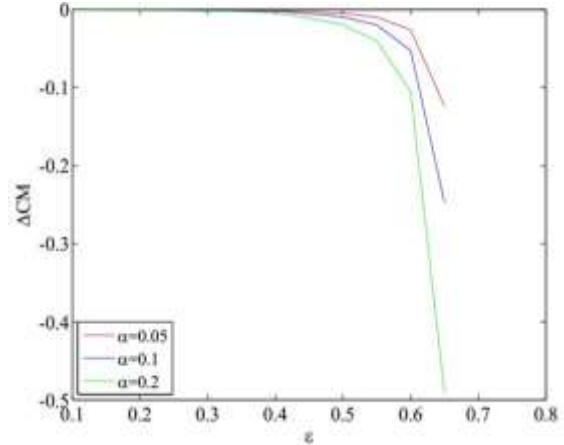
(ج)



(د)



(ه)



(و)

شکل ۱۰- تأثیر ضریب نیروی مغناطیسی بر جرم بحرانی به-
ازای نسبت ابعاد مختلف در یاتاقان‌های غیرمدور روانکاری-
شده با فرّوسیال. الف) دولب، ب) سه لب و ج) چهارلب

شکل ۹- تأثیر ضریب نیروی مغناطیسی بر جرم بحرانی به-
ازای نسبت خارج از مرکزی‌های مختلف در یاتاقان‌های
غیرمدور روانکاری‌شده با فرّوسیال. الف) دولب، ب) سه لب و
ج) چهارلب

		۶- فهرست علائم و نشانه‌ها	
ضریب نیروی مغناطیسی	α		
نسبت خارج از مرکزی	ε	سطح المان، m^2	A^e
ویسکوزیته سیال، kg/m^3	η	ضرایب میرایی فیلم روانکار بدون بعد	$B_{ij}(i,j=x,y)$
مختصات زاویه‌ای (x/R)، rad	θ	قطر یاتاقان، m	D
زاویه‌ی بین خط‌المركزین محور و لب	θ_0^i	مؤلفه‌های نیروی استاتیکی، N	F_{x0}, F_{y0}
لام با جهت مثبت محور x، rad	θ_1^i	مؤلفه‌های نیروی دینامیکی، N	F_x, F_y
زاویه‌ی شروع لب lam، rad	θ_2^i	ضخامت فیلم روانکار، m	h
زاویه‌ی پایان لب lam، rad	θ_{cav}^i	ضخامت فیلم بدون بعد	H
زاویه‌ی گسیختگی، rad		شدت میدان مغناطیسی، A/m	h_m

۷- مراجع

[1] Tarapov IE (1972) Movement of a magnetizable fluid in lubricating layer of a cylindrical bearing. Magn J 444-448.	جرم روتور بدون بعد	M
[2] Agrawal VK (1986) magnetic fluid-based porous inclined slider bearing. Wear 133-139.	جرم بحرانی روتور بدون بعد	CM
[3] Kumar D, Sinha P, Chandra P (1986) Ferrofluid squeeze film for spherical and conical bearings. Int J Eng Sci 30: 645-656.	تابع درون‌یابی	N_k
[4] Chang HS, Chi CQ, Zhao PZ (1987) A theoretical and experimental study of ferrofluid lubricated four-pocket journal bearings. J Magn Magn Mater 65: 372-374.	تعداد گره‌های هر المان	n_e
[5] Chi CQ, Wang ZS and Zhao PZ (1990) Reaserch on a new type of ferrofluid-lubricated journal bearing. J Magn Magn Mater 85: 257-260.	مرکز محور در حالت استاتیکی	O_{j0}
[6] Osman TA (1999) Static characteristics of hydrodynamic bearings working by non-Newtonian ferrofluid. J. Eng. Appl. Sci.: 521-536.	مرکز محور در حالت دینامیکی	O_j
[7] Osman TA, Nada GS and Safar ZS (2001) Effect of using current-carrying-wire models in the design of hydrodynamic journal bearings lubricated with ferrofluid. Tribol Lett 11: 61-70.	فشار روانکار، N/m^2	P
[8] Montazeri H (2008) Numerical analysis of hydrodynamic bearings lubricated with ferrofluid. J Eng Tribol 51-60.	فشار روانکار در حالت دینامیکی، N/m^2	P_0
[9] Osman TA, Nada GS, Safar ZS (2001) Static and dynamic characteristics of bearings lubricated with ferrofluid. Tribol Int 34: 369-380.	فشار روانکار در حالت دینامیکی، N/m^2	P_d
[10] Shah RC, Bhat MV (2002) Ferrofluid lubrication in porous inclined slider bearing with velocity slip. Int J Mech Sci 44: 2495-2502.	مقدار فشار در هر گره، N/m^2	P_m
[11] Shah RC, Bhat MV (2003) Ferrofluid lubrication of a parallel plate squeeze film bearing. Tribol Int 30: 221-240.	مؤلفه‌های فشار دینامیکی، N/m^2	\dot{P}_z
[12] Shah RC, Bhat MV (2005) Lubrication of porous parallelplate slider bearing with slip velocity. J Magn Magn Mater 103-106.	فشار بدون بعد	P
	ضرایب سفتی فیلم روانکار بدون بعد	$S_{ij}(i,j=x,y)$
	زمان، s	t
	مؤلفه سرعت محوری، m/s	u
	مؤلفه سرعت جانبی، m/s	w
	محورهاى مختصات	x, y, z
	مؤلفه‌های جابجایی اغتشاشی روتور	\dot{X}, \dot{Y}
	نسبت به حالت استاتیکی	
	مؤلفه‌های سرعت اغتشاشی روتور	\ddot{X}, \ddot{Y}
	ضرایب دینامیکی مختلط فیلم روانکار	$Z_{ij}(i,j=x,y)$
	مختصات زاویه‌ای (ωt)	τ
	سرعت زاویه‌ای دینامیکی روتور، rad/s	ω
	نسبت فرکانس چرخش گردابی	γ
	پریلود	δ
	نسبت طول به قطر یاتاقان	ϑ

- [23] Raoa T, Ranib A, Nagarajanc T, Hashimd F (2016) Analysis of porous layered journal bearing lubricated with ferrofluid. AMM 819: 474-478.
- [24] Patel J, Deheri GM (2016) Performance of a Ferrofluid Based Rough Parallel plate slider bearing: A comparison of three magnetic fluid flow models. Adv Tribol 2016:1-9.
- [۲۵] رسولی ا، دشتی ا، زارع م، رشیدی ر (۱۳۹۵). تأثیر پارامترهای طراحی روانکاری بر عملکرد ترموهیدرودینامیک یاتاقان‌های ژورنال غیرممدور سه لب با روانکار میکروپلار. مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۹۶-۷۹: ۶(۳).
- [26] Rahmatabadi AD, Rashidi Meybodi R (2006) Effect of mount angle on static and dynamic characteristics of gas-lubricated noncircular journal bearings. IJST 30: 1-11.
- [27] Malik M, Chandra M, Sinhasan R (1981) Design data for three lobe bearing. ASLE Trans 24: 171-178.
- [28] Zare Mehrjardi M, Rahmatabadi AD, Rashidi Meybodi R (2016) A study on the stability performance of noncircular lobed journal bearings with micropolar lubricant. Proc Inst Mech Eng Part J: J Eng Tribol 230(1): 14-30.
- [29] Ghayoumi F (2001) Ferrofluid lubricant effects on the performance of non-circular lobed bearings. M.S Thesis, University of Yazd, Yazd, Iran.
- [30] Laghrabli S, Khelifi M, Nabhani M, Bou-Saïd B (2016) Static characteristics of ferrofluid finite journal bearing considering rotational viscosity effect. Lubrication Sci.
- [۳۱] قاعدی س، قیور م، محمدخانلو ح (۱۳۹۵). تأثیر سختی یاتاقان مغناطیسی فعال بر ارتعاشات آشوبناک روتور انعطاف-پذیر. مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۱۶-۱: ۶(۲).
- [13] Torok G, Lebedev VT, Bica D, Vekas L, Avdeev MV (2006) Concentration and temperature effect of ferrofluids. J Magn Magn Mater 300: 221-224.
- [14] Chyuan TJ (2006) Analysis of combined thermal and magnetic convection ferrofluid flow in a cavity. Int Commun Heat Mass 33: 846-852.
- [15] Osman TA, Nada GS (2007) Static performance of finite hydrodynamic journal bearings lubricated by magnetic fluids with couple stresses. Tribol Int 34: 261-268.
- [16] Zakaria K, Sirwah MA, Fakhary M (2011) Theoretical study of static and dynamic characteristics for eccentric lubricated with ferrofluid. J Tribol 133: 21701-21719.
- [17] Ravaut R, Lemarquand G, Lemarquand V (2010) Mechanical properties of ferrofluid applications: Centering effect and capacity of a seal. Tribol Int 43: 76-82.
- [18] Sheikh Nejad Y, Gandjalikhan Nassab SA (2001) Three-dimensional analysis of hydrodynamic characteristics of axial groove bearings running with ferrofluids. J Eng Tribol 609-619.
- [19] Singh UP, Gupta RS (2012) Dynamic performance characteristics of a curved slider bearing operating with ferrofluids. Adv Tribol 35: 567-572.
- [20] Shimpi ME, Deheri GM (2012) Ferrofluid lubrication of curved porous circular plates and effect of deformation. AJSE 38: 2865-2874.
- [21] Lin J (2012) Derivation of ferrofluid lubrication equation of cylindrical squeeze films with convective fluid inertia forces and application to circular disks. Tribol Int 49: 110-115.
- [22] Patel ND, Deheri GM, Mehta SS (2014) Ferrofluid lubrication of squeeze film in curved circular plates with assorted porous structures. Int Adv Tribol Eng 223-230.